ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.951

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ К ПОСТРОЕНИЮ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Э. М. Мухамадиев, Г. Э. Гришанина, А. А. Гришанин

В работе найдены необходимые и достаточные условия существования классического решения в ограниченной плоской области для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ с непрерывной функцией f. Эти условия в силу известных свойств гладкости обобщенной гармонической функции одновременно являются достаточными для того, чтобы все обобщенные решения уравнения Пуассона в данной области были классическими. Приведены описания частных классов функции f, удовлетворяющих условиям существования классического решения.

Ключевые слова: уравнение Пуассона; классические и обобщенные решения; гармоническая функция; непрерывная, усиленно непрерывная, равномерно усиленно непрерывная функция.

E. M. Mukhamadiev, G. E. Grishanina, A. A. Grishanin. On the application of the regularization method to the construction of a classical solution of Poisson's equation.

Necessary and sufficient conditions are found for the existence of a classical solution of Poisson's equation $\Delta u = f$ with continuous function f in a bounded planar domain. By virtue of the known smoothness properties of a generalized harmonic function, these conditions also ensure that all generalized solutions of Poisson's equation are classical in this domain. Particular classes of functions f satisfying the conditions of existence of a classical solution are described.

Keywords: Poisson's equation, classical and generalized solutions, harmonic function, continuous function, strongly continuous function, uniformly strongly continuous function.

Введение

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область. В области G рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u\,(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u\,(x,y)}{\partial y^2} = f\,(x,y)\,. \tag{0.1}$$

Если $f(x,y)$ — измеримая и ограниченная в области G функция, то интегральный оператор

$$u_0(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_G f(\xi,\eta) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\, d\xi d\eta \tag{0.2}$$

определяет непрерывно дифференцируемое частное обобщенное решение уравнения Пуассона [1, гл. IV]. Ниже мы изучаем вопрос о существовании классического решения, т. е. решения, имеющего непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Известно, что если f имеет непрерывные частные производные первого порядка или непрерывна по Гёльдеру, то уравнение (0.1) имеет классическое решение (см., например, [1, гл. IV; 2, ч. II]). Очевидно, непрерывность функции f в области G необходима для существования классического решения уравнения (0.1). В то же время, как показывают примеры, лишь одно условие непрерывности функции f не достаточно для существования классического решения [3, с. 146]. В связи с этим представляет интерес задача о выделении класса непрерывных функций в области G, для которых уравнение (0.1) имеет классическое решение.

В работе найдены необходимые условия существования классического решения в области G для уравнения Пуассона (0.1), которые являются и достаточными, если дополнительно потребовать ограниченность или суммируемость функции $f(x,y)$ в этой области. Эти условия в силу известных свойств гладкости обобщенной гармонической функции (см., например, [4, с. 379; 5, с. 119]) одновременно являются достаточными для того, чтобы все обобщенные решения уравнения Пуассона в данной области были классическими. Приведены описания частных классов функции f, удовлетворяющих условиям существования классического решения.

Некоторые результаты работы были анонсированы на Международной конференции, посвященной памяти В. К. Иванова [6, с. 51, 52].

1. Признак существования несобственного интеграла

Обозначим через $C^k(G)$ линейное пространство всех функций $u(x,y)$, непрерывных в G вместе со всеми частными производными до порядка k включительно. Положим $C(G) = C^0(G)$. По области G в пространстве $\mathbb{R}^3$ определим ограниченную область

$$\widetilde{G} = \{(x,y,s)\colon M=(x,y)\in G, |s| < \varrho(M,\partial G)\}.$$

Пусть вещественная функция f принадлежит пространству $C(G)$. Тогда функция

$$g(x,y,s,\varphi) = f(x + s\cos\varphi, y + s\sin\varphi) \tag{1.1}$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$ и 2π-периодична по φ. Поэтому комплекснозначная функция

$$F(x,y,r) = \int\limits_0^{2\pi} g(x,y,r,\varphi)\exp(2i\varphi)\,d\varphi \tag{1.2}$$

определена и непрерывна на $\widetilde{G}$, причем $F(x,y,0)\equiv 0$. Функцию $f\in C(G)$ назовем *усиленно непрерывной* в точке $(x,y)\in G$, если существует несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_\delta^{r_1} F(x,y,r)\,\frac{dr}{r},\quad r_1 = \varrho(M,\partial G)/2,\quad M=(x,y), \tag{1.3}$$

усиленно непрерывной в G, если она усиленно непрерывна в каждой точке $(x,y)\in G$, и *равномерно усиленно непрерывной* в G, если она усиленно непрерывна в G и предельное соотношение (1.3) выполняется равномерно относительно (x,y) на каждом компакте $K\subset G$ при некотором $r_1 = r_1(K) > 0$. В последующих разделах покажем, что свойство равномерно усиленной непрерывности функции $f\in C(G)$ тесно связано со свойством существования несобственных интегралов, получаемых в результате дифференцирования функции (0.2). Очевидно, непрерывная по Гёльдеру функция является равномерно усиленно непрерывной в области G.

2. Необходимое условие существования классического решения

Следующая теорема устанавливает связь между свойством равномерной усиленной непрерывности правой части уравнения (0.2) и существованием его классического решения.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит пространству $C(G)$ и уравнение Пуассона имеет классическое решение u в области G. Тогда функция f является равномерно усиленно непрерывной в G.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Пусть функция u принадлежит пространству $C^2(G)$ и $f(x,y) = \Delta u(x,y)$. Тогда функция

$$v(x,y,r,\varphi) = u(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) \tag{2.1}$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$ вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно по всем переменным (x,y,r,φ) и 2π-периодична по φ. Поэтому функция

$$U(x,y,r)=\int\limits_0^{2\pi} v(x,y,r,\varphi)\exp(2i\varphi)\,d\varphi \tag{2.2}$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно по всем переменным (x,y,r), причем $U(x,y,0)\equiv 0$.

Аналогично по функции $f=\Delta u$, принадлежащей пространству $C(G)$, определим функции g и F равенствами (1.1) и (1.2) соответственно.

Лемма 1. *Пусть функция u принадлежит пространству $C^2(G)$ и $f=\Delta u$. Тогда функции F и U, определенные равенствами* (1.1), (1.2) *и* (2.1), (2.2) *соответственно, удовлетворяют дифференциально-функциональному уравнению*

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}-4U=r^2F(x,y,r),\quad (x,y,r)\in\widetilde{G},\quad r\neq 0 \tag{2.3}$$

и начальным условиям

$$U(x,y,0)\equiv 0,\quad \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,0)\equiv 0,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,0)=\frac{\pi}{2}\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\Big\}-i\pi\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y),\quad (x,y)\in G. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения функции v имеем

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,\quad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=-r\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\Big),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=r^2\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\varphi-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin 2\varphi\Big\}-r\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\Big).$$

Из этих равенств следует, что

$$r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+r\frac{\partial v}{\partial r}=r^2(\Delta u)(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)-\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \tag{2.5}$$

Теперь из равенства (2.5) и определений функций U и F имеем

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}=\int\limits_0^{2\pi}\Big(r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+r\frac{\partial v}{\partial r}\Big)\exp(2i\varphi)d\varphi=r^2F(x,y,r)-\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\exp(2i\varphi)d\varphi.$$

Из тождества $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\exp(2i\varphi)=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\Big\{\Big(\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}-2iv\Big)\exp(2i\varphi)\Big\}-4v\exp(2i\varphi)$ и 2π-периодичности функции $(v_\varphi-2iv)\exp(2i\varphi)$ по переменной φ следует

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\exp(2i\varphi)d\varphi=-4\int\limits_0^{2\pi}v(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi=-4U(x,y,r).$$

Отсюда и из (2.5) окончательно имеем $r^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\dfrac{\partial U}{\partial r}-4U=r^2F(x,y,r)$, т. е. функция U удовлетворяет дифференциально-функциональному уравнению (2.3).

Первые два начальных условия (2.4) следуют из определения функции U и равенства $\dfrac{\partial U}{\partial r} = \int_0^{2\pi} \dfrac{\partial v}{\partial r} \exp(2i\varphi)d\varphi$ при $r = 0$. Последнее равенство (2.4) следует из равенства $\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} \exp(2i\varphi)d\varphi$ при $r = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция u принадлежит пространству $C^2(G)$ и функция U определена равенствами* (2.1), (2.2). *Тогда для любого компакта $K \subset G$ существует такое $r_1 = r_1(K) > 0$, что функции*

$$U(x,y,r), \quad \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,r), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,r)$$

равномерно непрерывны на множестве $K \times [0,r_1]$.

Доказательство. Пусть $K \subset G$ — компактное множество. Положим $r_1 = \varrho(K,\partial G)/2 > 0$. Функция $v(x,y,r,\varphi)$, определенная равенством (2.1), на замкнутом множестве $K \times [0,r_1] \times [0,2\pi]$ имеет непрерывные (следовательно, по теореме Кантора, равномерно непрерывные) частные производные до второго порядка включительно по всем переменным (x,y,r,φ). Поэтому функция U, определенная равенством (2.2), на замкнутом множестве $K \times [0,r_1]$ имеет равномерно непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным (x,y,r). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть функция $f \in C(G)$ и уравнение (0.2) имеет классическое решение $u \in C^2(G)$. Согласно лемме 1 функции F и U, определенные равенствами (1.1), (1.2) и (2.1), (2.2) соответственно, удовлетворяют дифференциально-функциональному уравнению (2.3), которое перепишем в виде

$$r^{-1}F(x,y,r) = \frac{\partial}{\partial r}\Big\{r^{-1}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r^2}\Big\}, \quad (x,y,r) \in \widetilde{G}, \quad r \neq 0. \tag{2.6}$$

Пусть $K \subset G$ — компактное множество и $r_1 = \varrho(K,\partial G)/2 > 0$. Интегрируя обе части равенства (2.6) по отрезку $[\delta, r_1]$, имеем

$$\int_\delta^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = \Big\{r^{-1}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r^2}\Big\}_\delta^{r_1}, \quad (x,y) \in K. \tag{2.7}$$

Так как

$$U(x,y,0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,0) = 0,$$

то имеют место равенства

$$U(x,y,\delta) = \int_0^\delta (\delta - r)\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,r)dr = \delta^2 \int_0^1 (1-s)\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,\delta s)ds,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}(x,y,\delta) = \int_0^\delta \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,r)dr = \delta \int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,\delta s)ds.$$

Из этих представлений следует, что функция

$$\Big\{r^{-1}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r^2}\Big\}_\delta^{r_1} = r_1^{-1}\frac{\partial U}{\partial r}(x,y,r_1) + \frac{2U(x,y,r_1)}{r_1^2} - \delta^{-1}\frac{\partial U}{\partial r}(x,y,\delta) - \frac{2U(x,y,\delta)}{\delta^2}$$

согласно лемме 2 при $\delta \to 0$ сходится равномерно на компакте K к функции

$$r_1^{-1}\frac{\partial U}{\partial r}(x,y,r_1) + \frac{2U(x,y,r_1)}{r_1^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,0).$$

В силу равенства (2.7) это означает, что несобственный интеграл (1.3) сходится равномерно по $(x,y)\in K$ и

$$\int\limits_0^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = r_1^{-1}\frac{\partial U}{\partial r}(x,y,r_1) + \frac{2U(x,y,r_1)}{r_1^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,0),$$

т. е. функция f является равномерно усиленно непрерывной в G.

Теорема доказана.

Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, можно получить более общее условие равномерной усиленной непрерывности правой части уравнения (0.1). А именно справедлива

Теорема 2. *Пусть в любой области $G_0, \overline{G_0}\subset G$ уравнение Пуассона* (0.1) *имеет классическое решение. Тогда функция f является равномерно усиленно непрерывной в G.*

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие 1. *Если непрерывная функция f не является усиленно непрерывной в некоторой точке (x_0,y_0) области G, то уравнение* (0.1) *не имеет классического решения в любой окрестности этой точки, содержащейся в G.*

3. Достаточное условие существования классического решения

Теорема 3. *Пусть функция f усиленно непрерывна в области G и принадлежит пространству $L_1(G)$. Тогда функция $u_0(x,y)$ в G непрерывна вместе со всеми частными производными первого и второго порядка и, следовательно, является классическим решением уравнения Пуассона* (0.1).

Доказательство теоремы 3 основано на нескольких вспомогательных утверждениях.

Пусть функция f непрерывна и суммируема в области G. Рассмотрим функцию, определенную на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ интегральным оператором

$$u_\delta(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\delta^2}\,d\xi\,d\eta. \tag{3.1}$$

При $\delta>0$ подынтегральная функция имеет производные по параметрам x и y любого порядка. Обозначим $r_\delta = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\delta^2}$, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. Вычислим производные логарифмической функции по x и y:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \ln r_\delta}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r_\delta^2},\quad \frac{\partial \ln r_\delta}{\partial y} = \frac{y-\eta}{r_\delta^2},\quad \frac{\partial^2 \ln r_\delta}{\partial x^2} = \frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r_\delta^4} + \frac{\delta^2}{r_\delta^4};\\ \frac{\partial^2 \ln r_\delta}{\partial y^2} = \frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r_\delta^4} + \frac{\delta^2}{r_\delta^4},\quad \frac{\partial^2 \ln r_\delta}{\partial x\partial y} = -\frac{2\,(x-\xi)\,(y-\eta)}{r_\delta^4}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

В силу теоремы Лебега и принадлежности f к $L_1(G)$ функция $u_\delta, \delta>0$, бесконечно дифференцируема на всей плоскости и мы можем поменять порядок интегрирования и дифференцирования, занося дифференцирование под знак интеграла. В частности, получим следующие формулы:

$$\frac{\partial^{i+j}u_\delta}{\partial x^i\partial y^j} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\frac{\partial^{i+j}\ln r_\delta}{\partial x^i\partial y^j}d\xi d\eta,\quad i+j=0,1,2,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

При $\delta = 0$ формула (3.1) переходит в формулу Пуассона (0.2) и в условиях непрерывности и суммируемости функции f определяет непрерывную функцию $u_0(x,y)$ в открытом множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \partial G$. Наряду с функцией $u_0(x,y)$ рассмотрим функции

$$u_{0,1}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\frac{\partial \ln r}{\partial x} d\xi d\eta, \quad u_{0,2}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\frac{\partial \ln r}{\partial y} d\xi d\eta,$$

которые определены в открытом множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \partial G$ в силу непрерывности функции f и слабой сингулярности ядра интегральных операторов.

Заметим, что функции $u_0, u_{0,1}, u_{0,2}$ непрерывны в открытом множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$ и функция u_0 в этом множестве имеет непрерывные частные производные первого порядка, причем $\partial u_0/\partial x$, $\partial u_0/\partial y$. Эти утверждения также следуют из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть функция f непрерывна в области G и принадлежит пространству $L_1(G)$. Тогда справедливы равенства*

$$\lim_{\delta\to 0} u_\delta = u_0, \quad \lim_{\delta\to 0}\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = u_{0,1}, \quad \lim_{\delta\to 0}\frac{\partial u_\delta}{\partial y} = u_{0,2}$$

равномерно на любом компакте $K \subset G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда функция f ограничена в области $G : |f(x,y)| \le M$. Обозначим через R диаметр области G, а через $U((x,y),R)$ — круг радиуса R с центром в точке (x,y). Докажем, что равенство $\lim_{\delta\to 0} u_\delta = u_0$ выполняется равномерно на G. Действительно, так как

$$u_\delta - u_0 = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\ln\frac{r_\delta}{r} d\xi d\eta,$$

то имеем

$$|u_\delta - u_0| \le \frac{1}{4\pi}M\iint\limits_G \ln\left(\frac{r_\delta^2}{r^2}\right) d\xi d\eta \le \frac{1}{4\pi}M\iint\limits_{U((x,y),R)} \ln\left(\frac{r_\delta^2}{r^2}\right) d\xi d\eta$$

$$= \frac{M}{4}(R^2+\delta^2)\{\ln[R^2+\delta^2]-1\} - \frac{M}{4}R^2\{\ln R^2 - 1\}.$$

Отсюда следует, что при δ, стремящемся к нулю, функция u_δ равномерно сходится к u_0.

Для доказательства сходимости производных из равенств (3.2) и (3.3) имеем

$$\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - u_{0,1}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\iint\limits_G f(\xi,\eta)(x-\xi)(r_\delta^{-2} - r^{-2}) d\xi d\eta\right|$$

$$\le \frac{M}{2\pi}\iint\limits_{U((x,y),R)} |x-\xi|(r^{-2} - r_\delta^{-2}) d\xi d\eta| = \frac{2M}{\pi}\int\limits_0^R \frac{\delta^2}{\rho^2+\delta^2} d\rho = \frac{2M\delta}{\pi}\arctan\left(\frac{R}{\delta}\right).$$

Эта оценка доказывает равномерную сходимость производных функции u_δ по переменной x.

Аналогично доказывается сходимость производных по y. Утверждение 1 в случае, когда функция f ограничена, доказано.

Рассмотрим общий случай, когда непрерывная функция f принадлежит пространству $L_1(G)$. Пусть K — компактное подмножество области G. Выберем открытое множество G_1, содержащее компакт K и такое, что $\bar{G}_1 \subset G$. Функцию $u_\delta, \delta \ge 0$ представим как сумму двух функций $u_\delta = u_{1,\delta} + u_{2,\delta}$, где $u_{1,\delta}$ и $u_{2,\delta}$ соответствуют интегрированию по множеству G_1 и по дополнению $G \setminus G_1$. Очевидно, функции $u_{2,\delta}$ и $u_{2,0}$ бесконечно дифференцируемы в G_1, и поэтому $u_{2,\delta}$

равномерно сходятся к $u_{2,0}$ вместе со всеми частными производными на компакте K при $\delta \to 0$. Равномерная сходимость на компакте K функции $u_{1,\delta}$ к $u_{1,0}$ вместе с частными производными первого порядка следует из ограниченности непрерывной функции f на замкнутом множестве $\bar{G}_1$ и приведенного выше доказательства утверждения 1 для ограниченной функции f. Утверждение доказано.

Следствие 2. *В условиях утверждения* 1 *функция* $u_0(x,y)$ *имеет непрерывные производные* $\partial u_0(x,y)/\partial x, \partial u_0(x,y)/\partial y$ *в области* G, *причем справедливы равенства*

$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = u_{0,1}(x,y), \quad \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} = u_{0,2}(x,y).$$

Утверждение 2. *Если* $f(x,y)$ *непрерывна и суммируема в* G, *то для* $f_\delta \equiv \Delta u_\delta$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} f_\delta(x,y) = f(x,y)$$

равномерно на каждом компакте $K \subset G$.

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество области G. По $\varepsilon > 0$ выберем такое $\rho,\ 0 < \rho < \rho_1/2$, где $\rho_1 = \varrho(K, \partial G)/2$, что имеет место неравенство

$$|f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad (x,y) \in K, \quad \text{и} \quad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < \rho^2.$$

Пусть теперь $G_1 = U\left((x,y),\rho\right)$ — круг радиуса ρ с центром в точке $(x,y) \in K$, $G_2 = \{M = (\xi,\eta) \in G\colon \varrho(M,\partial G) < \rho_1\}$.

Так как в силу равенств (3.2) и (3.3)

$$f_\delta \equiv \Delta u_\delta = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\Big[\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r_\delta^4} + \frac{\delta^2}{r_\delta^4} + \frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r_\delta^4} + \frac{\delta^2}{r_\delta^4}\Big]d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G\setminus G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta,$$

то

$$f_\delta - f = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_1}\left(f(\xi,\eta)-f(x,y)\right)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G\setminus G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus G_1} f(x,y)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta. \quad (3.4)$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta \equiv \pi, \quad \delta > 0. \quad (3.5)$$

В силу ограниченности непрерывной функции f на замкнутом множестве имеем $|f(x,y)| \le N, (x,y) \in \overline{G_2}$. Поэтому справедлива оценка

$$\frac{1}{\pi}\Big|\iint\limits_{G\setminus G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta\Big| \le \frac{1}{\pi}\Big|\iint\limits_{G_2\setminus G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta\Big| + \frac{1}{\pi}\Big|\iint\limits_{G\setminus G_2} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta\Big|$$

$$\le \frac{N}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta + \frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_G |f(\xi,\eta)|d\xi d\eta.$$

Из этой оценки, представления (3.4) и тождества (3.5) следует оценка

$$|f_\delta(x,y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{\pi}\iint\limits_{G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta+\frac{N}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\backslash G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta+\frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_{G}|f(\xi,\eta)|d\xi d\eta$$

$$+\frac{N}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\backslash G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta<\varepsilon+\frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_{G}|f(\xi,\eta)|d\xi d\eta+\frac{2N}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\backslash G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta$$

$$=\varepsilon+\frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_{G}|f(\xi,\eta)|d\xi d\eta+\frac{2N\delta^2}{\rho^2+\delta^2}.$$

Таким образом, если число $\delta>0$ настолько мало, что имеет место неравенство

$$\frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_{G}|f(\xi,\eta)|d\xi d\eta+\frac{2N\delta^2}{\rho^2+\delta^2}<\varepsilon,$$

то для любой точки $(x,y)\in K$ справедливо неравенство $|f_\delta(x,y)-f(x,y)|<2\varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к основному этапу доказательства теоремы 3.

Утверждение 3. *Пусть функция f равномерно усиленно непрерывна в области G и принадлежит пространству $L_1(G)$. Тогда функция u_0 имеет непрерывные частные производные второго порядка, причем*

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\quad \lim_{\delta\to 0}\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y},\quad \lim_{\delta\to 0}\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\tag{3.6}$$

равномерно на каждом компактном подмножестве области G.

Доказательство. Для доказательства выполнения равенства (3.6) равномерно на каждом компактном подмножестве области G достаточно установить выполнение равенства (3.6) равномерно в некоторой окрестности каждой точки области G. Пусть $M=(x_0,y_0)$ — произвольная точка области G и $0<3d\le\varrho(M,\partial G)$ — расстояние от этой точки до границы ∂G области G. Обозначим через $G_1=U(M,2d)$ круг радиуса $2d$ с центром в точке M.

Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G}f(\xi,\eta)\Big(\frac{\partial^2\ln r_\delta}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2\ln r_\delta}{\partial x\partial y}\Big)d\xi d\eta.\tag{3.7}$$

Очевидно, что если она сходится к некоторой функции равномерно по (x,y) из некоторого множества, то каждое слагаемое равномерно сходится на этом множестве, так как u_δ — вещественная функция. Так как

$$\frac{\partial^2\ln r_\delta}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2\ln r_\delta}{\partial x\partial y}=-\frac{\big((x-\xi)+i(y-\eta)\big)^2}{r_\delta^4}+\frac{\delta^2}{r_\delta^4},$$

то имеем равенство

$$\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x\partial y}=h_\delta(x,y)+g_\delta(x,y)+\frac{1}{2}f_\delta(x,y),\tag{3.8}$$

где

$$h_\delta(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_1}f(\xi,\eta)\frac{\big((x-\xi)+i(y-\eta)\big)^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta,$$

$$g_\delta(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G\setminus G_1} f(\xi,\eta)\frac{((x-\xi)+i(y-\eta))^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta, \quad f_\delta(x,y) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta.$$

Функция $g_\delta(x,y)$ при $\delta\to 0$ в круге $U(M,d)$ равномерно сходится к функции

$$g_0(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G\setminus G_1} f(\xi,\eta)\frac{((x-\xi)+i(y-\eta))^2}{r^4}d\xi d\eta,$$

а функция $f_\delta(x,y)$ в силу утверждения 1 — к функции $f(x,y)$.

Следовательно, для существования у функции (3.7) равномерного предела при $\delta\to 0$ достаточно установить существование равномерного предела у функции $h_\delta(x,y)$. Переходя к полярным координатам, имеем

$$h_\delta(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_1} f(\xi,\eta)\frac{((x-\xi)+i(y-\eta))^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta = \left\{\begin{aligned}\xi &= x+\rho\cos\varphi,\\ \eta &= y+\rho\sin\varphi\end{aligned}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho d\rho d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho\, d\rho d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho d\rho d\varphi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho\, d\rho d\varphi.$$

Здесь

$$R(\varphi) = R(x,y,\varphi) = (x_0-x)\cos\varphi + (y_0-y)\sin\varphi + \sqrt{4d^2 - ((x_0-x)\sin\varphi - (y_0-y)\cos\varphi)^2}$$

— гладкая функция аргументов (x,y,φ) и $R(\varphi)\geq d$ при $(x,y)\in U(M,d)$.

Таким образом, для функции h_δ имеем представление

$$h_\delta(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho d\rho d\varphi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho d\rho d\varphi.$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства при $\delta\to 0$ сходится равномерно по $(x,y)\in U(M,d)$ к функции

$$h_{0,2}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\exp(2i\varphi)}{\rho}d\rho d\varphi.$$

Первое слагаемое, изменив порядок интегрирования, запишем в виде

$$h_{\delta,1}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \left[\frac{\rho^3}{(\rho^2+\delta^2)^2}\int\limits_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi\right]d\rho.$$

По условию функция

$$I(\rho) = I(x,y,\rho) = \int\limits_0^\rho \frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} f(x+s\cos\varphi, y+s\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi ds$$

определена на множестве $U(M,d)\times[0,d]$ и

$$\frac{\partial I}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi, \quad (x,y)\in U(M,2d), \quad 0<\rho<d.$$

Поэтому, производя интегрирование по частям, для функции $h_{\delta,1}$ имеем

$$h_{\delta,1}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \left[\frac{\rho^3}{(\rho^2+\delta^2)^2}\int\limits_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi\right]d\rho$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \frac{\rho^4}{(\rho^2+\delta^2)^2}\frac{\partial I}{\partial\rho}d\rho = -\frac{1}{2\pi}\frac{d^4}{(d^2+\delta^2)^2}I(d) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}I(\rho)d\rho.$$

Отсюда следует, что если интеграл

$$\int\limits_0^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}I(\rho)d\rho \tag{3.9}$$

при $\delta\to 0$ в круге $U(M,d)$ равномерно стремится к нулю, то при $\delta\to 0$ функция $h_{\delta,1}$ равномерно в этом круге стремится к функции

$$-\frac{1}{2\pi}I(x,y,d) = h_{0,1}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} f(x+s\cos\varphi, y+s\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi ds.$$

Докажем равномерную сходимость интеграла (3.9) к нулю в круге $U(M,d)$ при $\delta\to 0$. В силу равномерной усиленной непрерывности функции f по $\varepsilon>0$ можно выбрать $\sigma>0$ такое, что

$$|I(x,y,\rho)|<\varepsilon, \quad (x,y)\in U(M,d), \quad 0<\rho<\sigma.$$

В силу неравенств

$$\int\limits_\sigma^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}d\rho = \int\limits_{\sigma/\delta}^{d/\delta}\frac{4s^3}{(s^2+1)^3}ds < \int\limits_{\sigma/\delta}^{\infty}\frac{4s^3}{(s^2+1)^3}ds$$

по числу σ выберем $\delta_0>0$ настолько малым, что справедливо неравенство

$$\int\limits_\sigma^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}d\rho<\varepsilon, \quad 0<\delta<\delta_0.$$

Из этих оценок имеем $\left|\int_0^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3} I(\rho)d\rho\right| \le \varepsilon + N\varepsilon,\ (x,y)\in U(M,d),\ 0<\delta<\delta_0$, где $|I(x,y,\rho)| \le N,\ (x,y)\in U(M,d),\ 0<\rho\le d$. Здесь мы использовали неравенство

$$\int\limits_0^\sigma \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}d\rho = \int\limits_0^{\sigma/\delta} \frac{4s^3}{(s^2+1)^3}ds < \int\limits_0^\infty \frac{4s^3}{(s^2+1)^3}ds = 1.$$

Равномерная сходимость интеграла (3.9) к нулю в круге $U(M,d)$ при $\delta\to 0$ доказана. Тем самым мы доказали, что функция h_δ равномерно сходится в этом круге к функции

$$h_0(x,y) = h_{0,1}(x,y) + h_{0,2}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} f(x+s\cos\varphi, y+s\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi ds$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\exp(2i\varphi)}{\rho}d\rho d\varphi,$$

а функция (3.7) равномерно сходится к функции $h_0(x,y)+g_0(x,y)+1/2\,f(x,y)$. Отсюда и из утверждений 1, 2 следует, что функция u_0 имеет все частные производные второго порядка, и справедливы равенства

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \Re\left[h_0(x,y)+g_0(x,y)\right] + \frac{1}{2}f(x,y), \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = -\Re\left[h_0(x,y)+g_0(x,y)\right] + \frac{1}{2}f(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} = \Im\left[h_0(x,y)+g_0(x,y)\right], \quad (x,y)\in U(M,d). \tag{3.10}$$

Утверждение 3 доказано.

З а м е ч а н и е. В равенствах (3.10) положим $(x,y)=(x_0,y_0)$. Тогда $R(\varphi)=R(x_0,y_0,\varphi)\equiv 2d$, поэтому функцию h_0 в точке (x_0,y_0) можно переписать в виде

$$h_0(x_0,y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2d}\frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} f(x_0+s\cos\varphi, y_0+s\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi ds.$$

4. Регулярность обобщенных решений уравнения Пуассона

Приведем некоторые понятия, связанные с определением обобщенного решения уравнения Пуассона (см., например, [4, с. 379; 5, с. 119)]. Пусть $D(G)$ — пространство основных в области G функций, а $D'(G)$-пространство всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций $D(G)$, т. е. пространство обобщенных в области G функций. Каждая локально интегрируемая в области G функция f формулой

$$(f,\psi) = \iint\limits_G f(\xi,\eta)\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad \psi\in D(G)$$

определяет непрерывный в $D(G)$ функционал — регулярную обобщенную функцию из пространства $D'(G)$. В частности, каждая непрерывная функция из пространства $C(G)$ является регулярной обобщенной функцией. Пусть f — произвольная обобщенная функция. Обобщенную функцию $v\in D'(G)$ называют обобщенным решением уравнения Пуассона $\Delta u = f$, если она удовлетворяет равенству $(v,\Delta\psi)=(f,\psi)$ для любой функции $\psi\in D(G)$. В частности, если $f=0$, то уравнение Пуассона называют уравнением Лапласа. Классическое решение уравнения Лапласа в области G называют гармонической функцией, а решение уравнения Лапласа из пространства $D'(G)$ называют обобщенной гармонической функцией. Следующее важное утверждение определяет структуру множества обобщенных гармонических в области G функций (см., например, [4, с. 379; 2, с. 119]).

Утверждение 4. *Всякая обобщенная гармоническая функция в области G является также гармонической функцией в этой области.*

Утверждение 4 вместе с вышеприведенными результатами позволяет установить следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть непрерывная в области G функция f усиленно непрерывна в этой области. Тогда каждое обобщенное решение уравнения Пуассона* (0.1) *в области G является классическим решением в этой области.*

Доказательство. Пусть $v \in D'(G)$ — обобщенное решение уравнения (0.1). Выберем последовательность областей G_k, удовлетворяющих условиям $G_k \subset \overline{G_k} \subset G_{k+1} \subset G,\ k = 1, 2, \ldots$ и $G = \bigcup_k G_k$. Согласно теореме 3 функция

$$u_k(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G_k} f(\xi,\eta) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta$$

является классическим решением уравнения (0.1) в области G_k. Очевидно, $v - u_k$ принадлежит пространству $D'(G_k)$ и является обобщенной гармонической функцией в области G_k. В силу теоремы 4 обобщенная функция $v - u_k$ совпадает с некоторой гармонической в области G_k функцией v_k, т. е. $(v - u_k, \psi) = (v_k, \psi)$ для любой функции $\psi \in D(G_k)$. Отсюда следует, что для дважды непрерывно дифференцируемых в области G_k функций $u_k + v_k,\ u_{k+1} + v_{k+1}$ справедливо равенство $(u_k + v_k, \psi) = (u_{k+1} + v_{k+1}, \psi)$ для любой функции $\psi \in D(G_k)$. В силу леммы Дюбуа-Реймон функции $u_k + v_k,\ u_{k+1} + v_{k+1}$ тождественны на множестве G_k. Поэтому функция $\overline{v}(x,y) = u_k(x,y) + v_k(x,y),\ (x,y) \in G_k$ корректно определена на всей области G, является классическим решением уравнения (0.1) и определяет регулярную обобщенную функцию в области G. Покажем, что обобщенная функция v совпадает с классическим решением $\overline{v}$ уравнения (0.1). Действительно, для любой функции $\psi \in D(G)$ существует такой номер k, что $\psi \in D(G_k)$. Поэтому $(v, \psi) = (u_k + v_k, \psi) = (\overline{v}, \psi)$ для любой функции $\psi \in D(G)$. Итак, обобщенная функция v является регулярной и совпадает с классическим решением $\overline{v}$ уравнения (0.1). Теорема доказана.

5. Примеры и приложения

Теорема 5. *Пусть функция $f(x,y) \equiv f_0(x)$, где $f_0(x)$ — непрерывная на интервале (a,b) функция. Тогда уравнение* (0.1) *имеет классическое решение в любой области $G \subset (a,b) \times \mathbb{R}$.*

Доказательство этой теоремы следует из того, что функция

$$u(x,y) \equiv \int\limits_{x_0}^{x} (x-s) f_0(s) ds, \quad x_0,\ x \in (a,b),$$

является классическим решением уравнения (0.1) при $f(x,y) \equiv f_0(x)$. Отсюда и из теоремы 1 получаем

Следствие 3. *Если функция $f(x,y) \equiv f(x)$, то для функции*

$$F(x,y,r) = \int\limits_{0}^{2\pi} f(x + r\cos\varphi) \exp(2i\varphi) d\varphi$$

существует несобственный интеграл

$$\int_0^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r}.$$

Теорема 6. *Пусть непрерывная функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по направлению y, т. е.*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le K\,|y_1-y_2|^\alpha, \quad 0<\alpha<1, \quad (x,y_1),\ (x,y_2)\in G.$$

Тогда функция $f(x,y)$ является равномерно усиленно непрерывной в области G.

Доказательство. Функцию

$$F(x,y,r) = \int_0^{2\pi} f(x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi)e^{2i\varphi}d\varphi$$

представим в виде $F(x,y,r)=F_1(x,y,r)+F_2(x,y,r)$, где

$$F_1(x,y,r) = \int_0^{2\pi} f(x+r\cos\varphi, y)e^{2i\varphi}d\varphi, \quad F_2(x,y,r)=F(x,y,r)-F_1(x,y,r).$$

Пусть $K\subset G$ — компактное множество. Положим $r_1=\rho(K,\partial G)/2>0$. В силу тождества

$$\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{x+r\cos\varphi} f(s,y)e^{i\varphi}\,ds\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} f(x+r\cos\varphi,y)\sin\varphi e^{i\varphi}\,d\varphi, \quad 0<r\le r_1, \tag{5.1}$$

для функции $F_1(x,y,r)$ справедливо представление

$$\frac{1}{r}F_1(x,y,r) = \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{x+r\cos\varphi} f(s,y)e^{i\varphi}\,ds\,d\varphi\right\}.$$

Интегрируя это равенство по отрезку $[\delta,r_1],\ 0<\delta<r_1$, в силу (5.1) получим

$$\int_\delta^{r_1} F_1(x,y,r)\,\frac{dr}{r} = i\int_0^{2\pi} f(x+r_1\cos\varphi,y)\sin\varphi e^{i\varphi}\,d\varphi - i\int_0^{2\pi} f(x+\delta\cos\varphi,y)\sin\varphi e^{i\varphi}\,d\varphi. \tag{5.2}$$

Оценим функцию $F_2(x,y,r)$:

$$|F_2(x,y,r)| \le \int_0^{2\pi} |f(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)-f(x+r\cos\varphi,y)|\,d\varphi \le K\int_0^{2\pi}|\sin\varphi|r^\alpha d\varphi = 4Kr^\alpha. \tag{5.3}$$

Из равенства (5.2) и оценки (5.3) следует, что равномерно на компакте K существует

$$\int_0^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = \lim_{\delta\to+0}\int_\delta^{r_1} F(x,y,r)\,\frac{dr}{r} = \int_0^{r_1} F_1(x,y,r)\frac{dr}{r} + \int_0^{r_1} F_2(x,y,r)\frac{dr}{r}.$$

Теорема доказана.

Будем говорить, что на множестве $M\subset G$ функция удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha>0$ по направлению $\overrightarrow{n}=(\cos\beta,\sin\beta)$, если

$$|f(x+h\cos\beta, y+h\sin\beta)-f(x,y)| \le C|h|^\alpha, \quad (x,y), \quad (x+h\cos\beta,y+h\sin\beta)\in M, \quad C=\text{const}.$$

Доказанную теорему можно обобщить в следующей форме.

Теорема 7. *Пусть непрерывная функция $f(x,y))$ в некоторой окрестности каждой точки (x_0,y_0) области G удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha>0$ по фиксированному направлению $\overrightarrow{n}=(\cos\beta,\sin\beta)$, где $\alpha>0,\overrightarrow{n}$ зависят от точки (x_0,y_0). Тогда функция $f(x,y)$ является усиленно непрерывной в области G.*

Отсюда и из теоремы 3 следует

Теорема 8. *Если непрерывная функция $f(x,y)$, принадлежит пространству Лебега $L(G)$ и в некоторой окрестности каждой точки удовлетворяет условию Гёльдера по некоторому направлению, то уравнение Пуассона* (0.1) *в области G имеет классическое решение.*

Теорема 9. *Пусть непрерывная в круге $\{(x,y)\colon x^2+y^2\le r_0\}$ функция $f(x,y)$ допускает представление*

$$f(x,y)=\sum_{|k|\le N} f_k(r)\exp(ik\phi),\quad x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi.$$

Тогда уравнение (0.1) *имеет классическое решение в круге $\{(x,y)\colon x^2+y^2<r_0\}$ тогда и только тогда, когда функции $f_2(r)$ и $f_{-2}(r)$ такие, что существуют несобственные интегралы*

$$\int_0^{r_0}\frac{f_{\pm2}(r)}{r}dr=\lim_{\delta\to0}\int_\delta^{r_0}\frac{f_{\pm2}(r)}{r}dr.$$

Сначала докажем вспомогательные утверждения.

Легко показать, что для функции

$$v(x,y)=v_k(r)\exp(ik\phi),\quad x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi,$$

где функция $v_k(r)$ имеет непрерывные производные при $r>0$, справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial x}=(xrv_k'-ikyv_k)\frac{\exp(ik\phi)}{r^2},\\
&\frac{\partial v}{\partial y}=(yrv_k'+ikxv_k)\frac{\exp(ik\phi)}{r^2},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\left[x^2r^2v_k''+yr(y-2ikx)v_k'-ky(ky-2ix)v_k\right]\frac{\exp(ik\phi)}{r^4},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\left[xyr^2v_k''+ir(kx^2-ky^2+ixy)v_k'+k(kxy-ix^2+iy^2)v_k\right]\frac{\exp(ik\phi)}{r^4},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\left[y^2r^2v_k''+xr(x+2iky)v_k'-kx(kx+2iy)v_k\right]\frac{\exp(ik\phi)}{r^4}.
\end{aligned}$$

Из приведенных выше формул вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Функция*

$$v(x,y)=\sum_{|k|\le N} v_k(r)\exp(ik\phi),\quad x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi$$

в круге $\{(x,y)\colon x^2+y^2\le r_0^2\}$: a) *непрерывна тогда и только тогда, когда функции $v_k(r)$, $|k|\le N$ непрерывны на отрезке $[0,r_0]$, причем $v_k(0)=0$ при $k\ne0$;* b) *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, если функции $v_k(r)$ на отрезке $[0,r_0]$ дважды непрерывно дифференцируемы, причем $v_k(0)=v_k'(0)=v_k''(0)=0$ при $k\ne0$.*

Лемма 4. *Пусть непрерывная в замкнутом круге* $\{(x,y)\colon x^2+y^2 \le r_0^2\}$ *функция имеет представление* $f(x,y) = f_k(r)\exp(ik\phi)$, $k \in Z$. *Тогда уравнение Пуассона (0.1) в круге* $\{(x,y)\colon x^2+y^2 < r_0^2\}$ *имеет классическое решение при любом* k, $|k| \ne 2$, *а при* $|k| = 2$ *необходимым и достаточным условием существования классического решения является сходимость несобственного интеграла*

$$\int\limits_0^{r_0} f_k(r)\frac{dr}{r} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{r_0} f_k(r)\frac{dr}{r}. \tag{5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $k \ge 0$. Случай $k < 0$ рассматривается аналогично. Будем искать решение уравнения Пуассона в виде $v(r,\phi) = v_k(r)\exp(ik\phi)$. Уравнение Пуассона в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\Big(r\frac{\partial v}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = f_k(r)\exp(ik\phi).$$

Отсюда для функции $v_k(r)$ имеем

$$r^2 v_k'' + r v_k' - k^2 v_k = r^2 f_k(r), \quad r > 0. \tag{5.5}$$

Отметим, что в силу непрерывности функции $f(x,y)$ функция $f_k(r)$ непрерывна на отрезке $[o, r_0]$, причем $f_k(0) = 0$ при $k \ne 0$ (лемма 4). Нас интересуют решения $v_k(r)$ уравнения (5.5), которые имеют непрерывное продолжение в точке $r = 0$ вместе со всеми производными до второго порядка включительно, причем

$$\lim_{r\to 0} v_k(r) = \lim_{r\to 0} v_k'(r) = \lim_{r\to 0} v_k''(r) = 0, \tag{5.6}$$

если $k \ne 0$.

Соответствующее однородное уравнение $r^2 v_k'' + r v_k' - k^2 v_k = 0$ является уравнением Эйлера. Используя метод вариации постоянных, получим общее решение неоднородного уравнения (5.5):

$$v_0 = \ln r \int\limits_0^r \rho f_0(\rho)d\rho - \int\limits_0^r \rho\ln\rho f_0(\rho)d\rho + C_1 + C_2\ln r, \quad \text{если} \quad k = 0,$$

$$v_k = \frac{r^k}{2k}\int\limits_{r_0}^r \rho^{1-k} f_k(\rho)d\rho + C_1 r^k - \frac{r^{-k}}{2k}\int\limits_{r_0}^r \rho^{1+k} f_k(\rho)d\rho + C_2 r^{-k}, \quad \text{если} \quad k \ne 0.$$

Из этих представлений общего решения уравнения (5.5), правила Лопиталя, непрерывности функции $f_k(r)$ и условия $f_k(0) = 0$ при $k \ne 0$ следует, что решения, которые имеют непрерывное продолжение в точке $r = 0$ вместе со всеми производными до второго порядка включительно, имеют вид

$$v_0 = \ln r \int\limits_0^r \rho f_0(\rho)d\rho - \int\limits_0^r \rho\ln\rho f_0(\rho)d\rho + C_1, \quad \text{если} \quad k = 0,$$

$$v_k = \frac{r^k}{2k}\int\limits_0^r \rho^{1-k} f_k(\rho)d\rho - \frac{r^{-k}}{2k}\int\limits_0^r \rho^{1+k} f_k(\rho)d\rho, \quad \text{если} \quad k = 1,$$

$$v_k = \frac{r^k}{2k}\int\limits_{r_0}^r \rho^{1-k} f_k(\rho)d\rho + C_1 r^k - \frac{r^{-k}}{2k}\int\limits_0^r \rho^{1+k} f_k(\rho)d\rho, \quad \text{если} \quad k > 2.$$

Теперь рассмотрим случай $k = 2$. Пусть функция $f_2(r)$ удовлетворяет условию (5.4). Тогда частное решение уравнения (5.5)

$$v_2 = \frac{r^2}{4}\int_0^r \rho^{-1} f_2(\rho)d\rho - \frac{r^{-2}}{4}\int_0^r \rho^3 f_2(\rho)d\rho$$

удовлетворяет начальным условиям (5.6).

Обратно, пусть уравнение (5.5) при $k = 2$ имеет решение $v_2(r)$, удовлетворяющее условиям (5.6). Из тождества

$$\frac{f_2(r)}{r} \equiv \frac{d}{dr}\left\{\frac{v_2'}{r} + \frac{2v_2}{r^2}\right\}, \quad r \in (0, r_0),$$

следует

$$\int_\delta^{r_0} f_2(r)\frac{dr}{r} \equiv \frac{v'(r_0)}{r_0} + \frac{2v(r_0)}{r_0^2} - \frac{v'(\delta)}{\delta} + \frac{2v(\delta)}{\delta^2}, \quad \delta \in (0, r_0),$$

которое в силу

$$\lim_{r\to 0}\frac{v_2(r)}{r^2} = \lim_{r\to 0}\frac{v_2'(r)}{2r} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0} v_2''(r) = 0$$

доказывает существование несобственного интеграла (5.4) при $k = 2$. Лемма 4 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 9 следует из приведенных выше лемм 3 и 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
2. **Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
3. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983 с.
4. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
5. **Олейник О.А.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ, 2005. 260 с.
6. **Мухамадиев Э.М., Гришанина Г.Э.** О применении метода регуляризации к построению классического решения уравнения Пуассона // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф., посвящен. памяти В. К. Иванова (Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября 2011 г.) / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2011. С. 51–52.

Мухамадиев Эргашбой
д-р физ.-мат. наук, профессор
Вологодский государственный университет
e-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Поступила 12.01.2015

Гришанина Гульнара Эргашевна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики
университет “Дубна”
e-mail: anora66@mail.ru

Гришанин Александр Андреевич
аспирант фак. ВМК МГУ им. М. Ломоносова