ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.6

О ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ, ВКЛЮЧАЮЩИМИ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ СПИСКА ЗАДАНИЙ[1]

М. С. Кошелева, А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов

Рассматривается решение задачи маршрутизации, осложненной ограничениями и возможной зависимостью функций стоимости от списка заданий. Более того, по постановке допускается, что часть ограничений также может формироваться в зависимости от текущего списка заданий. Возможные приложения могут быть связаны с маршрутизацией перемещений работников в условиях повышенной радиации при демонтаже источников излучения, а также с задачей управления инструментом при листовой резке деталей на станках с числовым программным управлением. Построены модификация широко понимаемого динамического программирования и, на его основе, два варианта алгоритма, реализованных на ПЭВМ.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования.

M. S. Kosheleva, A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. On a routing problem with constraints that include dependence on a task list.

We consider the solution of a routing problem complicated by constraints and by a possible dependence of the cost function on a task list. In addition, the statement admits that some of the constraints may be formed depending on a current list of tasks. Possible applications of this problem include routing the workers' movements under increased radiation in the process of dismantling radiation sources as well as steering a numerically controlled machine tool during the sheet cutting of parts. We propose a modification of widely understood dynamic programming and use it to design two versions of an algorithm, which are implemented as computer programs.

Keywords: dynamic programming, route, precedence constraints.

1. Введение

В работе используются следующие сокращения: АЭС — атомная электростанция, ЗК — задача коммивояжера, ДП — динамическое программирование, ДР — допустимое решение, м/ф — мультифункция, ОЗМ — основная задача маршрутизации, п/м — подмножество, УП — упорядоченная пара, ЧПУ — числовое программное управление.

Статья посвящена построению методов решения задачи маршрутизации перемещений в условиях ограничений различных типов; упомянутые ограничения мотивированы потребностями прикладных задач. В данном случае можно говорить, в частности, о задачах, характерных для атомной энергетики и связанных со снижением дозовой нагрузки работников АЭС при выполнении комплекса заданий в условиях повышенной радиации (очень важной представляется, в частности, инженерная задача о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации), а также о задаче, возникающей в машиностроении и касающейся управления инструментом при листовой резке деталей на станках с ЧПУ. В постановках упомянутого типа с одной стороны, присутствует большой комплекс условий технологического характера, подлежащих соблюдению в процессе перемещений, а с другой — оказывается возможной ситуация, когда стоимость отдельных работ зависит от списка заданий, не выполненных на текущий момент (такая ситуация имеет место, в частности, в упомянутой выше задаче о демонтаже, которая весьма актуальна с точки зрения эксплуатации современных АЭС).

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления" и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14-08-00419, 15-01-07909).

Обсудим один из вариантов маршрутной задачи производственного характера, имея в виду проблему использования станков с ЧПУ; см. в этой связи [1–3]. Полагая выполненной процедуру раскроя, рассмотрим вопрос об организации перемещений инструмента (резака) с целью последовательной резки контуров плоских деталей (деталь, наряду с внешним, может иметь один или несколько внутренних контуров, которые должны вырезаться раньше внешнего). Сама резка контуров осуществляется по эквидистантам этих контуров, т. е. с некоторым "запасом". Для ее осуществления подбирается всякий раз точка врезки из выбранного заранее конечного множества, играющего роль дискредитации вспомогательной эквидистанты, расположенной вблизи основной; завершение резки производится в точке выключения инструмента, находящейся вблизи "своей" точки врезки. Далее инструмент перемещается к точке врезки следующего по порядку контура в режиме холостого хода с выключенным резаком. Стартовая точка инструмента задана; по окончанию резки всех деталей обычно осуществляется возврат инструмента в точку старта в режиме холостого хода.

Из приведенного выше рассуждения видно, что одной из компонент системы ограничений являются так называемые условия предшествования [4]: резка внутренних контуров каждой детали должна предшествовать резке внешнего ее контура (возможны и другие условия такого типа). Имеются также требования, связанные [3, с. 63] с ограничениями на жесткость листа и деталей. Сейчас отметим следующее: при выборе новых точек врезки следует "сторониться" множеств, отвечающих уже вырезанным деталям, т. е. участков, где листа уже нет. В противном случае возникают деформации оставшейся части листа возле вновь вырезаемых деталей.

Итак, новую точку врезки надо выбирать так, чтобы ее окрестность заданного размера не содержала "пустот", образовавшихся за счет резки "предыдущих" деталей. В результате возникает ограничение, зависящее от списка заданий, выполненных на текущий момент времени. Данный список, однако, легко выражается через список еще не выполненных заданий, что оказывается более удобным с точки зрения последующего применения аппарата ДП.

Итак, мы сталкиваемся с ситуацией, когда и стоимости (перемещений и текущих работ), и сами ограничения могут зависеть от списка заданий. Конечно, в принципе можно целый ряд ограничений не рассматривать, изменяя должным образом функции стоимости (вводя соответствующие штрафы). Мы предпочитаем, однако, сохранить обе возможности для обеспечения, в конечном счете, соблюдения ограничений: жесткие запреты и пребразование функций стоимости с целью сделать крайне невыгодным фактическое нарушение ограничений. Такой подход представляется полезным и с точки зрения построения общей теории, уже не обязательно связанной с применением в задаче управления инструментом на машинах с ЧПУ; представляется, в частности, что данный подход может оказаться полезным в задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации.

Рассматриваемая маршрутная задача имеет своим прототипом известную труднорешаемую ЗК (см. [4; 5] и др.); в частности, отметим применение ДП для решения ЗК в [6; 7]. Однако вышеупомянутые особенности, диктуемые интересами решения прикладных задач, выводят, как представляется (по крайней мере для задач "диапазонного" в смысле размерности типа), в качестве важных соображения иного порядка, а именно: как учитывать весьма сложные и разнообразные ограничения, а также зависимость стоимости от списка заданий. Эти особенности затрудняют анализ эвристических алгоритмов и делают актуальной разработку теоретических методов, ориентированных на оптимизацию. В этом качестве естественным представляется исследование возможностей метода ДП, что и составляет цель настоящей статьи.

2. Общие определения и обозначения

Используем кванторы, пропозициональные связки; $\varnothing$ обозначает пустое множество; $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если T — множество, то через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м T, а через $\mathrm{Fin}(T)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(T)$.

Если P и Q — непустые множества, то через $(\mathrm{Bi})[P;Q]$ обозначаем множество всех биекций [8, с. 87] множества P на Q; при $\phi \in (\mathrm{Bi})[P;Q]$ определена биекция $\phi^{-1} \in (\mathrm{Bi})[Q;P]$ (обратная к ϕ), для которой $\big(\phi(\phi^{-1}(q)) = q \quad \forall q \in Q\big) \,\&\, \big(\phi^{-1}(\phi(p)) = p \quad \forall p \in P\big)$. Тогда для всякого непустого множества A в виде $(\mathrm{Bi})[A;A]$ имеем множество всех перестановок A (см. [8, с. 87]).

Если p и q — объекты, то через $\{p;q\}$ обозначаем множество, содержащее p, q и не содержащее никаких других элементов ($\{p;q\}$ — неупорядоченная пара упомянутых объектов). Произвольному объекту x сопоставляем синглетон $\{x\} \stackrel{\triangle}{=} \{x;x\}$ (содержащий x). Поскольку множества являются объектами, сопоставляем, следуя [9, с. 87], произвольным объектам y и z УП $(y,z) \stackrel{\triangle}{=} \{\{y\};\{y;z\}\}$ с первым элементом y и вторым элементом z. Если u — какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(u)$ и $\mathrm{pr}_2(u)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы u. Для любых объектов a, b и c имеем триплет $(a,b,c) \stackrel{\triangle}{=} \big((a,b),c\big)$ в виде УП специального вида. Как обычно [10, с. 17], для любых трех непустых множеств A, B и C следуем соглашению $A \times B \times C \stackrel{\triangle}{=} (A \times B) \times C$; если к тому же $\phi : A \times B \times C \longrightarrow D$, где D — непустое множество, то при $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$ определена точка $\phi(\mu,\nu) \in D$ (используем упомянутое представление множества $A \times B \times C$), для которой при $\mu_1 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\mu)$ и $\mu_2 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\mu)$ используем также обозначение $\phi(\mu_1,\mu_2,\nu)$, т. е. $\phi(\mu_1,\mu_2,\nu) \stackrel{\triangle}{=} \phi(\mu,\nu)$.

Как обычно, через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$, $\mathbb{N}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$ и $\overline{p,q} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N}_0 |\, (p \leqslant i) \,\&\, (i \leqslant q)\} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall q \in \mathbb{N}_0$ (заметим, кстати, что $\overline{1,0} = \emptyset$). Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$; при этом $(\mathrm{bi})[K] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{Bi})[\overline{1,|K|};K] \neq \varnothing$. Кроме того, $|\varnothing| \stackrel{\triangle}{=} 0$. При $s \in \mathbb{N}$ непременно $(\mathrm{bi})[\overline{1,s}] = (\mathrm{Bi})[\overline{1,s};\overline{1,s}]$ (множество всех перестановок множества $\overline{1,s}$). Для каждого непустого множества T через $\mathcal{R}_+[T]$ обозначаем множество всех функций из T в $[0,\infty[\stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leqslant \xi\}$.

3. Содержательная постановка задачи

В настоящем разделе вводятся элементы постановки с тем, чтобы наметить ее точный вариант, который будет приведен далее. Однако, сначала введем ряд специальных обозначений и определений, непосредственно касающихся рассматриваемой ниже задачи. Фиксируем непустое множество X, точку $x^0 \in \mathrm{X}$ (база процесса), число $N \in \mathbb{N}, \;\; N \geqslant 2$, а также множества

$$\mathrm{M}_1 \in \mathrm{Fin}(\mathrm{X}), \ldots, \mathrm{M}_N \in \mathrm{Fin}(\mathrm{X}), \tag{3.1}$$

именуемые ниже мегаполисами и обладающие свойствами

$$(x^0 \notin \mathrm{M}_j \quad \forall j \in \overline{1,N}) \,\&\, (\mathrm{M}_p \cap \mathrm{M}_q = \varnothing \quad \forall p \in \overline{1,N} \quad \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{3.2}$$

Кроме того, фиксируем следующие отношения:

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(\mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_1), \ldots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(\mathrm{M}_N \times \mathrm{M}_N) \tag{3.3}$$

(непустые п/м декартовых “квадратов” мегаполисов); УП — элементы $\mathbb{M}_j$, где $j \in \overline{1,N}$, — определяют всякий раз возможные варианты выполнения работ, связанных с обслуживанием мегаполиса M_j. Нашей целью является исследование процессов

$$x^0 \to \big(x_{1,1} \in \mathrm{M}_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in \mathrm{M}_{\alpha(1)}\big) \to \ldots \to \big(x_{N,1} \in \mathrm{M}_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in \mathrm{M}_{\alpha(N)}\big), \tag{3.4}$$

для которых $(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \ldots, (x_{N,1}, x_{N,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$. В (3.4) α — перестановка множества $\overline{1,N}$, выбор которой, наряду с траекторией в (3.4), находится в руках исследователя.

З а м е ч а н и е. В связи с задачей маршрутизации движения инструмента на станках с ЧПУ отметим следующую интерпретацию (3.1)–(3.4): мегаполисы получены дискретизацией некоторых вторичных эквидистант, лежащих вблизи эквидистант, по которым осуществляется резка, УП из отношений (3.3) имеют всякий раз первым элементом гипотетическую точку врезки, а вторым элементом — соответствующую ей точку выключения инструмента. Заметим, что в данном конкретном случае отношения (3.3) являются функциями (отображениями): каждой точке врезки соответствует единственная точка выключения инструмента.

Возвращаясь к (3.3), полагаем при $j \in \overline{1, N}$

$$\Big(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\}\Big) \,\&\, \Big(\mathbf{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\}\Big), \tag{3.5}$$

получая два непустых п/м M_j; в связи с этим отметим, что

$$\mathbf{X} \triangleq \{x^0\} \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\Big) \in \mathrm{Fin}(X).$$

Полагаем также $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$, получая множество всех непустых списков заданий. Пусть, кроме того, заданы м/ф $\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_N$; точнее, заданы отображения

$$\mathrm{A}_1 : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(\mathrm{M}_1), \ldots, \mathrm{A}_N : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(\mathrm{M}_N). \tag{3.6}$$

Таким образом, при $j \in \overline{1, N}$, $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ определено непустое множество $\mathrm{A}_j(x, K)$; мы полагаем, что наши возможности в части перемещения из x в мегаполис M_j исчерпываются упомянутым множеством, где (по смыслу) K есть список заданий, не выполненных на момент перемещения. Итак, мы можем в упомянутой ситуации осуществить только перемещения $x \to y$, где $y \in \mathrm{A}_j(x, K)$. Задавая м/ф (3.6), мы допускаем некоторую переопределенность. Так, например, допускаем в данной ситуации случай $x \in \mathbf{M}_j$, который не будет возникать (в силу (3.2)) в процессах вида (3.4). Однако в формальных определениях мы рассматриваем и такие “ненастоящие” ситуации, полагая при $x \in \mathbf{M}_j$, что $\mathrm{A}_j(x, K) \triangleq \mathfrak{M}_j$. Подобные доопределения различных зависимостей, содержательных в каких-то своих ситуациях, применяем, не оговаривая это специально. Имея в виду обслуживание схемы (3.4), постулируем, что $\forall x \in \mathbf{X}\ \ \forall K \in \mathfrak{N}\ \ \forall j \in K$

$$\mathrm{A}_j(x, K) \cap \mathfrak{M}_j \neq \varnothing. \tag{3.7}$$

Мы полагаем, что система условий в (3.4) дополняется требованиями: $\big(x_{1,1} \in \mathrm{A}_{\alpha(1)}(x^0, \overline{1, N})\big)\&$ $\big(x_{j,1} \in \mathrm{A}_{\alpha(j)}(x_{j-1,2}, \{\alpha(t) : t \in \overline{j, N}\})\ \forall j \in \overline{2, N}\big)$ (здесь α — перестановка $\overline{1, N}$, остальные элементы соответствуют (3.4)). Мы полагаем далее, что и выбор перестановки α стеснен ограничениями в виде условий предшествования.

Полагая также $\mathbb{X} \triangleq \{x^0\} \bigcup \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathrm{M}_i\Big)$, получаем, что $\mathbb{X} \in \mathrm{Fin}(X)$ и $\mathbf{X} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{X})$. Как видно из (3.4), траектория реализуется в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$; начальное состояние x^0 в этой связи уместно заменить УП (x^0, x^0). Решение, доступное выбору исследователя, является УП “маршрут-трасса”, где термин “маршрут” используется для перестановок в $\overline{1, N}$. Каждому такому решению сопоставляем значение аддитивного критерия, для которого функции стоимости, его составляющие, могут зависеть от списка заданий. Минимизация данного критерия и будет составлять ОЗМ.

4. Постановка задачи: основные объекты и их свойства

В настоящем разделе содержательные рассуждения, связанные с построением процессов типа (3.4), должным образом формализуются, что требует сначала введения на строгом уровне маршрутов и трасс (траекторий). Полагаем $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1, N}]$; элементы $\mathbb{P}$ называем (полными) маршрутами. Каждому маршруту сопоставляем пучок траекторий (трасс). Полагая, что $\mathbb{Z}$ есть множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbb{X}\times\mathbf{X}$, введем при $\alpha\in\mathbb{P}$ следующее множество:

$$\mathcal{Z}_\alpha \triangleq \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z} \big| \big(z_0 = (x^0, x^0)\big) \,\&\, \big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t\in\overline{1,N}\big)$$

$$\&\, \big(\mathrm{pr}_1(z_s) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \{\alpha(t) : t\in\overline{s,N}\}) \quad \forall s\in\overline{1,N}\big)\Big\}. \tag{4.1}$$

Ниже мы убедимся в том, что (4.1) — непустое множество. Заметим только, что определение (4.1) можно включить в более общее. При $K\in\mathfrak{N}$ полагаем, что $\mathbb{Z}_K$ есть множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \to \mathbb{X}\times\mathbf{X}$. Если $x\in\mathbf{X}$, $K\in\mathfrak{N}$ и $\alpha\in(\mathrm{bi})[K]$, то

$$\mathcal{Z}(x,K,\alpha) \triangleq \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K \big| \big(z_0 = (x,x)\big) \,\&\, \big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t\in\overline{1,|K|}\big)$$

$$\&\big(\mathrm{pr}_1(z_s) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \{\alpha(t) : t\in\overline{s,|K|}\}) \quad \forall s\in\overline{1,|K|}\big)\Big\}. \tag{4.2}$$

С учетом того что $\overline{1,N}\in\mathfrak{N}$ и $x^0\in\mathbf{X}$, получаем $\mathcal{Z}(x^0,\overline{1,N},\alpha) = \mathcal{Z}_\alpha \quad \forall\alpha\in\mathbb{P}$ (полезно учесть что $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\overline{1,N}}$). Полагаем $\mathfrak{N}_s \triangleq \{K\in\mathfrak{N} | s = |K|\} \quad \forall s\in\overline{1,N}$.

Предложение 1. *Каждое из множеств* (4.2) *непусто.*

Схема д о к а з а т е л ь с т в а. Непосредственно из (3.7) и (4.2) очевидным образом следует, что $\mathcal{Z}(x,K,\alpha)\neq\varnothing \quad \forall x\in\mathbf{X} \quad \forall K\in\mathfrak{N}_1 \quad \forall\alpha\in(\mathrm{bi})[K]$. Введем в рассмотрение

$$\mathrm{S} \triangleq \{s\in\overline{1,N} | \mathcal{Z}(x,K,\alpha)\neq\varnothing \quad \forall x\in\mathbf{X} \quad \forall K\in\mathfrak{N}_s \quad \forall\alpha\in(\mathrm{bi})[K]\}. \tag{4.3}$$

При этом $1\in\mathrm{S}$ и, стало быть, $\mathrm{S}\in\mathfrak{N}$. Для доказательства равенства $\mathrm{S} = \overline{1,N}$ допустим противное: $\mathrm{S}\neq\overline{1,N}$, а тогда $\overline{1,N}\setminus\mathrm{S}\neq\varnothing$ и определено

$$r \triangleq \inf(\overline{1,N}\setminus\mathrm{S}) \in \overline{1,N}\setminus\mathrm{S}. \tag{4.4}$$

Легко видеть, что $r\in\overline{2,N}$, при этом $r-1\in\mathrm{S}$ и, стало быть, согласно (4.3)

$$\mathcal{Z}(x,K,\alpha)\neq\varnothing \quad \forall x\in\mathbf{X} \quad \forall K\in\mathfrak{N}_{r-1} \quad \forall\alpha\in(\mathrm{bi})[K]. \tag{4.5}$$

Вместе с тем из (4.4) следует, что для некоторых $x_*\in\mathbf{X}$, $K_*\in\mathfrak{N}_r$ и $\alpha_*\in(\mathrm{bi})[K_*]$ имеет место $\mathcal{Z}(x_*,K_*,\alpha_*) = \varnothing$. При этом $r = |K_*|$, а α_* отображает $\overline{1,r}$ на K_*. Согласно (3.7) $\mathrm{A}_{\alpha_*(1)}(x_*,K_*)\cap\mathfrak{M}_{\alpha_*(1)} \neq\varnothing$. С учетом этого выбираем $x^*\in\mathrm{A}_{\alpha_*(1)}(x_*,K_*)\cap\mathfrak{M}_{\alpha_*(1)}$. В силу (3.5) можно указать $\tilde{z}^*\in\mathbb{M}_{\alpha_*(1)}$, для которого $x^* = \mathrm{pr}_1(\tilde{z}^*)$. Тогда $\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*)\in\mathbf{M}_{\alpha_*(1)}$, и в частности $\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*)\in\mathbf{X}$; при этом $\alpha^* \triangleq (\alpha_*(j+1))_{j\in\overline{1,r-1}} \in(\mathrm{bi})[K^*]$, где $K^*\triangleq K_*\setminus\{\alpha_*(1)\}$. В силу (4.5) $\mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*),K^*,\alpha^*)\neq\varnothing$. С учетом этого выбираем $(z_i^*)_{i\in\overline{0,r-1}}\in\mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*),K^*,\alpha^*)$, после чего введем кортеж $(\hat{z}_i)_{i\in\overline{0,r}} : \overline{0,r}\to\mathbb{X}\times\mathbf{X}$ по следующему правилу: $(\hat{z}_0 \triangleq (x_*,x_*))\,\&\,(\hat{z}_1\triangleq \tilde{z}^*)\,\&\,(\hat{z}_t\triangleq z^*_{t-1} \quad \forall t\in\overline{2,r})$. Легко видеть, что $(\hat{z}_i)_{i\in\overline{0,r}}\in\mathcal{Z}(x_*,K_*,\alpha_*)$, но это невозможно по выбору x_*, K_* и α_*. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathrm{S} = \overline{1,N}$, а тогда из (4.3) имеем требуемое утверждение, поскольку $\mathfrak{N}$ есть объединение всех множеств $\mathfrak{N}_s$, $s\in\overline{1,N}$. □

В силу конечности множеств $\mathbb{X}$ и $\mathbf{X}$ получаем теперь, что

$$\mathcal{Z}(x,K,\alpha)\in\mathrm{Fin}(\mathbb{Z}_K) \quad \forall x\in\mathbf{X} \quad \forall K\in\mathfrak{N} \quad \forall\alpha\in(\mathrm{bi})[K]. \tag{4.6}$$

Из (4.6) получаем свойство $\mathcal{Z}_\alpha\in\mathrm{Fin}(\mathbb{Z}) \quad \forall\alpha\in\mathbb{P}$.

Условия предшествования. Введем в рассмотрение (возможное) ограничение на выбор маршрута, фиксируя в дальнейшем отношение

$$\mathbf{K}\in\mathcal{P}(\overline{1,N}\times\overline{1,N})$$

(итак, $\mathbf{K}$ есть п/м $\overline{1,N}\times\overline{1,N}$; случай $\mathbf{K}=\varnothing$ не исключается и отвечает ситуации отсутствия дополнительных ограничений на выбор $\alpha\in\mathbb{P}$, см. (3.4)). Элементы $\mathbf{K}$ называем адресными УП; если $z\in\mathbf{K}$, то $\mathrm{pr}_1(z)\in\overline{1,N}$ и $\mathrm{pr}_2(z)\in\overline{1,N}$ именуем соответственно индексами отправителя и получателя z. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\forall\mathbf{K}_0\in\mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \ \exists z_0\in\mathbf{K}_0:\mathrm{pr}_1(z_0)\neq\mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall z\in\mathbf{K_0}. \tag{4.7}$$

Тогда, как установлено в [11, ч. 2], имеем

$$\mathbf{A}\overset{\triangle}{=}\big\{\alpha\in\mathbb{P}\,|\,\alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z))<\alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \ \forall z\in\mathbf{K}\big\}$$

$$=\Big\{\alpha\in\mathbb{P}|\forall z\in\mathbf{K}\ \ \forall t_1\in\overline{1,N}\ \ \forall t_2\in\overline{1,N}\big((\mathrm{pr}_1(z)=\alpha(t_1))\wedge(\mathrm{pr}_2(z)=\alpha(t_2))\big)\Rightarrow(t_1<t_2)\Big\}\in\mathcal{P}'(\mathbb{P}); \tag{4.8}$$

итак, $\mathbf{A}$ есть непустое множество всех $\mathbf{K}$-допустимых (допустимых по предшествованию) маршрутов. В этом случае (см. (4.8))

$$\mathbf{D}\overset{\triangle}{=}\{(\alpha,\mathbf{z})\in\mathbf{A}\times\mathbb{Z}|\mathbf{z}\in\mathcal{Z}_\alpha\}\in\mathrm{Fin}(\mathbf{A}\times\mathbb{Z}) \tag{4.9}$$

рассматриваем в качестве множества ДР, каждому из которых будет сопоставлено значение (аддитивного) критерия качества; для этого потребуется определить функции стоимости, характеризующие внешние перемещения, внутренние (по отношению к мегаполисам) работы и получающиеся при реализации процессов вида (3.4) терминальные состояния.

Функции стоимости. Фиксируем в дальнейшем кортеж $(\mathbf{c},c_1,\ldots,c_N,f)$, где

$$\mathbf{c}\in\mathcal{R}_+[\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}],c_1\in\mathcal{R}_+[\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}],\ldots,c_N\in\mathcal{R}_+[\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}],f\in\mathcal{R}_+[\mathbb{X}]. \tag{4.10}$$

Функции в (4.10) мы полагаем "максимально" продолженными. Значения этих функций существенны на самом деле при выборе аргументов из п/м областей определения. Так, значения $\mathbf{c}(x,y,K)$ существенны (см.(3.4)): 1) при $x=x^0,\ \ y\in\mathfrak{M}_j,\ \ K\in\mathfrak{N}$, где $j\in K$, и 2) при $x\in\mathbf{M}_i,\ \ y\in\mathfrak{M}_j,\ \ K\in\mathfrak{N}$, где $i\notin K,\ \ j\in K$. В свою очередь, при $s\in\overline{1,N}$ значения $c_s(x,y,K)$ существенны при $(x,y)\in\mathbb{M}_s,\ \ K\in\mathfrak{N}$ и $s\in K$. Наконец, значения $f(x)$ существенны при $x\in\mathbf{M}_j$, где $j\in\overline{1,N}$. Однако мы продолжаем упомянутые содержательные зависимости на $\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}$ и $\mathbb{X}$ соответственно, поскольку это не приводит к затруднениям (можно, в частности, осуществлять продолжение "нулем") и позволяет упростить последующие обозначения.

Отметим, что функция $\mathbf{c}$ используется для оценивания внешних перемещений, функции $c_1,\ldots,c_N$ — для оценивания работ, связанных с посещением соответствующих мегаполисов, а f — для оценивания терминального состояния (точка $x_{N,2}$ в (3.4)). Если $\alpha\in\mathbb{P},\ \ (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha$, то при $s\in\overline{1,N}$ $\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}),\mathrm{pr}_1(z_s),\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\})\in[0,\infty[$ оценивает перемещения из $\mathrm{pr}_2(z_{s-1})\in\mathbf{M}_{\alpha(s-1)}$ в $\mathrm{pr}_1(z_s)\in\mathfrak{M}_{\alpha(s)}$, а $c_{\alpha(s)}(z_s,\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\})$ — работу, связанную с посещением $\mathrm{M}_{\alpha(s)}$ (заметим, что $\mathrm{pr}_1(z_s)\in A_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}),\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\})$, см. (4.1)); $f(\mathrm{pr}_2(z_N))$ реализует оценку терминального состояния.

С учетом упомянутых обстоятельств полагаем при $\alpha\in\mathbb{P}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathbb{Z}$

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}]\overset{\triangle}{=}\sum_{s=1}^{N}\Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}),\mathrm{pr}_1(z_s),\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\}\big)+c_{\alpha(s)}\big(z_s,\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\}\big)\Big]$$
$$+f(\mathrm{pr}_2(z_N)). \tag{4.11}$$

Нас интересует следующий вариант (4.11): $\alpha\in\mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha$. Учитывая (4.9), мы в качестве ОЗМ формулируем следующую:

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}]\to\min,\ \ \alpha\in\mathbf{A},\ \ (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha; \tag{4.12}$$

этой задаче сопоставляется значение (экстремум)

$$\mathrm{V} \overset{\triangle}{=} \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \in [0, \infty[\tag{4.13}$$

и непустое множество оптимальных ДР, т. е. ДР $(\alpha^0, (z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbf{D}$ со свойством

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}] = \mathrm{V}. \tag{4.14}$$

Мы ставим своей целью нахождение V и какого-либо ДР со свойством (4.14).

5. Динамическое программирование, 1

Для последующего решения ОЗМ (4.12) будем применять широко понимаемое ДП, которое использует схему расширения, восходящую к [11, ч.3]. Следуя [11, §2.2], введем оператор $\mathbf{I}$, действующий в $\mathfrak{N}$ по правилу: если $K \in \mathfrak{N}$, то $\mathbf{I}(K) \overset{\triangle}{=} K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \Xi[K]\}$, где $\Xi[K] \overset{\triangle}{=} \{z \in \mathbf{K} | \big(\mathrm{pr}_1(z) \in K\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z) \in K\big)\}$. С учетом этого вводится [11] новый тип допустимости маршрутов — допустимость по вычеркиванию; данный вариант допустимости введем сразу для маршрутов частичных или укороченных: если $K \in \mathfrak{N}$, то

$$(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \overset{\triangle}{=} \big\{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] |\, \alpha(l) \in \mathbf{I}\big(\{\alpha(t)\colon t \in \overline{l, |K|}\}\big) \;\; \forall l \in \overline{1, |K|}\big\} \tag{5.1}$$

есть множество всех маршрутов посещения мегаполисов M_k, $k \in K$, обладающих допустимостью по вычеркиванию; при этом [11, предложения 2.2.2, 2.2.3] $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \neq \varnothing$. Итак,

$$(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\mathbb{K}] \in \mathcal{P}'((\mathrm{bi})[\mathbb{K}]) \;\; \forall \mathbb{K} \in \mathfrak{N}. \tag{5.2}$$

В частности [11, (2.2.32), теорема 2.2.1], имеем следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1, N}] = \big\{\alpha \in \mathbb{P} |\, \alpha(k) \in \mathbf{I}\big(\{\alpha(t)\colon t \in \overline{k, N}\}\big) \;\; \forall k \in \overline{1, N}\big\}$$

$$= \Big\{\alpha \in \mathbb{P} \,|\big(\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})\big) \,\&\, \big(\alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(t)\colon t \in \overline{1, k-1}\}) \;\; \forall k \in \overline{2, N}\big)\Big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \tag{5.3}$$

С учетом (4.6) и (5.2) получаем, что

$$\mathbf{D}_K(x) \overset{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K \,|\, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)\} \in \mathrm{Fin}((\mathrm{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K) \;\; \forall x \in \mathbf{X} \;\; \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{5.4}$$

В (5.4) имеем непустые множества частичных ДР (имеется в виду допустимость по вычеркиванию). Если $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_K$, то

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha(\mathbf{z}|K) \overset{\triangle}{=} \sum_{s=1}^{|K|} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(s-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s)), \{\alpha(t)\colon t \in \overline{s, |K|}\}\big) + c_{\alpha(s)}\big(\mathbf{z}(s), \{\alpha(t)\colon t \in \overline{s, |K|}\}\big)\Big]$$
$$+ f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(|K|))) \in [0, \infty[; \tag{5.5}$$

для нас (5.5) существенно при $(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_K(x)$. В этой связи определяем частичные (укороченные) задачи: если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то в виде

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha(\mathbf{z}|K) \to \min, \quad \alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K], \quad \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha), \tag{5.6}$$

имеем задачу, ограничения которой совместны (см. (5.4)) и для которой определено значение

$$v(x, K) \overset{\triangle}{=} \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]} \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha(\mathbf{z}|K) \in [0, \infty[, \tag{5.7}$$

а множество оптимальных ДР непусто. Легко видеть. что $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\overline{1,N}}$ и при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ имеет место $\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] = \hat{\mathfrak{C}}_\alpha(\mathbf{z}|\overline{1,N})$. С учетом этого получаем (см. (5.3),(5.7)) равенство

$$v(x^0, \overline{1,N}) = \mathrm{V}. \tag{5.8}$$

Полагаем, что $v(x, \varnothing) \overset{\triangle}{=} f(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$. Итак (см. (5.7),(5.8)), определена функция Беллмана

$$v : \mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N}) \to [0, \infty[, \tag{5.9}$$

отвечающая расширению ОЗМ до семейства задач (5.6). Введем операторы $\mathbb{A}_1 : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(\mathbb{M}_1), \ldots, \mathbb{A}_N : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(\mathbb{M}_N)$, являющиеся естественными модификациями отображений (3.6) : если $j \in \overline{1,N}, \quad x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем

$$\mathbb{A}_j(x, K) \overset{\triangle}{=} \{z \in \mathbb{M}_j \,|\, \mathrm{pr}_1(z) \in \mathrm{A}_j(x, K)\}. \tag{5.10}$$

Тогда из (3.5), (3.7) и (5.10) получаем, что $\forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N} \quad \forall j \in K$

$$\mathbb{A}_j(x, K) \in \mathcal{P}'(\mathbb{M}_j).$$

При этом, конечно, имеем $\mathbb{A}_j(x, K) \subset \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ при $x \in \mathbf{X}, \quad K \in \mathfrak{N}$ и $j \in K$, а потому определены значения $v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in [0, \infty[, \quad z \in \mathbb{A}_j(x, K)$; полезно учесть, что $\mathbf{I}(K) \subset K$.

Теорема 1. *Если* $x \in \mathbf{X}$ *и* $K \in \mathfrak{N}$, *то*

$$v(x, K) \overset{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} \big[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$; тогда определено значение

$$w \overset{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} \big[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big]. \tag{5.11}$$

Заметим также, что определено число $n \overset{\triangle}{=} |K| \in \overline{1,N}$, для которого $(n = 1) \vee (n \in \overline{2,N})$. В случае $n = 1$ равенство $v(x, K) = w$ легко следует из определений; рассмотрение данного простого случая опустим. Пусть $n \in \overline{2,N}$. Тогда $n - 1 \in \overline{1, N-1}$. Выберем, используя (5.7), $\alpha^0 \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ и $(z_i^0)_{i \in \overline{0,n}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha^0)$ со свойством

$$v(x, K) = \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha^0}((z_i^0)_{i \in \overline{0,n}}|K), \tag{5.12}$$

где правая часть (5.12) определяется подобно (5.5). Из (5.1) следует, в частности, что $\alpha^0(1) \in \mathbf{I}(K)$, а из (4.2) вытекает включение $\mathrm{pr}_1(z_1^0) \in A_{\alpha^0(1)}(x, K)$. Тогда в силу (5.11)

$$w \le \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z_1^0), K) + c_{\alpha^0(1)}(z_1^0, K) + v(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}), \tag{5.13}$$

где $\mathbb{K} \overset{\triangle}{=} K \setminus \{\alpha^0(1)\}$ (тогда $|\mathbb{K}| = n-1$). Заметим также, что $(\mathrm{pr}_2(z_1^0) \in \mathbf{X}) \,\&\, (\mathbb{K} \in \mathfrak{N})$, а потому для определения $v(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K})$ можно использовать (5.7). Легко видеть (см. [15]), что

$$\alpha_0 \overset{\triangle}{=} (\alpha^0(j+1))_{j \in \overline{1,n-1}} \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\mathbb{K}]. \tag{5.14}$$

Заметим, что $(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathrm{pr}_2(z_1^0))$ содержится в $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$, и в частности в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Введем кортеж $(z_i^{00})_{i \in \overline{0,n-1}} : \overline{0, n-1} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ по следующему правилу: $z_0^{00} \overset{\triangle}{=} (\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathrm{pr}_2(z_1^0))$ и $z_j^{00} \overset{\triangle}{=} z_{j+1}^0 \quad \forall j \in \overline{1, n-1}$. Тогда, как легко видеть,

$$(z_i^{00})_{i \in \overline{0,n-1}} \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}, \alpha_0). \tag{5.15}$$

Из (5.14) и (5.15) следует сразу (см. (5.7)), что $v(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}) \leq \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}((z_i^{00})_{i\in\overline{0,n-1}} \,|\, \mathbb{K})$. После несложных преобразований правой части получаем, что

$$v(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}) \leq \sum_{s=2}^{n} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}^0), \mathrm{pr}_1(z_s^0), \{\alpha^0(l) : l \in \overline{s,n}\}\big) + c_{\alpha^0(s)}\big(z_s^0, \{\alpha^0(l) : l \in \overline{s,n}\}\big)\Big]$$

$$+ f(\mathrm{pr}_2(z_n^0)),$$

а тогда, используя (5.12) и (5.13), приходим к неравенству $w \leq v(x, K)$.

Установим справедливость противоположного неравенства. С учетом (5.11) выберем $q \in \mathbf{I}(K)$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{A}_q(x, K)$ так, что

$$w = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{y}), K) + c_q(\mathbf{y}, K) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q), \tag{5.16}$$

где $Q \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{q\}$ (разумеется, $Q \in \mathfrak{N}_{n-1}$, т. е. $Q \in \mathfrak{N}$ и $|Q| = n-1$). Тогда, в частности, $\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}) \in \mathbf{X}$ и $v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q) \in [0, \infty[$ определяется подобно (5.7). С учетом этого выберем $\bar{\alpha} \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[Q]$ и $(\bar{z}_i)_{i\in\overline{0,n-1}} \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q, \bar{\alpha})$ так, что

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q) = \hat{\mathfrak{C}}_{\bar{\alpha}}((\bar{z}_i)_{i\in\overline{0,n-1}} \,|\, Q). \tag{5.17}$$

Введем отображение $\bar{\beta} : \overline{1,n} \to K$ по следующему правилу: $\big(\bar{\beta}(1) \stackrel{\triangle}{=} q\big) \,\&\, \big(\bar{\beta}(j) \stackrel{\triangle}{=} \bar{\alpha}(j-1) \;\; \forall j \in \overline{2,n}\big)$. Легко видеть, что $\bar{\beta} \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$. Далее, кортеж $(\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathbb{Z}_K$ определяем условиями $(\bar{z}_0^* \stackrel{\triangle}{=} (x, x)) \,\&\, (\bar{z}_1^* \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{y}) \,\&\, (\bar{z}_j^* \stackrel{\triangle}{=} \bar{z}_{j-1} \; \forall j \in \overline{2,n})$. Тогда с учетом (4.2) устанавливается, что $(\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathcal{Z}(x, K, \bar{\beta})$. Получили (см. (5.4)) свойство $(\bar{\beta}, (\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}}) \in \mathbf{D}_K(x)$. Как следствие имеем из (5.4) и (5.7), что

$$v(x, K) \leq \hat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \,|\, K). \tag{5.18}$$

Однако с учетом (5.17) после простых преобразований получаем равенство $\hat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \,|\, K) = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{y}), K) + c_q(\mathbf{y}, K) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q)$. С учетом (5.16) имеем теперь равенство

$$\hat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \,|\, K) = w,$$

а тогда из (5.18) следует, что $v(x, K) \leq w$. Поскольку ранее было получено противоположное неравенство, имеем $v(x, K) = w$ и в случае $n \in \overline{2, N}$. □

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{V} = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \; \min_{z\in\mathbb{A}_j(x^0,\overline{1,N})} \big[\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\big].$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (5.8) и теоремы 1.

6. Динамическое программирование, 2

В настоящем разделе рассматривается вариант использования теоремы 1, не предусматривающий построение всего массива значений функции Беллмана (5.9); вариант соответствует конструкции [11, § 4.9] (см. также [12; 13]). Введем семейство

$$\mathcal{G} \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} \,|\, \forall z \in \mathbf{K} \;\; (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}, \tag{6.1}$$

элементы которого называем существенными списками. Списки из (6.1) ранжируем по мощности: $\mathcal{G}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathcal{G} | \, s = |K|\} \;\; \forall s \in \overline{1,N}$. Тогда в виде $\{\mathcal{G}_j : j \in \overline{1,N}\}$ имеем разбиение $\mathcal{G}$ (6.1). Ясно, что $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ (синглетон, содержащий $\overline{1,N}$). При $\mathbf{K}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$

$\mathcal{G}_1 = \{\{t\}\colon t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}$. Наконец, имеем следующее представление [12, (6.2)]: $\mathcal{G}_{s-1} = \big\{K \setminus \{t\}\colon K \in \mathcal{G}_s,\ t \in \mathbf{I}(K)\big\}\quad \forall s \in \overline{2,N}$. Таким образом, получаем рекуррентную процедуру $\mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_{N-1} \to \ldots \to \mathcal{G}_1$. На этой основе конструируем подобно [11, § 4.9] слои пространства позиций, обозначаемые ниже через $\mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_N$. Однако предварительно заметим, что [12, с. 69] $\overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1 \neq \varnothing$, а потому

$$\tilde{\mathfrak{M}} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$$

и, как следствие, $\mathrm{D}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{(x, \varnothing)\colon x \in \tilde{\mathfrak{M}}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N}))$. Кроме того, полагаем, что $\mathrm{D}_N \stackrel{\triangle}{=} \{(x^0, \overline{1,N})\}$, получая синглетон, содержащий УП $(x^0, \overline{1,N})$.

Если $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то [12, с. 69] в терминах множества

$$\mathcal{J}_s(K) \stackrel{\triangle}{=} \big\{j \in \overline{1,N} \setminus K \,|\, \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\big\} \in \mathcal{P}'(\overline{1,N} \setminus K) \tag{6.2}$$

конструируем следующее множество-объединение: $\mathcal{M}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathbf{M}_j \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$, а также клетку $\mathbb{D}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \{(x, K):\ x \in \mathcal{M}_s[K]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s)$. Тогда

$$\mathrm{D}_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s)\quad \forall s \in \overline{1, N-1}. \tag{6.3}$$

Отметим, кстати, что [14, предложение 5.1] при $s \in \overline{1,N-1}$

$$\mathcal{G}_{s+1} = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \{\{j\} \cup K : j \in \mathcal{J}_s(K)\}.$$

Итак (см. (6.3)), определены непустые множества-слои $\mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_N$. При этом [12, (6.9)]

$$(y, K \setminus \{k\}) \in \mathrm{D}_{s-1}\quad \forall s \in \overline{1,N}\quad \forall K \in \mathcal{G}_s\quad \forall k \in \mathbf{I}(K)\quad \forall y \in \mathbf{M}_k. \tag{6.4}$$

В свою очередь, из (6.4) легко следует

Предложение 2. *Если* $s \in \overline{1,N}$, $\ (x, K) \in \mathrm{D}_s$, $\ j \in \mathbf{I}(K)$ *и* $z \in \mathbb{A}_j(x, K)$, *то*

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathrm{D}_{s-1}.$$

Возвращаясь к конструированию множеств-слоев, заметим, что $\mathrm{D}_s \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N}))\quad \forall s \in \overline{0,N}$. С учетом этого определяем систему сужений функции Беллмана, полагая при $s \in \overline{0,N}$, что функция $v_s \in \mathcal{R}_+\,[\mathrm{D}_s]$ определяется условиями

$$v_s(x, K) \stackrel{\triangle}{=} v(x, K)\quad \forall (x, K) \in \mathrm{D}_s. \tag{6.5}$$

При этом, конечно, функция $v_0 \in \mathcal{R}_+\,[\mathrm{D}_0]$ такова, что $v_0(x, \varnothing) = f(x)$ при $x \in \tilde{\mathfrak{M}}$. Далее, при $s \in \overline{1,N}$, $\ (x, K) \in \mathrm{D}_s$, $\ j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{A}_j(x, K)$ в силу предложения 2 и (6.5) определено значение $v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in [0, \infty[$. Теперь из теоремы 1 вытекает

Предложение 3. *Если* $s \in \overline{1,N}$ *и* $(x, K) \in \mathrm{D}_s$, *то*

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})].$$

Таким образом, мы получили рекуррентную процедуру построения слоев функции Беллмана:

$$v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N; \tag{6.6}$$

действительно, функция v_0 известна и при $s \in \overline{1,N}$ преобразование v_{s-1} в v_s определяется предложением 3. В силу (5.8) и (6.5) $\mathrm{V} = v_N(x^0, \overline{1,N})$. Итак, процедура (6.6) доставляет в непосредственном виде глобальный экстремум задачи (4.12), т. е. значение ОЗМ.

7. Динамическое программирование, 3 (построение оптимального решения)

В настоящем разделе предполагается, что (посредством (6.6)) все слои функции Беллмана уже построены, т. е. функции $v_0, v_1, \ldots v_N$ нам известны. В частности, известно значение V, для которого в силу предложения 3 и следствия имеем равенство

$$\mathrm{V} = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})}\ \min_{z\in\mathbb{A}_j(x^0,\overline{1,N})}\big[\mathbf{c}(x^0,\mathrm{pr}_1(z),\overline{1,N}) + c_j(z,\overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{j\})\big]. \tag{7.1}$$

Рассмотрим построение оптимального решения в виде пары “маршрут-трасса”. Полагаем $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0)$, получая элемент $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$. Далее используем (7.1), учитывая предложение 2:

$$(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{j\}) \in \mathrm{D}_{N-1}\quad \forall j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})\quad \forall z\in\mathbb{A}_j(x^0,\overline{1,N}). \tag{7.2}$$

Выберем (см. (7.1)) $\mathbf{j}_1\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)}\in\mathbb{A}_{\mathbf{j}_1}(x^0,\overline{1,N})$ так, что при этом

$$\mathrm{V} = \mathbf{c}(x^0,\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)},\overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}), \tag{7.3}$$

где согласно (7.2) $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})\in\mathrm{D}_{N-1}$. Тогда с учетом предложения 2

$$(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1;j\}) = (\mathrm{pr}_2(z),(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})\setminus\{j\})\in\mathrm{D}_{N-2}$$
$$\forall j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})\quad \forall z\in\mathbb{A}_j(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}). \tag{7.4}$$

В силу предложения 3 имеем следующее равенство:

$$v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}) = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})}\ \min_{z\in\mathbb{A}_j(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})}\Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\mathrm{pr}_1(z),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big)$$
$$+ c_j\big(z,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big) + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1;j\}\big)\Big]. \tag{7.5}$$

С учетом (7.5) выбираем $\mathbf{j}_2\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)}\in\mathbb{A}_{\mathbf{j}_2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})$ так, что при этом

$$v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big) = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big) + c_{\mathbf{j}_2}\big(\mathbf{z}^{(2)},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big)$$
$$+v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1;\mathbf{j}_2\}\big), \tag{7.6}$$

где согласно (7.4) $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1;\mathbf{j}_2\}\big)\in\mathrm{D}_{N-2}$. Из (7.3) и (7.6) вытекает, что

$$\mathrm{V} = \sum_{s=1}^{2}\Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(s-1)}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(s)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_t : t\in\overline{1,s-1}\}\big) + c_{\mathbf{j}_s}\big(\mathbf{z}^{(s)},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_t : t\in\overline{1,s-1}\}\big)\Big]$$
$$+ v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_l : l\in\overline{1,2}\}\big) \tag{7.7}$$

(напомним, что $\overline{1,0} = \varnothing$). Дальнейшее построение осуществляется по аналогичной схеме, на каждом этапе которой следует осуществлять выбор индекса и УП подобно (7.3), (7.6). При этом число слагаемых, образующих первую сумму в (7.7), будет увеличиваться, а мощность списка, являющегося вторым элементом УП в виде аргумента последнего слагаемого, — уменьшаться; в конце концов последнее слагаемое в (7.7) совпадет с соответствующим значением функции f (напомним определение v_0). В результате после исполнения N шагов (этапов), реализуемых в духе (7.3), (7.6), будут построены маршрут $\eta = (\mathbf{j}_s)_{s\in\overline{1,N}}\in\mathbf{A}$ и трасса $(\mathbf{z}^{(s)})_{s\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\eta$ (итак, мы получим ДР $(\eta,(\mathbf{z}^{(s)})_{s\in\overline{0,N}})$) со свойством $\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(s)})_{s\in\overline{0,N}}] = \mathrm{V}$. Иными словами, $(\eta,(\mathbf{z}^{(s)})_{s\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}$ (см. (4.9)) обладает оптимальностью в задаче (4.12).

8. Вычислительный эксперимент

В настоящем разделе рассматривается конкретизация задачи (4.12), ориентированная на построение процедур управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ. Для вычислительного эксперимента используем следующую модель упомянутой задачи. Будем отождествлять X с прямоугольником на плоскости, когда $X \overset{\triangle}{=} [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ ($a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in \mathbb{R}$ и $b_2 \in \mathbb{R}$), т. е. с листом, подлежащим раскрою; зафиксируем вещественные числа a_1, a_2, b_1 и b_2, полагая $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$. Пусть N есть количество всех контуров вырезаемых деталей, а мегаполисы (3.1) получаются посредством дискретизации вспомогательных эквидистант; с ними связаны бинарные отношения вида (3.3), для элементов которых всегда 1-й элемент пары является точкой врезки, а 2-й — точкой выключения резака; обе точки расположены возле основной эквидистанты, по которой движется инструмент при резке соответствующего контура. Начальная точка x^0 пусть соответствует исходному положению резака, которое он должен занимать, если не выполняется раскрой листа; терминальному состоянию процесса резки в нашей модели соответствует возврат в x^0. Условия предшествования задают вполне естественное правило: резка внутренних контуров всегда должна предшествовать резке внешних (по принципу вложенности) контуров; допускается расположение одних деталей внутри контуров других деталей, пересечение эквидистант контуров не допускается. Отображения (3.6) заданы следующим образом: пусть K — множество индексов невырезанных контуров; находясь в точке x, где $(x = x^0) \vee \big(x \in \mathbf{M}_j \ \text{ при } j \notin K\big)$ (см. (3.5)), рассматриваем в качестве следующей точки врезки (точки включения инструмента) y лишь те, у которых для всех контуров с индексами j из множества $\overline{1, N} \setminus K$ выполняется условие $\rho(y, z) > \varepsilon \ \forall j \in \overline{1, N} \setminus K \ \ \forall z \in \mathfrak{M}_j$. Здесь ρ — евклидово расстояние, а вещественное число $\varepsilon > 0$ задает тепловой допуск, определяющий минимальный отступ для начала резки возле эквидистант уже вырезанных контуров. Пусть функция $\mathbf{c}$ в (4.10) задается посредством евклидова расстояния ρ и не зависит от списка заданий, при этом значения функций $c_1, \ldots, c_N$ — это всякий раз сумма вида $3 * \rho(x, y) + \rho(y, z)$, где x — точка включения резака, z — точка на вспомогательной эквидистанте, а y — точка на основной эквидистанте; умножение на коэффициент 3 подчеркивает бóльшие затраты на врезку и движение с включенным режущим инструментом по сравнению с затратами при отводе резака в точку выключения. При этом $(x, z) \in \mathbb{M}_j$ и $y = y_j(x, z)$, где $j \in \overline{1, N}$. Расстояния, проходимые при самой резке по эквидистантам, не учитываются, так как их сумма остается одной и той же при любых вариантах маршрутизации. Функция f оценивает затраты на передвижение в исходное положения, т. е. в точку x^0.

Рассматриваемый в настоящей статье алгоритм применительно к вышеупомянутой упрощенной модели задачи был реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++ и работающей под управлением 64-разрядной операционной системы семейства Windows (не ранее Windows 7). Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Исходные данные для программы задаются в конфигурационном файле, в котором также в качестве параметра можно задавать вышеупомянутую величину теплового допуска. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления траектории движения резака, увеличения отдельных участков графика и сохранения его в файл графического формата bmp.

Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 гБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1. В качестве модельного примера представим результат проведения вычислительного эксперимента. Пусть начальная точка x^0 совпадает с началом координат, $N = 31$, $|\mathbf{K}| = 20$.

В настоящем варианте предполагается, что в случае, когда на этапе внешнего перемещения (в мегаполис) нет ни одной допустимой в упомянутом выше смысле точки врезки, значение соответствующего оператора A_j отождествляется с $\mathfrak{M}_j$. Этим обеспечивается выполнение условия (3.7). Рассмотрим результаты работы программы при значении теплового допуска $\varepsilon = 5$: величина совокупных затрат $V = 939.05$, время счета составило 3 ч, 21 мин, 5 с; график марш-

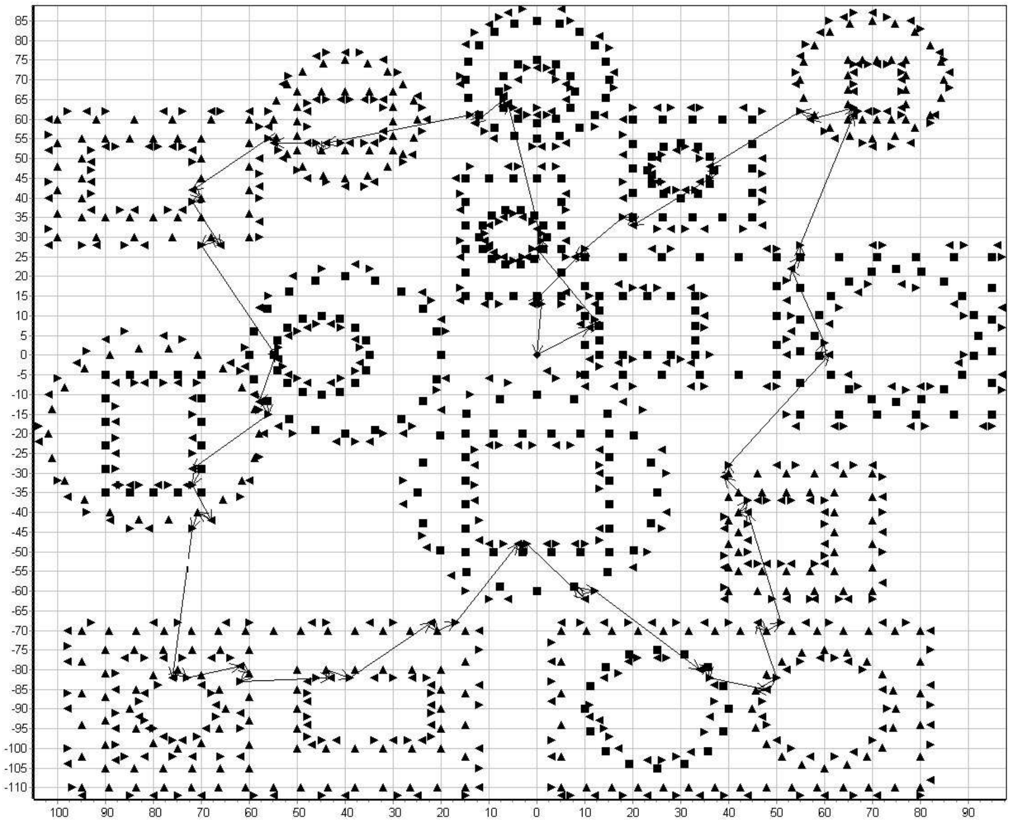

Рис. 1. Маршрут и трасса при значении теплового допуска 5.

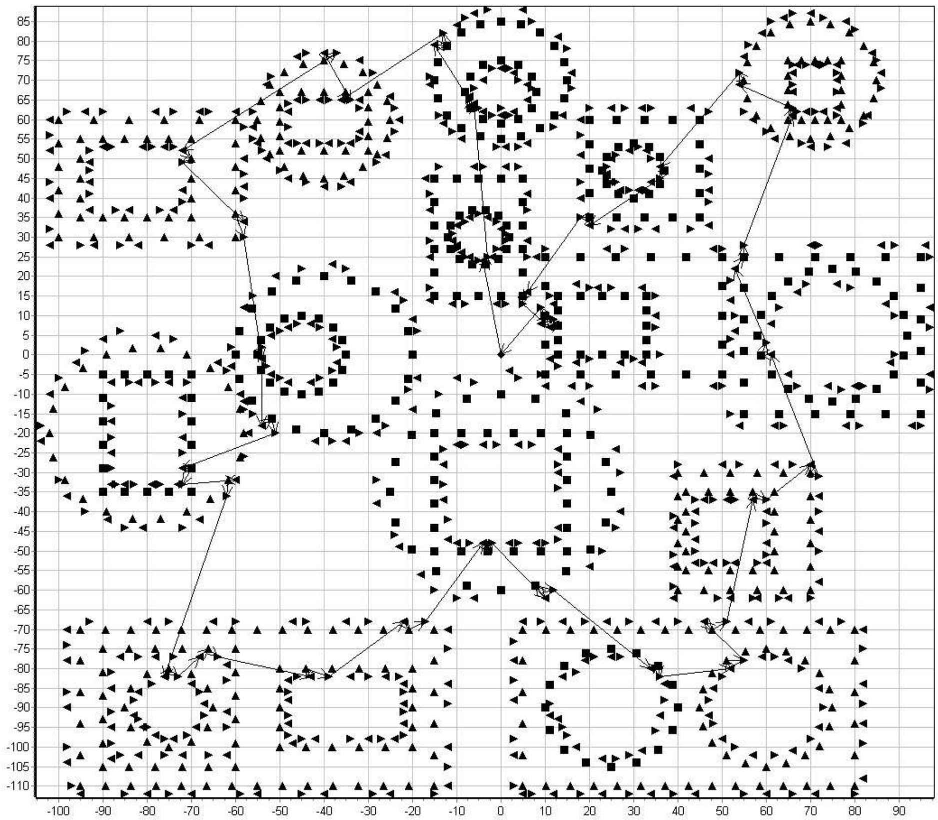

Рис. 2. Маршрут и трасса при значении теплового допуска 10.

рута и трассы приведен на рис. 1 (точки врезки обозначены треугольниками, направленными влево $\lhd$, а точки выключения — треугольниками, направленными вправо $\rhd$; треугольники, ориентированные вертикально, соответствуют точкам на основной эквидистанте, они используются всякий раз в качестве пунктов начала и завершения реза). При значении теплового допуска $\varepsilon = 10$ получаем следующее: величина совокупных затрат $V = 1015.3$, время счета — 3 ч, 0 мин, 7 сек; график траектории резки приведен на рис. 2. Сопоставляя приведенные результаты, мы видим, что с ростом значения теплового допуска увеличивается величина совокупных затрат, но уменьшается время счета. Данный эффект выглядит вполне логично: при меньшем значении допуска для выбора очередной точки врезки всякий раз имеется больше вариантов, что благотворно сказывается на общей величине затрат, но при этом объем перебора также возрастает, что влечет за собой увеличение времени счета. Результаты предыдущих разделов были анонсированы в[16].

9. Добавление: модель задачи оптимизации холостого хода

В настоящем разделе рассматривается упрощенная модель, ориентированная на задачу оптимизации холостого хода инструмента машин термической резки материала с ЧПУ. В последующих построениях мы в отношении X, x^0, N, $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_N$ сохраняем предположения (3.1), (3.2). Что касается отношений (3.3), то полагаем каждое из них диагональным: $\mathbb{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{(x, x) : x \in \mathrm{M}_j\} \quad \forall j \in \overline{1, N}$. В такой ситуации схема (3.4) превращается в следующую:

$$x^0 \to \bigl(x^{(1)} \in \mathrm{M}_{\alpha(1)}\bigr) \to \ldots \to \bigl(x^{(N)} \in \mathrm{M}_{\alpha(N)}\bigr); \tag{9.1}$$

при этом посещение каждого из мегаполисов в силу упомянутой диагональной структуры отношений (3.3) сводится к посещению всего одной точки.

В содержательной задаче, связанной с маршрутизацией при листовой резке на машинах с ЧПУ, упомянутое соглашение о диагональности отношений (3.3) может иметь следующий смысл. Именно полагаем, что всякий раз точка врезки, соответствующая ей точка выключения инструмента, а также точка начала реза на эквидистанте контура очень близки, а потому мы рассматриваем их как одну точку. Полагаем, что таких "укрупненных" точек конечное число (подобно тому, как в модели на основе (3.4) предполагалось конечным число пар "точка врезки-точка выключения инструмента"), что связано с желанием обеспечить принципиальную возможность решения с применением переборных алгоритмов. Данная упрощенная модель на основе (9.1) может использоваться для целей оптимизации холостого хода инструмента. При наших предположениях в (3.5) $\mathfrak{M}_j = \mathbf{M}_j = \mathrm{M}_j \quad \forall j \in \overline{1, N}$. Как следствие

$$\mathbf{X} = \mathbb{X} = \{x^0\} \bigcup \Bigl(\bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{M}_i\Bigr). \tag{9.2}$$

Мы сохраняем м/ф (3.6) и используем интерпретацию этих м/ф, приведенную в разд. 3, имея в виду, что наши "укрупненные" точки — города мегаполисов — соответствуют на самом деле идеализации реальной процедуры, включающей, в частности, врезку, которая, как и в более сложном случае (см. разд. 1), должна осуществляться в удалении от "пустот", возникших после резки предшествующих контуров.

Через $\mathfrak{X}$ обозначим множество всех кортежей $(x_i)_{i \in \overline{0, N}} : \ \overline{0, N} \to \mathbb{X}$. Условие (3.7) в рассматриваемой модели принимает следующий вид: $\mathrm{A}_j(x, K) \cap \mathrm{M}_j \neq \varnothing \quad \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N} \ \ \forall j \in K$. С учетом этого мы приступаем к модификации (4.1), подобной [11, ч.2] и учитывающей то, что первый и второй элементы УП — значений траекторий из (4.1) — совпадают в силу вышеупомянутой диагональности отношений (3.3). В этой связи сопоставляем $\alpha \in \mathbb{P}$ уже следующее множество:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \bigl\{(x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X} \,|\, (x_0 = x^0) \ \& \ (x_t \in \mathrm{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, N}) \\ \& \ (x_s \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(x_{s-1}, \{\alpha(l) : l \in \overline{s, N}\}) \quad \forall s \in \overline{1, N})\bigr\}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Предложение 4. *Если* $\alpha \in \mathbb{P}$, *то*

$$\mathcal{Z}_\alpha = \big\{ \big((x_t, x_t)\big)_{t \in \overline{0,N}} : \, (x_t)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha \big\}. \tag{9.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Γ множество в правой части (9.4). Покажем, что $\mathcal{Z}_\alpha = \Gamma$. Пусть сначала $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha$. Тогда (см. (9.2)) $\mathbf{z} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Согласно (4.2) в нашем случае $\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t)) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t)) \in \mathrm{M}_{\alpha(t)}$ при $t \in \overline{1,N}$. Кроме того,

$$\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s)) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(s-1)), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,N}\}) \ \ \forall s \in \overline{1,N}. \tag{9.5}$$

При этом $\mathbf{z}(0) = (x^0, x^0)$. Полагаем теперь $\mathbf{x} \overset{\triangle}{=} (\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t)))_{t \in \overline{0,N}}$. Тогда $\mathbf{x}(0) = x^0$. Далее

$$\mathbf{z}(l) = (\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(l)), \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(l))) = (\mathbf{x}(l), \mathbf{x}(l)) \tag{9.6}$$

при $l \in \overline{0,N}$. Заметим, что $\mathbf{x}(k) \in \mathrm{M}_{\alpha(k)}$ при $k \in \overline{1,N}$. Наконец, из (9.5) имеем по определению $\mathbf{x}$, что при $s \in \overline{1,N}$ $\ \mathbf{x}(s) = \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s)) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}\big(\mathbf{x}(s-1), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,N}\}\big)$, поскольку $\mathbf{x}(s-1) = \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s-1)) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(s-1))$. Из (9.3) вытекает, что $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha$. Учитывая (9.6), получаем, что $\mathbf{z} = \big((\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t))\big)_{t \in \overline{0,N}} \in \Gamma$, чем завершается проверка вложения $\mathcal{Z}_\alpha \subset \Gamma$.

Пусть теперь $\mathbf{y} \in \Gamma$. Тогда (см. (9.2)) $\mathbf{y} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. С учетом определения Γ подберем $\mathbf{h} \in \mathcal{X}_\alpha$ так, что при этом

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(t)) \ \ \forall t \in \overline{0,N}. \tag{9.7}$$

Тогда в силу (9.3) $\mathbf{h}(0) = x^0$, а потому $\mathbf{y}(0) = (x^0, x^0)$. Кроме того, при $t \in \overline{1,N}$ имеем, что (см. (9.3)) $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(t)) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}$ при $t \in \overline{1,N}$ (см. соглашение о структуре $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_N$, приведенное в начале раздела). Далее, с учетом (9.3) и (9.7) имеем при $s \in \overline{1,N}$

$$\mathrm{pr}_1(\mathbf{y}(s)) = \mathbf{h}(s) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(\mathbf{h}(s-1), \{\alpha(l) : l \in \overline{s,N}\}),$$

где $\mathbf{h}(s-1) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(s-1))$ согласно (9.7); в итоге $\mathrm{pr}_1(\mathbf{y}(s)) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(s-1)), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,N}\}\big)$. С учетом (4.1) получаем, что $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}_\alpha$. Коль скоро выбор $\mathbf{y}$ был произвольным, установлено, что $\Gamma \subset \mathcal{Z}_\alpha$, а, стало быть, $\mathcal{Z}_\alpha = \Gamma$. $\square$

Мы, сохраняя условие (4.7), будем использовать ниже $\mathbf{A}$ (4.8) и $\mathbf{D}$ (4.9) в конкретизации, отвечающей (9.4). Возвращаясь к (4.10), принимаем следующие соглашения: функции $\mathbf{c}$ и f сохраняем (см. (4.10)), функции $c_1, \ldots, c_N$ полагаем тождественно равными нулю. В этом случае при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$ получаем, что (см. (4.11))

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \mathrm{pr}_1(z_s), \{\alpha(t) : \, t \in \overline{s,N}\}\big) + f(\mathrm{pr}_2(z_N)). \tag{9.8}$$

Для случая (9.8) рассматриваем задачу (4.12). Введем теперь, используя (9.3), величины

$$\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}] \overset{\triangle}{=} \sum_{s=1}^{N} \mathbf{c}\big(x_{s-1}, x_s, \{\alpha(t) : \, t \in \overline{s,N}\}\big) + f(x_N) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P} \ \ \forall (x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha. \tag{9.9}$$

Тогда с учетом (9.4) и (9.8) получаем, в частности, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha$ (см. (9.9))

$$\mathfrak{C}_\alpha[((x_i, x_i))_{i \in \overline{0,N}}] = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{c}\big(x_{s-1}, x_s, \{\alpha(t) : \, t \in \overline{s,N}\}\big) + f(x_N) = \mathfrak{C}^\natural_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}]. \tag{9.10}$$

Из (4.13), (9.4) и (9.10) вытекает, что в рассматриваемом случае $\mathrm{V} = \min\limits_{\alpha \in \mathbf{A}} \ \min\limits_{(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha} \mathfrak{C}^\natural_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}]$. Иными словами, V является значением (экстремумом) задачи

$$\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}] \to \min, \ \ \alpha \in \mathbf{A}, \ \ (x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha. \tag{9.11}$$

Разумеется, оптимальные решения задачи (9.11) существуют. Теорема 1 легко преобразуется (в рассматриваемом сейчас случае диагональных отношений $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_N$) в следующее предложение.

Предложение 5. *Если* $x \in \mathbf{X}$ *и* $K \in \mathfrak{N}$, *то*

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in \mathrm{A}_j(x,K)} [\mathbf{c}(x, y, K) + v(y, K \setminus \{j\})].$$

Напомним (5.8) и то, что $v(x, \varnothing) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbf{X}$. Отметим, что в рассматриваемом случае $\tilde{\mathfrak{M}} = \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathrm{M}_i$. При этом имеем также равенство $\mathrm{D}_0 = \{(x, \varnothing) : x \in \tilde{\mathfrak{M}}\}$; D_N соответствует разд. 6. Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то $\mathcal{J}_s(K)$ определяется в (6.2), а $\mathcal{M}_s[K]$ имеет вид $\mathcal{M}_s[K] = \bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathrm{M}_j \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$; как следствие $\mathbb{D}_s[K]$ преобразуется к виду

$$\mathbb{D}_s[K] = \Big\{(x, K) \colon x \in \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathrm{M}_j\Big\}.$$

Каждое из множеств-слоев $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_{N-1}$ определяется посредством (6.3). При этом (6.4) преобразуется к виду $(y, K \setminus \{k\}) \in \mathrm{D}_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{1,N} \ \ \forall K \in \mathcal{G}_s \ \ \forall k \in \mathbf{I}(K) \ \ \forall y \in \mathrm{M}_k$. В частности, получаем следующее свойство:

$$(y, K \setminus \{k\}) \in \mathrm{D}_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{1,N} \ \ \forall (x, K) \in \mathrm{D}_s \ \ \forall k \in \mathbf{I}(K) \ \ \forall y \in \mathrm{A}_k(x, K). \tag{9.12}$$

Отметим, что функции-сужения $v_0, v_1, \ldots, v_N$ определены в (6.5); при этом

$$v_0(x, \varnothing) = f(x) \ \ \forall x \in \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathrm{M}_i.$$

Наконец, предложение 3 сводится в рассматриваемом случае к следующему положению: если $s \in \overline{1,N}$ и $(x, K) \in \mathrm{D}_s$, то (см. (9.12) и теорему 1)

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in \mathrm{A}_j(x,K)} [\mathbf{c}(x, y, K) + v_{s-1}(y, K \setminus \{j\})]. \tag{9.13}$$

Посредством (9.13) определено (при $s \in \overline{1,N}$) преобразование $v_{s-1} \to v_s$. Мы получили вариант процедуры (6.6), реализующей глобальный экстремум V.

Наметим схему построения оптимального ДР (имеется в виду конкретизация (7.1)–(7.7)); подразумевается оптимальность в задаче (9.11). Полагаем $\mathbf{x}_0 = x^0$. Поскольку согласно (9.13)

$$\mathrm{V} = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{y \in \mathrm{A}_j(x^0, \overline{1,N})} [\mathbf{c}(x^0, y, \overline{1,N}) + v_{N-1}(y, \overline{1,N} \setminus \{j\})],$$

выбираем $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{A}_{\mathbf{i}_1}(x^0, \overline{1,N})$ из условия

$$\mathrm{V} = \mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}). \tag{9.14}$$

Согласно (9.12) имеем (по определению D_N), что $(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in \mathrm{D}_{N-1}$,

$$v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})} \min_{y \in \mathrm{A}_j(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})} \big[\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, y, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$$
$$+ v_{N-2}(y, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; j\})\big] \in [0, \infty[. \tag{9.15}$$

С учетом (9.15) выбираем $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$ и $\mathbf{x}_2 \in \mathrm{A}_{\mathbf{i}_2}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$ так, что при этом

$$v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) + v_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}), \tag{9.16}$$

где согласно (9.12) $(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) \in \mathrm{D}_{N-2}$. Из (9.14) и (9.16) вытекает равенство

$$\mathrm{V} = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) + v_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}). \tag{9.17}$$

Далее процедуру построения ДР следует продолжать подобно (9.14), (9.16). После исполнения N шагов будут определены маршрут $\gamma = (\mathbf{i}_s)_{s \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}$ и трасса $(\mathbf{x}_s)_{s \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\gamma$, для которых $\mathfrak{C}^\natural_\gamma[(\mathbf{x}_s)_{s \in \overline{0,N}}] = \mathrm{V}$, что означает оптимальность ДР $(\gamma, (\mathbf{x}_s)_{s \in \overline{0,N}})$ (при $N = 2$ данное свойство оптимальности следует из (9.17) непосредственно).

10. Вычислительный эксперимент: оптимизация холостого хода

Для проведения вычислительного эксперимента будем использовать упрощенную модель задачи (4.12), рассматриваемую в разд. 9. Обсуждается конкретизация, ориентированная (как и в разд. 8) на инженерную задачу маршрутизации при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ. Пусть число N — количество (замкнутых) контуров, подлежащих резке; мегаполисы (3.1) располагаем возле контура соответствующей детали; в этой модели элемент бинарного отношения вида (3.3) мы рассматриваем как одну точку; точка врезки (она же точка выключения резака) расположена на эквидистанте контура, где и осуществляется резка. Начальная точка x^0 соответствует исходному положению резака, которое он должен занимать, если не выполняется раскрой листа; терминальное условие (возврат в x^0) в нашей модели отсутствует. Условия предшествования задают следующее правило: резка внутренних контуров всегда должна предшествовать резке внешних (по принципу вложенности) контуров; допускается расположение одних деталей внутри контуров других деталей, пересечение эквидистант контуров не допускается. Отображения (3.6) заданы следующим образом: пусть K — множество индексов невырезанных контуров; находясь в точке x, где $(x = x^0) \vee \big(x \in \mathrm{M}_j \ \text{ при } j \notin K\big)$, рассматриваем в качестве возможных точек врезки y лишь те, у которых для всех контуров с индексами j из множества $\overline{1,N}\backslash K$ выполняется условие $\rho(y,z) > \varepsilon \; \forall j \in \overline{1,N}\backslash K \;\; \forall z \in \mathrm{M}_j$. Здесь ρ — евклидово расстояние, а вещественное число $\varepsilon > 0$ задает тепловой допуск, определяющий минимальный отступ для начала резки возле эквидистант уже вырезанных контуров. Пусть функции (4.10) задаются посредством еквлидова расстояния и не зависят от списка заданий, при этом значения функций $c_1, \ldots, c_N$ зануляем; функция f также равна нулю.

Рассматриваемый в настоящей статье алгоритм применительно к вышеупомянутой упрощенной модели задачи был реализован в виде программы для ПЭВМ, разработанной на платформе .Net с использованием языка $C\#$ и работающей под управлением ОС Windows 7 Pro x32. Исходные данные для программы задаются в конфигурационном файле. Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Core i5-2400M с частотой 3.1 GHz, объемом оперативной памяти 8.0 ГБ с установленной операционной системой Windows 7 Professional.

В примере требовалось обойти 22 контура ($N = 22$), некоторые из которых были вложенными один в другой. Количество адресных пар равно 19 (т. е. $|\mathbf{K}| = 19$). Начальная точка x^0

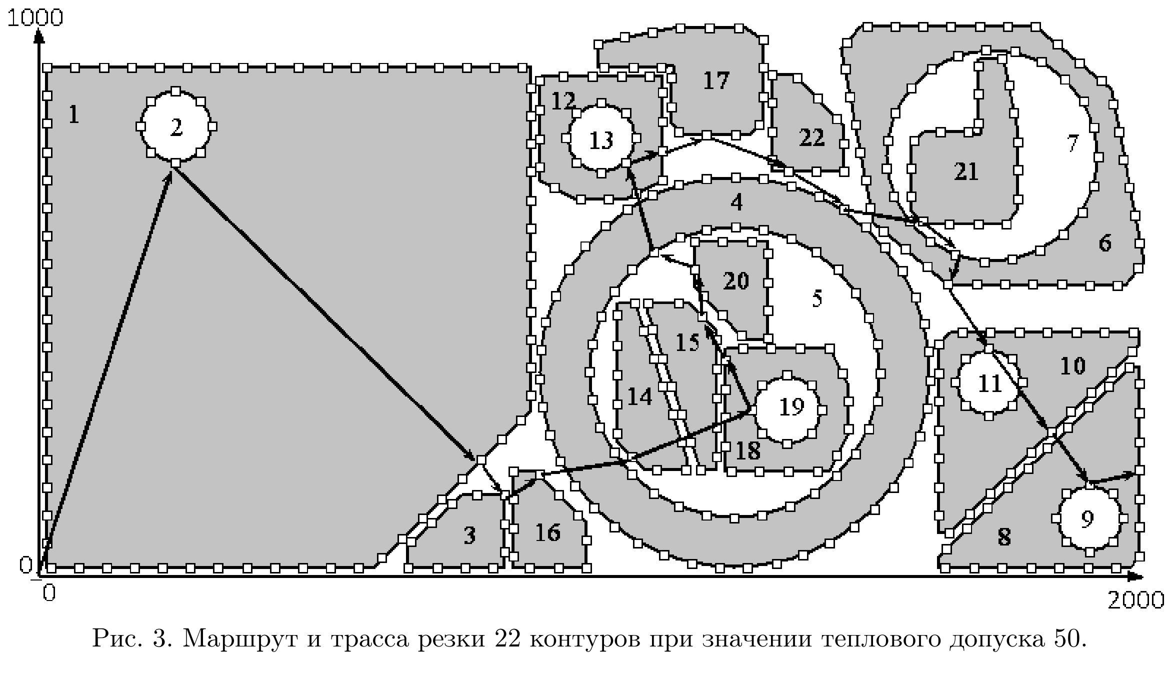

Рис. 3. Маршрут и трасса резки 22 контуров при значении теплового допуска 50.

совпадает с началом координат, величина теплового допуска $\varepsilon = 50$. Результаты работы программы: величина совокупных затрат $V = 3861.54$, время счета составило 22 мин, 6 с; график траектории резки приведен на рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петунин А.А.** О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестн. УГАТУ. 2009. Т. 13, №2(35). С. 280–286. (Управление, вычислительная техника и информатика.)
2. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. 2013. № 2(169). С. 103–111. (Информатика. Телекоммуникации. Управление.)
3. **Фроловский В.Д.** Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информационные технологии в проектировании и производстве. М., 2005. № 4. С. 63–66.
4. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. I. Вопросы теории; II. Точные алгоритмы; III. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34; № 10. С. 3–29; № 11. С. 3–26.
5. **Gutin G., Punnen A.P.** The traveling salesman problem and its variations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 830 p. (Comb. Optim., 12.)
6. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
7. **Хелд М., Карп Р.М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернет. сб. М.:Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
8. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999. 960 с.
9. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
10. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
11. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: РХД, 2008. 238 с.
12. **Ченцов А.Г.** К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2013. № 1. С. 59–82.
13. **Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. №4. С. 170–190.
14. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов // Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. и техн. науки. 2014. Т. 19, вып. 2. С. 454–475.
15. **Ченцов А.Г., Чеблоков И.Б.** Об одной задаче маршрутизации с внутренними работами // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2012. № 1. С. 96–1197.
16. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Задачи маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Докл. РАН. 2015. Т. 465, № 2. С. 154–158.

Поступила 13.07.2015

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, член-корреспондент РАН
главный научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Кошелева Мария Сергеевна
младший научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kosheleva.ms@gmail.com

Ченцов Алексей Александрович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН