ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518.475

О ПОРЯДКЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ЧАСТНЫХ КУБИЧЕСКИХ СУММ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ $H^l_{1,m}[\omega]$

Н. А. Ильясов

Приведено решение задачи о точном порядке уклонения в равномерной метрике частных кубических сумм кратных тригонометрических рядов Фурье на классах функций с заданной мажорантой полного модуля гладкости l-го порядка в $L_1(\mathbb{T}^m)$, где $l \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Ключевые слова: кратный тригонометрический ряд Фурье, частные кубические суммы, порядок равномерной сходимости, полный модуль гладкости, точный порядок уклонения в равномерной метрике.

N. A. Il'yasov. On the order of the uniform convergence of partial cubic sums of multiple trigonometric Fourier series on the function classes $H^l_{1,m}[\omega]$.

A solution of the problem on the exact order of deviation in the uniform metric of partial cubic sums of multiple trigonometric Fourier series on classes of functions with a given majorant for the total modulus of smoothness of the lth order in $L_1(\mathbb{T}^m)$ is presented, where $l \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, partial cubic sums, order of uniform convergence, total modulus of smoothness, exact order of deviation in the uniform metric.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_m)$ с нормой $|x| = \left(x_1^2 + \cdots + x_m^2\right)^{1/2}$, $m \geq 1$, $\mathbb{T}^m = (-\pi, \pi]^m$; $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < \infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических по каждой переменной $x_i, i = \overline{1,m}$, функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ с конечной $L_p(\mathbb{T}^m)$-нормой $\|f\|_{p,m} = \left(\pi^{-m} \int_{\mathbb{T}^m} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$; $L_\infty(\mathbb{T}^m) \equiv C(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических по каждой переменной функций с равномерной нормой $\|f\|_{\infty,m} = \max\{|f(x)| \colon x \in \mathbb{T}^m\}$; $E_{n,\ldots,n}(f)_{p,m}$ — полное наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T}^m)$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n \in \mathbb{Z}_+$, по каждой переменной x_i, $i = \overline{1,m}$; $\omega_l(f;\delta)_{p,m}$ — полный модуль гладкости l-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $l \in \mathbb{N}$: $\omega_l(f;\delta)_{p,m} = \sup\left\{\left\|\Delta_h^l f(\cdot)\right\|_{p,m} : h \in \mathbb{R}^m, |h| \leq \delta\right\}$, где $\Delta_h^l f(x) = \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{l-\nu} C_l^\nu f(x+\nu h)$, $C_l^\nu = l!/\nu!(l-\nu)!$, $\nu = \overline{0,l}$; $S_{n_1,\ldots,n_m}(f;x) = S_{n_1,\ldots,n_m}(f;\ x_1, \ldots, x_m)$ — частная сумма порядка $n_i \in \mathbb{Z}_+$ по переменной x_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$; $\Omega_l(0,d]$ — класс функций $\omega = \omega(\delta)$, определенных на $(0,d]$, $d = \pi m^{1/2}$, и удовлетворяющих условиям: $0 < \omega(\delta) \downarrow 0\,(\delta \downarrow 0)$ и $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow)$; M_0 — класс всех последовательностей $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ таких, что $0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$.

Для заданных чисел $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ и функции $\omega \in \Omega_l(0,d]$ обозначим

$$H^l_{p,m}[\omega] = \left\{f \in L_p(\mathbb{T}^m) : \omega_l(f;\delta)_{p,m} \leq \omega(\delta),\ \delta \in (0,d]\right\}.$$

Автором в [1, теорема 2] приведено решение задачи о точном порядке уклонения в равномерной метрике частных кубических сумм кратных тригонометрических рядов Фурье на классах $H^l_{p,m}[\omega]$ в случае $1 < p < \infty$, $m \geq 1$ и $l > m/p$. В настоящей работе указанный результат дополнен рассмотрением случая $p = 1$, потребовавшего (в силу специфики пространства $L_1(\mathbb{T}^m)$) привлечения иных идей и конструкций (см. ниже разд. 1, доказательство теоремы 1 при $p = 1$, и разд. 2, доказательство теоремы 2 при $p = 1$). Кроме того, в этой работе для случая $m = l = 1$ приведен краткий обзор с комментариями некоторых ранее установленных результатов, о которых автору стало известно после публикации [1], а также представлены примеры функций, подтверждающие невозможность ослабления условия на модуль непрерывности функций из $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, гарантирующего равномерную сходимость их рядов Фурье (см. ниже разд. 3).

Напомним некоторые известные определения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Функции f и g называются *эквивалентными* (обозначение: $f \sim g$), если они совпадают почти всюду в смысле m-мерной меры Лебега. Функция f называется *существенно непрерывной на* $\mathbb{T}^m$, если она эквивалентна некоторой функции $g \in C(\mathbb{T}^m)$; в противном случае функция f называется *существенно разрывной на* $\mathbb{T}^m$. Функция f называется *существенно ограниченной на* $\mathbb{T}^m$, если она эквивалентна некоторой ограниченной функции; в противном случае функция f называется *существенно неограниченной на* $\mathbb{T}^m$. Поскольку всякая существенно непрерывная на $\mathbb{T}^m$ функция является существенно ограниченной, то ясно, что всякая существенно неограниченная на $\mathbb{T}^m$ функция является существенно разрывной.

Для полноты и удобства изложения формулировки утверждений и комментарии к ним приводятся для случая $1 \leq p < \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leq p < \infty,\ m \geq 1,\ f \in L_p(\mathbb{T}^m),\ l \in \mathbb{N},\ l > m/p$ *и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} \omega_l\Big(f; \frac{d}{n}\Big)_{p,m} < \infty \tag{1}$$

либо (эквивалентный в смысле сходимости при $l > m/p$*) ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1} E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m} < \infty; \tag{2}$$

тогда f *эквивалентна некоторой функции* $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ *и справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|\psi(\cdot) - S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m} &\leq C_1(p,m)\Big\{n^{m/p} E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{p,m}\Big\} \\ &\leq C_2(l,p,m) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1} \omega_l\Big(f; \frac{d}{\nu}\Big)_{p,m}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3}$$

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 фактически утверждает, что при выполнении условия (1) либо условия (2) m-кратный ряд Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ равномерно сходится по кубам к функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m) : \|S_{n,\dots,n}(f;\cdot) - \psi(\cdot)\|_{\infty,m} = o(1)$ $(n \to \infty)$, причем оценки скорости сходимости даются неравенствами (3).

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 в случае $m = 1$ доказана автором в [2, § 1]. Доказательство теоремы 1 в случае $p > 1$ и $m \geq 1$ приведено в [1, § 2] и основывается по существу на двух известных результатах: $\|f(\cdot) - S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{p,m} \to 0$ при $n \to \infty$ и $\|f(\cdot) - S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{p,m} \leq C_3(p,m) E_{n,\dots,n}(f)_{p,m}$, $n \in \mathbb{N}$, для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, где $1 < p < \infty$. Приведенное ниже в разд. 1 доказательство теоремы 1 в случае $p = 1$, $m \geq 1$ отличается от доказательства в [2, § 1] при $p = m = 1$ (см. ниже разд. 1, замечание 6).

З а м е ч а н и е 3. В случае $l = m = 1$ и $1 < p < \infty$ утверждение, согласно которому если $f \in L_p(\mathbb{T})$ и имеет место (1), то $f \sim \psi \in C(\mathbb{T})$ и $\|\psi(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_{\infty,1} = o(1)$ $(n \to \infty)$, было впервые отмечено П. Л. Ульяновым [3, § 4, теорема 5] как следствие неравенства разных метрик для наилучших приближений А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина [4, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)] и одной теоремы К. Яно [5, с. 73] (см. разд. 3, п. 1)). Справедливость импликации (1) $\Longrightarrow f \sim \psi \in C(\mathbb{T})$ другим методом ранее установлена Я. Л. Геронимусом [6, § 1, теорема 1]. Распространение сформулированного утверждения на многомерный случай приведено в заметке Н. Т. Темиргалиева [7] с помощью m-мерного аналога указанного неравенства А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина (см. [7]) и соответствующего результата Л. В. Жижиашвили [8, теорема 6], а именно: если $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $l = 1 > m/p$ и выполняется (1), то $f \sim \psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и $\|\psi(\cdot) - S_{n_1,\dots,n_m}(f;\cdot)\|_{\infty,m} = o(1)$ $(n_i \to \infty,\ i = \overline{1,m})$.

З а м е ч а н и е 4. 1) Условие $l > m/p$ $(l \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty, m \ge 1)$ в теореме 1 необходимо для сходимости ряда (1) для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ с $\omega_l(f;\delta)_{p,m} \not\equiv 0$, поскольку в противном случае в силу известного свойства $\omega_l(f;\delta)_{p,m} \ge (2d)^{-l}\omega_l(f;d)_{p,m}\,\delta^l$, $\delta \in (0,d]$, ряд (1) заведомо расходится. Если же ряд (1) сходится при $l \le m/p$ для некоторой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, то $\omega_l(f;\delta)_{p,m} = o\left(\delta^{m/p}\right) = o\left(\delta^l\right)$ $(\delta \to 0)$ и, следовательно, $\omega_l(f;\delta)_{p,m} \equiv 0$, так как в противном случае $\delta^l = O(\omega_l(f;\delta)_{p,m}) = o(\delta^l)(\delta \to 0)$, что, очевидно, не представляется возможным. Далее, при выполнении соотношения $\omega_l(f;\delta)_{p,m} \equiv 0$ имеем $\omega_1(f;\delta)_{p,m} \equiv 0$, откуда следует (см., например, [9, т. 1, гл. 2, п. 3; 10, гл. 5, п. 92], случай $m = 1$), что f эквивалентна постоянной.

2) В случае $l \le m/p$ $(1 \le p < \infty, m \ge 1)$ даже наибольший порядок убывания модуля гладкости $\omega_l(f;\delta)_{p,m} = O\left(\delta^l\right)(\delta \to 0)$ функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ не гарантирует ее эквивалентность некоторой непрерывной функции и, тем более, равномерную сходимость ее ряда Фурье, поскольку среди таких функций имеются как существенно разрывные, так и существенно неограниченные на $\mathbb{T}^m$ (см., например, [3, § 4, замечание 6; 11, § 5; 12, гл. 5, § 6.3 и § 6.9; 13, § 2, замечания после теорем 1 и 1′; 2, замечание 3; 1, § 1, замечание 4]).

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p < \infty,\ m \ge 1,\ l \in \mathbb{N},\ l > m/p,\ \omega \in \Omega_l(0,d]$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) < \infty; \tag{4}$$

тогда

$$\sup\Big\{\|\psi(\cdot) - S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m} : f \in H^l_{p,m}[\omega]\Big\} \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где ψ обозначает соответствующую функцию из $C(\mathbb{T}^m)$, эквивалентную $f \in H^l_{p,m}[\omega]$, существование которой обеспечивается условием (4) *в силу теоремы* 1.

Отношение $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает порядковое равенство величин α_n и β_n, т. е. существуют такие постоянные $0 < C_4 \le C_5$, зависящие лишь от указанных параметров p, m и l, что $C_4\beta_n \le \alpha_n \le C_5\beta_n$.

З а м е ч а н и е 5. 1) *Условие сходимости ряда в* (4) *необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ с $\omega_l(f;\delta)_{p,m} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,d]$, обладала следующими равносильными свойствами:*

(а) *f эквивалентна некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$;*

(б) *частные кубические суммы ряда Фурье f равномерно сходятся к ψ на $\mathbb{T}^m$.*

Достаточность непосредственно следует из утверждения теоремы 1, а необходимость является следствием п. 2) леммы 3 [1, § 3] в случае $p > 1$, п. 2) леммы 4 в разд. 2 настоящей работы в случае $p = 1$ (см. замечание 9 в разд. 2) и основывается, по существу, на следующем суждении, впервые отмеченном П. Л. Ульяновым в [3, § 4, теорема 5, замечание 5] при $m = l = 1$, $p > 1$: если ряд в (4) расходится для некоторой функции $\omega \in \Omega_l(0,d]$, то имеются существенно неограниченные на $\mathbb{T}^m$ функции $F(\cdot;p;m;\omega) \in L_p(\mathbb{T}^m)$ с $\omega_l(F;\delta)_{p,m} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,d]$, и потому их ряды Фурье заведомо не являются равномерно сходящимися на $\mathbb{T}^m$.

2) Утверждение 1) данного замечания в несколько иной формулировке доказано П. Л. Ульяновым [3, § 4, теорема 5] (см. также [11, § 1 и § 2, теорема 1]) при $l = m = 1 < p < \infty$,

Н. Т. Темиргалиевым [7] (см. также [13]) при $l = 1 \le m < p < \infty$. Оно остается в силе и в случае $l = 1 \le p \le m$, однако является малосодержательным: если выполнено условие (4), то в силу (1) имеем (см. п. 1) замечания 4) $\omega_1(f;\delta)_{p,m} = o(\delta)$ $(\delta \to 0)$ и потому $\omega_1\left(f;\delta\right)_{p,m} \equiv 0$, откуда следует, что f эквивалентна постоянной. Для получения содержательных утверждений в случае $1 \le p \le m$ нужно вместо модулей непрерывности функций (случай $l = 1$) привлекать модули гладкости порядка $l > m/p$ (см. п. 1) замечания 4). В связи с последним замечанием следует отметить статью Н. Т. Темиргалиева [14], в которой приведено доказательство утверждения 1) относительно свойства (а) в случае $l = m + 1$ и $1 \le p \le m$ $(\Longrightarrow l > m/p)$.

Отметим также, что в указанных работах [3; 7; 11; 13] в качестве мажоранты модуля непрерывности $\omega_1(f;\delta)_{p,m}$ функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ рассматривается функция $\omega(\delta)$, называемая *модулем непрерывности*, т. е. всякая непрерывная неубывающая на отрезке $[0, 1]$ функция с $\omega(0) = 0$ и $\omega\left(\delta + \eta\right) \le \omega(\delta) + \omega(\eta)$ при $0 \le \delta \le \delta + \eta \le 1$.

3) Утверждение 1) остается в силе, если вместо модуля гладкости функции рассматривать последовательность ее наилучших приближений, а именно: *пусть* $1 \le p < \infty$, $m \ge 1$, $\varepsilon \in M_0$; *условие* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}\varepsilon_n < \infty$ *необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ *с* $E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *обладала равносильными свойствами* (а) *и* (б).

Достаточность следует из утверждения теоремы 1, а необходимость является следствием п. 2 леммы 1 [1, § 3] в случае $p > 1$ и п. 2 леммы 2 в разд. 2 настоящей работы в случае $p = 1$ (см. замечание 7 в разд. 2).

Отметим, что сформулированное в этом пункте утверждение относительно свойства (а) хорошо известно: достаточность следует из соответствующих результатов [4, § 1, теорема 2; 15, теорема 6.4.1] в случае $m = 1$ и [7; 16] в случае $m > 1$, а необходимость установлена в [17, § 3, теорема 4] (см. также [3, § 4, доказательство теоремы 5; 18, п. 2) леммы 5]) при $m = 1$, [16] (см. также [7; 14, § 3; 19, п. 2 леммы 5 и замечание после леммы 5]) при $m > 1$.

1. Доказательство теоремы 1 в случае $p = 1$

Прежде всего отметим, что эквивалентность рядов (1) и (2) при $l > m/p$ непосредственно следует из неравенств $(1 \le p \le \infty,\ m \ge 1,\ n \in \mathbb{N})$

$$C_6^{-1}(l,m)E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m} \le \omega_l\Big(f;\frac{d}{n}\Big)_{p,m} \le C_7(l,m)n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{p,m}, \qquad (6)$$

левое из которых представляет собой $L_p(\mathbb{T}^m)$-аналог неравенства Джексона — Стечкина (см., например, [15, п. 5.3.1, неравенство (1)], а правое доказывается по известной схеме [20, § 5, теорема 8; 15, п. 6.1.1].

Утверждение об эквивалентности рядов подобного типа хорошо известно, и, в случае $m = 1$, впервые встречается в работе С. Б. Стечкина [21, теорема 1] (см. также [22, § 2, п. 2.6; 4, § 3, теорема 12 при $\gamma = 0$, $\beta = 1$]).

Ниже приводится доказательство теоремы 1 в случае $p = 1$, при этом, по существу, используется утверждение этой теоремы для случая $p > 1$. Автор не исключает возможность доказательства теоремы 1 в случае $p = 1$ другим способом, но акцентирует внимание на приведенном, поскольку оно позволяет получить требуемый результат при $p = 1$ с помощью уже доказанного при $p > 1$.

Нам понадобится также частный случай m-мерного аналога неравенства разных метрик для наилучших приближений А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина (см. [4, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)], случай $m = 1$; [7], случай $m \ge 1$): пусть $1 < p < \infty$, $m \ge 1$, $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m(1-1/p)-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} < \infty; \qquad (7)$$

тогда $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ и имеет место неравенство

$$E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m}$$
$$\le C_8(p,m)\Big\{n^{m(1-1/p)}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\Big\},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{8}$$

Теперь приступим к доказательству теоремы 1 в случае $p=1$. Пусть $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m}<\infty$; тогда $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m(1-1/p)-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m}<\infty$ при любом $p\in(1,\infty)$, т.е. сходится ряд (7), и, следовательно, $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$. Далее, применяя неравенство (8), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{m/p-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m}$$
$$\le C_8(p,m)\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{m/p-1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\Big\}$$
$$=C_8(p,m)\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\sum_{n=1}^{\nu}n^{m/p-1}\Big\}$$
$$\le C_8(p,m)\Big(1+C_9\Big(\frac{m}{p}\Big)\Big)\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m},$$

где $C_9(m/p)=\{1$ при $m/p\ge 1$; $(m/p)^{-1}$ при $m/p\le 1\}$.

Отсюда в силу утверждения теоремы 1 для случая $p>1$ следует, что f эквивалентна некоторой функции $\psi\in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива оценка (применяем неравенство (8))

$$\|\psi(\cdot)-S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m}$$
$$\le C_1(p,m)\Big\{n^{m/p}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{p,m}\Big\}$$
$$\le C_1(p,m)C_8(p,m)\Big\{n^{m}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m}+n^{m/p}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}$$
$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p-1+m(1-1/p)}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\mu^{m(1-1/p)-1}E_{\mu-1,\dots,\mu-1}(f)_{1,m}\Big\}$$
$$\le C_1(p,m)C_8(p,m)\Big\{n^{m}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p+m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}$$
$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}+\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{m(1-1/p)-1}E_{\mu-1,\dots,\mu-1}(f)_{1,m}\sum_{\nu=n+1}^{\mu}\nu^{m/p-1}\Big\}$$
$$\le C_1(p,m)C_8(p,m)\Big\{n^{m}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m}+\Big(2+C_9\Big(\frac{m}{p}\Big)\Big)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\Big\}.$$

Таким образом, левая оценка в (3) для случая $p=1$ доказана с постоянной $C_1(p,m)\times C_8(p,m)\,(2+C_9(m/p))$, где p — любое число из промежутка $(1,\infty)$. Отметим, что поскольку число $p\in(1,\infty)$ в приведенных выше рассуждениях использовалось в качестве свободного параметра, то его можно исключить из рассмотрения, предварительно положив, например, $p=2$.

Правая оценка в (3) в случае $p=1$ доказывается аналогично случаю $p>1$ (см. [1, доказательство теоремы 1 в § 2]). В силу левого неравенства в (6) и известных свойств модуля гладкости: $\omega_l(f;\delta_1)_{1,m} \le \omega_l(f;\delta_2)_{1,m}$ и $\delta_2^{-l}\omega_l(f;\delta_2)_{1,m} \le 2^l\delta_1^{-l}\omega_l(f;\delta_1)_{1,m}$ при $0<\delta_1<\delta_2<\infty$ — имеем

$$\|\psi(\cdot)-S_{n,\ldots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m} \le C_{10}(m)C_6(l,m)\Big\{n^m\omega_l\Big(f;\frac{d}{n}\Big)_{1,m}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}\Big\}$$

$$\le C_{10}(m)C_6(l,m)C_{11}(l,m)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m},$$

где $C_{10}(m)=C_1(1,m)$, $C_{11}(l,m)=2^l m(2^m-1)^{-1}+1$.

Теорема 1 в случае $p=1$ доказана. □

Замечание 6. В случае $m=p=1$ утверждение теоремы 1 получается совсем просто в силу известных неравенств $|a_n(f)|,\ |b_n(f)| \le E_{n-1}(f)_{1,1}$, $n\in\mathbb{N}$, где $a_n(f)$, $b_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{T})$ (см. [2, доказательство теоремы 1 в § 1]):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|+|b_n(f)|) \le 2\sum_{n=1}^{\infty}E_{n-1}(f)_{1,1} \le 2C_6(l,1)\sum_{n=1}^{\infty}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_{1,1}<\infty,$$

откуда следует, что ряд Фурье f сходится абсолютно и равномерно к некоторой функции $\psi\in C(\mathbb{T})$, функция f эквивалентна ψ и справедлива оценка

$$\|\psi(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_{\infty,1} \le 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_{\nu-1}(f)_{1,1} \le 2C_6(l,1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_{1,1}, \quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

2. Доказательство теоремы 2 в случае $p=1$

Нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}\in M_0$, $m\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $\Delta\varepsilon_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$; *последовательность*

$$a_n(m;\varepsilon)=\sum_{\nu=n}^{\infty}\Big(1-\frac{n}{\nu+1}\Big)(\nu+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_\nu, \quad n=1,2,\ldots,$$

обладает следующими свойствами:

1) $0<a_n(m;\varepsilon)\downarrow(n\uparrow)$, *при этом* $a_n(1;\varepsilon)\to 0\,(n\to\infty)$ *и* $a_n(m;\varepsilon)\to 0\,(n\to\infty)$ *в случае* $m>1$ *при условии сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\varepsilon_n<\infty$;

2) $a_n(m;\varepsilon)\le\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_\nu$, *в частности* $a_n(1;\varepsilon)\le\varepsilon_n$;

3) $\Delta a_n(m;\varepsilon)=a_n(m;\varepsilon)-a_{n+1}(m;\varepsilon)=\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{m-2}\Delta\varepsilon_\nu$, $\Delta a_n(m;\varepsilon)\le(n+1)^{-1}\varepsilon_n$ *при* $m=1, \Delta a_n(m;\varepsilon)=\varepsilon_n$ *при* $m=2$ *и* $\Delta a_n(m;\varepsilon)\ge(n+1)^{m-2}\varepsilon_n$ *при* $m>2$;

4) $\Delta^2a_n(m;\varepsilon)=\Delta a_n(m;\varepsilon)-\Delta a_{n+1}(m;\varepsilon)=(n+1)^{m-2}\Delta\varepsilon_n$;

5) $a_n(m;\varepsilon)+n\Delta a_n(m;\varepsilon)=\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_\nu$, *причем* $a_n(1;\varepsilon)+n\Delta a_n(1;\varepsilon)=\varepsilon_n$ *и* $a_n(m;\varepsilon)+n\Delta a_n(m;\varepsilon)\ge(n+1)^{m-1}\varepsilon_n$ *при* $m>1$;

6) $\big(m\,2^{m-1}\big)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m;\varepsilon)\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\varepsilon_n\le 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m;\varepsilon)$;

7) $\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu\le 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(m;\varepsilon)+na_{n+1}(m;\varepsilon)$;

8) $n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu\le(k+2)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k a_\nu(m;\varepsilon)$.

Лемма 1 в случае $m=1$ доказана в [23, лемма 1 при $p=1$] (формулировка приведена также в [18, лемма 2]), а в случае $m\ge 1$ доказательство приведено в [19, лемма 4]. Отметим, что последовательность $\{a_n(m;\varepsilon)\}$ при $m=1$ ранее рассматривалась В. Э. Гейтом [24, § 2; 25, § 2, п. 2]; там же отмечены свойства 1)–5) этой последовательности $\{a_n(1;\varepsilon)\}$.

Лемма 2. *Пусть* $m \geq 1$, $\varepsilon \in M_0$; *существует функция* $G(x;m;\varepsilon) \in L_1(\mathbb{T}^m)$ *такая, что*:
1) $E_{n-1,\dots,n-1}(G)_{1,m} \leq \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$;
2) $G \in C(\mathbb{T}^m) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < \infty$, *при этом*
$2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < G((0,\dots,0);m;\varepsilon) = \|G(\cdot;m;\varepsilon)\|_{\infty,m} \leq m\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n$;
3) *если ряд в правой части* 2) *сходится, то*
$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu \leq 2^m \|G(\cdot\ ;\ m;\varepsilon) - S_{n,\dots,n}(G;\ \cdot)\|_{\infty,m} + 2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим (см., например, [24, § 2, п. 1; 25, § 2, п. 2] при $m = 1$, [19, лемма 5] при $m \geq 1$)

$$G(x;m;\varepsilon) = G((x_1,\dots,x_m);m;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\prod_{i=1}^{m}F_n(x_i), \quad x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{T}^m,$$

где $F_n(y) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^{n}(1-\nu/(n+1))\cos\nu y$ — ядро Фейера порядка $(n+1) \in \mathbb{N}$ ($F_0(y) = 1/2$), $y \in \mathbb{T}$. В силу известного равенства (см., например, [26, гл. 1, § 47, формула (47.10)]) $\|F_n(\cdot)\|_{1,1} = 1$ имеем

$$\big\|G(\cdot\ ;m;\varepsilon)\big\|_{1,m} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\Big\|\prod_{i=1}^{m}F_n(x_i)\Big\|_{1,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\prod_{i=1}^{m}\|F_n(x_i)\|_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_1,$$

откуда следует, что $G \in L_1(\mathbb{T}^m)$. Далее, так как $F_{n-1}(y)$ — полином порядка $(n-1) \in \mathbb{Z}_+$, то

$$E_{n-1,\dots,n-1}(G)_{1,m} \leq \Big\|\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\varepsilon_\nu\prod_{i=1}^{m}F_\nu(x_i)\Big\|_{1,m} \leq \sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\varepsilon_\nu\Big\|\prod_{i=1}^{m}F_\nu(x_i)\Big\|_{1,m} = \sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\varepsilon_\nu = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. имеет место п. 1).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < \infty$, то из оценки $\big(\|F_n(\cdot)\|_{\infty,1} = F_n(0) = (n+1)/2\big)$

$$\big\|G(\cdot;m;\varepsilon)\big\|_{\infty,m} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\Big\|\prod_{i=1}^{m}F_n(x_i)\Big\|_{\infty,m} = 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^m\Delta\varepsilon_n = G(0;m;\varepsilon)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}n^m\Delta\varepsilon_n \leq m\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{m-1} = m\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m-1}\sum_{n=\nu}^{\infty}\Delta\varepsilon_n = m\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu$$

в силу известного признака равномерной сходимости Вейерштрасса следует, что $G \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива правая оценка в п. 2). С другой стороны, если $G \in C(\mathbb{T}^m)$, то

$$\infty > \big\|G(\cdot;m;\varepsilon)\big\|_{\infty,m} \geq G((0,\dots,0);m;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\prod_{i=1}^{m}F_n(0) = 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^m\Delta\varepsilon_n$$

$$> 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}n^m\Delta\varepsilon_n \geq 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{m-1} = 2^{-m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m-1}\sum_{n=\nu}^{\infty}\Delta\varepsilon_n = 2^{-m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu,$$

откуда следуют сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < \infty$ и справедливость левой оценки в п. 2).

Перейдем к доказательству п. 3). Если ряд в правой части п. 2) сходится, то $G \in C(\mathbb{T}^m)$. Обозначим $g(y;m;\varepsilon) = G((y,0,\dots,0);m;\varepsilon)$, $y \in \mathbb{T}$. Ясно, что $g \in C(\mathbb{T})$ и является суммой своего ряда Фурье:

$$g(y;m;\varepsilon) = 2^{-(m-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_n F_n(y)$$

$$= 2^{-(m-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_n\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\Big(1 - \frac{\nu}{n+1}\Big)\cos\nu y\right\} = 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_n$$

$$+\,2^{-(m-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_\nu\Big(1-\frac{n}{\nu+1}\Big)\right\}\cos ny=\Big(\frac{1}{2}\Big)a_0(g)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(g)\cos ny,$$

где $a_n(g)=2^{-(m-1)}a_n(m;\varepsilon),\ n\in\mathbb{N}$, а последовательность $\{a_n(m;\varepsilon)\}$ определена в лемме 1.

Так как по условию $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\varepsilon_n<\infty$, то в силу п. 6) леммы 1 имеем $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m;\varepsilon)<\infty$; отсюда, учитывая неравенство п. 7) леммы 1 и свойство $a_n(m;\varepsilon)\downarrow(n\uparrow)$, получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu=\sum_{\nu=n+1}^{2n}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu+\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu\le 2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}a_\nu(m;\varepsilon)+2na_{2n+1}(m;\varepsilon)$$

$$\le 2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}a_\nu(m;\varepsilon)+2\sum_{\nu=n+1}^{2n}a_\nu(m;\varepsilon)=2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(m;\varepsilon)$$

$$=2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2\cdot2^{m-1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(g)=2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2^m\left\{g(0;m;\varepsilon)-S_n(g;0)\right\}$$

$$=2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2^m\left\{G\left((0,\dots,0);m;\varepsilon\right)-S_{n,\dots,n}(G;(0,\dots,0))\right\}$$

$$\le 2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2^m\big\|G\left(\cdot;m;\varepsilon\right)-S_{n,\dots,n}\left(G;\cdot\right)\big\|_{\infty,m}.$$

Лемма 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 7. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m/p-1}\varepsilon_n=\infty$, где $p\ge1$, то функция $G\,(x;m;\varepsilon)\in L_1(\mathbb{T}^m)$, рассмотренная в лемме 2 (в силу п. 2) этой леммы) и функция $G\,(x;p;m;\varepsilon)\in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1<p<\infty$, рассмотренная в лемме 1 [1, § 3] (в силу п. 2) этой леммы), являются существенно неограниченными в окрестности начала координат и, следовательно, на $\mathbb{T}^m$ (обоснование см. в [2, § 2, замечание 4] при $m=1$ и в [19, замечание после леммы 5] при $m\ge1$).

Лемма 3. *Пусть* $m\ge1,\ l\in\mathbb{N}$ *и* $l>m$; *для каждой функции* $\omega\in\Omega_l\,(0,d]$ *существует последовательность* $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}$ *такая, что*:

1) $0<\varepsilon_n\le\omega(d/n),\ n=1,2,\dots,\ \varepsilon_n\downarrow0\ \ (n\uparrow\infty)$;
2) $n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}\varepsilon_\nu\asymp\omega(d/n)$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\omega(d/n)\asymp\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\varepsilon_n$;
4) *если ряд в левой части п.* 3) *сходится, то*
$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega(d/\nu)\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu+n^m\omega(d/n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Лемма 3 установлена в [1, § 3, лемма 2 при $p=1$].

З а м е ч а н и е 8. 1) Схема построения последовательности $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющей соотношениям 1) и 2), впервые предложена С. Б. Стечкиным в [27, § 3, лемма 2] (см. также [26, § 9.4, лемма 3]), где был рассмотрен случай $l=1,\ n\omega\,(\pi/n)\uparrow\infty\,(n\uparrow\infty)$ и установлена оценка сверху в соотношении 2). Позднее, в [22, § 2, лемма 3] было отмечено, что утверждение леммы 2 [27] остается в силе и при $l\in\mathbb{N}$ (см. также [14, § 2, лемма 5]). В. Э. Гейт [28, лемма 1] дополнил указанные результаты [27, лемма 2; 22, лемма 3], рассмотрев также случай $n^l\omega\,(\pi/n)=O(1)\,(n\uparrow\infty)$ (в этом случае $\omega\,(\pi/n)\asymp n^{-l}$ и $\varepsilon_n=n^{-1}\omega\,(\pi/n)\,,\ n\in\mathbb{N}$), и доказал оценку снизу в соотношении 2). Ранее схема С. Б. Стечкина в случае $l=1$ и модулей непрерывности $\omega\,(\delta)$ привлекалась также в работах В. А. Андриенко [29, § 3, лемма 1] и П. Л. Ульянова [3; 30, леммы 11 и 12].

2) В работе [31, § 4, формулы (44)–(45)] для заданной функции $\omega\in\Omega_l\,(0,\pi]$ определяется класс $q_{l,\theta}(\omega)$ последовательностей $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющих условиям ($l>0,\ 1\le\theta<\infty$)

$$0<\varepsilon_n\le\omega\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad \varepsilon_n\downarrow(n\uparrow),\quad C_{12}\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\le n^{-l}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta l-1}\varepsilon_\nu^{\theta}\Big)^{1/\theta}\le C_{13}\omega\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad n\in\mathbb{N},\qquad(9)$$

при этом в вопросе относительно построения таких последовательностей приводятся заведомо неверные ссылки (см. там же с. 127) на статьи [24; 32]. Вместе с тем в списке литературы [31] имеются указанная выше заметка В. Э. Гейта [28] и заметка автора [33], в которой сформулирована лемма 1, утверждающая существование (для заданной функции $\omega \in \Omega_l(0,1]$, $l \in \mathbb{N}$) последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющей условиям (9), и отмечено, что построение $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ ведется по схеме С. Б. Стечкина [27], развитой В. Э. Гейтом в [28]. Отметим также, что определение последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и полное доказательство соотношения в правой части (9) опубликовано В. Э. Гейтом [28, лемма 1] при $\theta = 1$, $l \in \mathbb{N}$ и автором [34, лемма 2] при $\theta \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. *Пусть* $m \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$, $l > m$ *и* $\omega \in \Omega_l(0,d]$; *существует функция* $F(x;m;\omega) \in L_1(\mathbb{T}^m)$ *такая, что*:

1) $\omega_l(F;\delta)_{1,m} \leq C_{14}(l,m)\omega(\delta)$, $\delta \in (0,d]$;

2) $F \in C(\mathbb{T}^m) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega(d/n) < \infty$, $\|F(\cdot;m;\omega)\|_{\infty,m} \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega(d/n)$;

3) *если ряд в правой части п.* 2) *сходится, то*
$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega(d/\nu) \leq C_{15}(l,m)\left\{\|F(\cdot;m;\omega) - S_{n,\ldots,n}(F;\cdot)\|_{\infty.m} + n^m\omega(d/n)\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем $F(x;m;\omega) = G(x;m;\varepsilon)$, где $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ — последовательность, соответствующая согласно лемме 3 заданной функции $\omega \in \Omega_l(0,d]$, а функция G определена в лемме 2. В силу правого неравенства в (6), п. 1) леммы 2 и п. 2) леммы 3 имеем $\omega_l(F;d/n)_{1,m} \leq C_7(l,m)n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}E_{\nu-1,\ldots,\nu-1}(F)_{1,m} \leq C_7 n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}\varepsilon_\nu \leq C_{16}(l,m)\omega(d/n)$, откуда $\omega_l(F;d/n)_{1,m} \leq C_{16}\omega(d/n), n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\omega_l(F;\delta)_{1,m} \leq 2^l C_{16}(l,m)\omega(\delta)$, $\delta \in (0,d]$. Далее, утверждение п. 2) является следствием п. 2) леммы 2 и п. 3) леммы 3:

$$\|F(\cdot;m;\omega)\|_{\infty,m} \equiv \|G(\cdot;m;\varepsilon)\|_{\infty,m} = G((0,\ldots,0);m;\varepsilon) \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{n}\Big).$$

Докажем п. 3). Если ряд в правой части п. 2) сходится, то в силу п. 4) леммы 3, п. 3) леммы 2 и п. 1) леммы 3 получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\varepsilon_\nu + n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \leq 2^m\|G(\cdot;m;\varepsilon) - S_{n,\ldots,n}(G;\cdot)\|_{\infty,m}$$

$$+2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1} + n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \leq 2^m\|F(\cdot;m;\varepsilon) - S_{n,\ldots,n}(F;\cdot)\|_{\infty,m} + \left(2^{m-1}+1\right)n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big).$$

Лемма 4 доказана. □

З а м е ч а н и е 9. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{(m/p)-1}\omega(d/n) = \infty$, где $p \geq 1$, то функция $F \in L_1(\mathbb{T}^m)$, рассмотренная в лемме 4 (в силу $F(x;m;\omega) = G(x;m;\varepsilon)$, п. 2) этой леммы и п. 3) леммы 3), и функция $F \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$, рассмотренная в лемме 3 [1, § 3] (в силу $F(x;p;m;\omega) = G(x;p;m;\varepsilon)$, п. 2) этой леммы и п. 3) леммы 2 [1, § 3]), являются существенно неограниченными в окрестности начала координат и, следовательно, на $\mathbb{T}^m$ (см. замечание 7).

Лемма 5. *Пусть* $m \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_l(0,d]$; *существует последовательность функций* $\{\Phi_{2n}(x;m;\omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(\mathbb{T}^m)$ *такая, что*:

1) $\omega_l(\Phi_{2n};\delta)_{1,m} \leq C_{17}(l,m)\omega(\delta)$, $\delta \in (0,d]$, $n = 1,2,\ldots$;

2) $\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega) - S_{n,\ldots,n}(\Phi_{2n};\cdot)\|_{\infty,m} \geq C_{18}(m)n^m\omega(d/n)$, $n \in \mathbb{N}$,

где $C_{17}(l,m) = 2^l(1+m^l d^l)$, $C_{18}(m) = m4^{-m}3^{m-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем (при $m = 1$ см. [2, § 2, лемма 5]) $\Phi_{2n}(x;m;\omega) = \omega(d/n)\prod_{i=1}^{m} F_{2n}(x_i)$, где $F_{2n}(y)$ — ядро Фейера порядка $2n+1$, $y \in \mathbb{T}$. Так как

$$\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\|_{1,m} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\|\prod_{i=1}^{m} F_{2n}(x_i)\Big\|_{1,m} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\prod_{i=1}^{m}\|F_{2n}(x_i)\|_{1,1} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \leq \omega(d),$$

$n \in \mathbb{N}$, то $\sup\Big\{\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\|_{1,m} : n\in\mathbb{N}\Big\} \le \omega(d) < \infty$, откуда $\{\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\} \subset L_1(\mathbb{T}^m)$.

Для доказательства п. 1) отметим, что при любом $\delta \in (0,d]$ и фиксированном $n \in \mathbb{N}$ возможны два случая: $\delta < d/n$ либо $\delta \ge d/n$. При $\delta \ge d/n$ с учетом условия $\omega(\delta)\uparrow(\delta\uparrow)$ имеем $\omega_l(\Phi_{2n};\delta)_{1,m} \le 2^l\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\|_{1,m} = 2^l\omega(d/n) \le 2^l\omega(\delta)$. При $\delta < d/n$ в силу неравенства (см., например, [1, замечание 6]) $\omega_l(f;\delta)_{1,m} \le m^l\delta^l \max\Big\{\big\|\partial^{|\alpha|}f(x)/\partial x^\alpha\big\|_{1,m} : |\alpha| = l\Big\}$, где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+ (i = \overline{1,m}), |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_m, \partial x^\alpha = \partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}$ (при условии существования производной $\partial^{|\alpha|}f(x)/\partial x^\alpha \in L_1(\mathbb{T}^m), |\alpha| \le l$), m-мерного аналога неравенства С. Н. Бернштейна — М. Рисса — А. Зигмунда (см., например, [15, гл. 4, п. 4.8.62, неравенство (30)]), а также учитывая условие $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$, получаем

$$\omega_l(\Phi_{2n};\delta)_{1,m} \le m^l\delta^l \max\Big\{\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_{2n}(x;m;\omega)}{\partial x^\alpha}\Big\|_{1,m} :\ |\alpha| = l\Big\}$$

$$= m^l\delta^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\max\Big\{\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|}\prod_{i=1}^m F_{2n}(x_i)}{\partial x^\alpha}\Big\|_{1,m} : |\alpha| = l\Big\} \le m^l\delta^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)(2n)^l\Big\|\prod_{i=1}^m F_{2n}(x_i)\Big\|_{1,m}$$

$$= m^l2^l\delta^ln^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) = m^l2^ld^l\delta^l\Big(\frac{n}{d}\Big)^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \le m^l2^ld^l\delta^l\delta^{-l}\omega(\delta) = (2md)^l\omega(\delta).$$

Таким образом, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\omega_l(\Phi_{2n};\delta)_{1,m} \le \big\{2^l + (2md)^l\big\}\omega(\delta) = 2^l\big\{1 + (md)^l\big\}\omega(\delta),\ \delta \in (0,d]$, т. е. имеет место соотношение 1).

Докажем соотношение 2). Поскольку $S_n(F_{2n};y) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^n(1-\nu/(2n+1))\cos\nu y$, то имеет место равенство $S_n(F_{2n};0) = 2^{-1}(2n+1)^{-1}(1+3n+3n^2)$, учитывая которое, получаем

$$\big\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega) - S_{n,\ldots,n}(\Phi_{2n};\cdot)\big\|_{\infty,m} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\|\prod_{i=1}^m F_{2n}(x_i) - \prod_{i=1}^m S_n(F_{2n};x_i)\Big\|_{\infty,m}$$

$$\ge \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\{\prod_{i=1}^m F_{2n}(0) - \prod_{i=1}^m S_n(F_{2n};0)\Big\} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\{\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)^m - \Big(\frac{1+3n+3n^2}{2(2n+1)}\Big)^m\Big\}$$

$$= \frac{\omega\Big(\dfrac{d}{n}\Big)}{2^m(2n+1)^m}\big\{(1+4n+4n^2)^m - (1+3n+3n^2)^m\big\} = \frac{m\omega\Big(\dfrac{d}{n}\Big)}{2^m(2n+1)^m}\int\limits_{1+3n+3n^2}^{1+4n+4n^2} t^{m-1}\,dt$$

$$\ge \frac{m}{2^m(2n+1)^m}(1+3n+3n^2)^{m-1}(n+n^2)\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) > \frac{m3^{m-1}}{2^m(2n+2)^m}(n+n^2)^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)$$

$$= m4^{-m}(n+1)^{-m}3^{m-1}n^m(1+n)^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) = m4^{-m}3^{m-1}n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 5 доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 в случае $p = 1$. Оценка сверху в (5) следует из правого неравенства в (3): если сходится ряд в (4), то в силу теоремы 1 каждая функция $f \in H^l_{1,m}[\omega]$ эквивалентна некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива оценка ($n \in \mathbb{N}$)

$$\|\psi(\cdot) - S_{n,\ldots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m} \le C_2(l,1,m)\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m} \le C_2(l,1,m)\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big).$$

Оценка снизу в (5) реализуется посредством функции $C_{14}^{-1}(l,m)F(\cdot;m;\omega) \in H^l_{1,m}[\omega]$ в силу п. 3) леммы 4 и семейства функций $\big\{C_{17}^{-1}(l,m)\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\big\} \subset H^l_{1,m}[\omega]$ в силу п. 2) леммы 5:

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) \le C_{15}(l,m)\Big\{\|F(\cdot) - S_{n,\ldots,n}(F;\cdot)\|_{\infty,m} + n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\}$$

$$\leq C_{15}(l,m)\Big\{\big\|F(\cdot)-S_{n,\dots,n}(F;\cdot)\big\|_{\infty,m}+C_{18}^{-1}(m)\big\|\Phi_{2n}(\cdot)-S_{n,\dots,n}\left(\Phi_{2n};\cdot\right)\big\|_{\infty,m}\Big\}$$

$$\leq C_{19}(l,m)\sup\Big\{\|\psi\left(\cdot\right)-S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m}:f\in H^{l}_{1,m}\left[\omega\right]\Big\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 10. Привлечение семейства функций $\{\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\}$ (см. лемму 5) для реализации оценки снизу в (5) в случае $p=1$ (точнее, для оценки величины $n^m\omega(d/n)$) не является типичным при решении подобного рода задач (в отличие от случая $p>1$; см. [1, лемма 4]). В случае $m=p=1$ и четном $l\in\mathbb{N}$ существует функция $f_0(y;\omega)\in L_1(\mathbb{T})$ с $\omega_l\left(f_0;\delta\right)_{1,1}\asymp\omega\left(\delta\right),\delta\in(0,\pi]$, такая, что $f_0\in C(\mathbb{T})\iff\sum_{n=1}^{\infty}\omega\left(\pi/n\right)<\infty$ и $\|f_0\left(\cdot;\omega\right)-S_n\left(f_0;\cdot\right)\|_{\infty,1}\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\omega\left(\pi/\nu\right),\ n\in\mathbb{N}$.

Вначале отметим очевидный факт: если функция $\omega\in\Omega_l\left(0,\pi\right]$, то последовательность $w=\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\omega_n=\omega\left(\pi/n\right),\ n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет условиям: $0<\omega_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty$ (т.е. $w\in M_0$) и $n^l\omega_n\uparrow$ при $n\uparrow$.

Положим (см. доказательство леммы 2) $f_0(y;\omega)=g(y;1;w)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega_nF_n(y)=\omega_1/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)\cos ny$, где $a_n(f_0)=a_n(1;w)$, а последовательность $\{a_n(1;w)\}$ определена в лемме 1 (полагаем $m=1,\varepsilon=w$). В. Э. Гейтом [24, § 2, свойство e) функции f_1; 25, § 2, п. 2, свойства e') и f) функции f_1] установлено, что $\omega_l(f_0;\pi/n)_{1,1}\asymp\omega_n,n\in\mathbb{N}$, откуда следует порядковое равенство $\omega_l(f_0;\delta)_{1,1}\asymp\omega(\delta),\ \delta\in(0,\pi]$.

Если $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n<\infty$, то в силу п. 6) леммы 1 $\big($на самом деле, в п. 6) при $m=1$ имеет место равенство $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1;w)$, в силу п. 5) этой же леммы при $m=1\big)$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)<\infty$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость всюду на $\mathbb{T}$ ряда Фурье функции f_0, и потому $f_0\in C(\mathbb{T})$, при этом $\|f_0\left(\cdot;\omega\right)\|_{\infty,1}=f_0\left(0;\omega\right)=\omega_1/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)=\omega_1/2+(1/2)\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\leq\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n$. С другой стороны, если $f_0\in C(\mathbb{T})$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)<(1/2)\omega_1+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)\leq 2f_0(0;\omega)=2\left\|f_0\left(\cdot;\omega\right)\right\|_{\infty,1}$. Далее, учитывая свойства $n^l\omega_n\uparrow(n\uparrow)$ и $\omega_n\downarrow(n\uparrow)$, а также п. 7) леммы 1 при $m=1$ $\big($на самом деле, в п. 7) при $m=1$ имеет место равенство в силу п. 5) этой же леммы при $m=1\big)$ и п. 1) леммы 1 при $m=1$, имеем

$$n\omega_n\leq 3^ln\omega_{3n}\leq 3^l\sum_{\nu=2n+1}^{3n}\omega_\nu\leq 3^l\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\omega_\nu=3^l\Big\{2\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}a_\nu(1;w)+2na_{2n+1}(1;w)\Big\}$$

$$\leq 3^l\Big\{2\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}a_\nu(1;w)+2\sum_{\nu=n+1}^{2n}a_\nu(1;w)\Big\}=2\cdot 3^l\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(1;w),$$

откуда

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\omega_\nu=\sum_{\nu=n+1}^{2n}\omega_\nu+\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\omega_\nu\leq n\omega_{n+1}+\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\omega_\nu\leq 2(3^l+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(1;w)$$

$$=2(3^l+1)\left\{f_0(0;\omega)-S_n(f_0;0)\right\}=2(3^l+1)\left\|f_0(\cdot;\omega)-S_n(f_0;\cdot)\right\|_{\infty,1}\leq C_{20}(l)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\omega_\nu.$$

3. Краткий обзор с комментариями некоторых ранее установленных одномерных результатов

Для удобства изложения мы опускаем индекс размерности в обозначениях рассматриваемых характеристик в случае $m=1$.

1) В случае $m=1$ из результатов Г. Харди и Дж. Литтльвуда [35, теоремы 5 и 7] следует утверждение: *пусть* $1\leq p<\infty,\ 0<\alpha\leq 1,\ f\in\mathrm{Lip}(\alpha,p)=\{f\in L_p(\mathbb{T})\colon\omega_1(f;\delta)_p=O(\delta^\alpha),$

$\delta \to 0\}$; *если* $\alpha > 1/p$, *то* f *эквивалентна некоторой функции* $\psi \in C(\mathbb{T})$ *с* $\omega_1(\psi;\delta)_\infty = O(\delta^{\alpha-1/p}), \delta \to 0$ (*т. е.* $\psi \in \mathrm{Lip}(\alpha-1/p,\infty) \equiv \mathrm{Lip}(\alpha-1/p)$) *и* $\|\psi(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = o(1),\ n \to \infty$.

Ш. Изуми [36, теорема 2] обобщил первую часть приведенного утверждения, установив при $1/p < \alpha < 1$ равномерную почти всюду оценку $f(x) - S_n(f;x) = O(n^{-(\alpha-1/p)}),\ n \in \mathbb{N}$, из которой следует, что f эквивалентна некоторой функции $\psi \in \mathrm{Lip}(\alpha-1/p)$ и $\|\psi(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = O(n^{-(\alpha-1/p)}),\ n \in \mathbb{N}$.

К. Яно [5, с. 73], уточняя заключение теоремы 1 [35], показал, что в случае непрерывности функции f вторая часть приведенного утверждения остается в силе и при $\alpha = 1/p$, а именно: *если* $f \in C(\mathbb{T})$ *и* $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p}),\ \delta \to 0$, *для некоторого* $p \in [1,\infty)$, *то* $\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = o(1),\ n \to \infty$. Отметим, что при $p = 1$ последний результат сводится к известному признаку Дирихле — Жордана (см., например, [9, т. 1, гл. 2, теорема 8.1; 26, гл. 1, § 39]), поскольку в этом случае условие $\omega_1(f;\delta)_1 = O(\delta)$ равносильно эквивалентности f некоторой функции ограниченной вариации (см., например, [37, п. 6.4, теорема 24; 35, п. 3.4, лемма 9], а также [15, гл. 3, п. 3.6.1; 9, т. 1, гл. 4, различные теоремы и примеры, п. 8]) и, следовательно, в силу $f \in C(\mathbb{T})$ имеем $\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = o(1),\ n \to \infty$.

2) В. В. Жук [38; 39, гл. 6, § 2] в терминах различных характеристик функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, установил ряд достаточных условий, гарантирующих равномерную сходимость ее ряда Фурье, среди которых необходимо отметить следующий результат (см. [38, теорема 2; 39, § 6.2, следствие 3]: если $f \in C(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n^{1/p} E_n(f)_p < \infty$, то $\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = o(1),\ n \to \infty$.

3) В. И. Коляда [11] в случае $m = l = 1$ провел детальное исследование вопроса о связи условия (1) (см. введение, формулировка теоремы 1) с существенной непрерывностью функции $f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$ (см. [11, § 1, 2]), а также с равномерной сходимостью ее ряда Фурье (см. [11, § 4]). В частности, им было отмечено следующее: если заранее предположить, что $f \in C(\mathbb{T})$, то равномерная сходимость ряда Фурье обеспечивается условием $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$ (см. сформулированный выше результат К. Яно), более слабым, чем (1) (случай $m = l = 1,\ p > 1$); однако, предполагая лишь, что f ограничена, условие (1) ослабить нельзя, т. е. даже для ограниченных функций никакое условие, кроме (1), равномерной сходимости ряда Фурье не гарантирует (см. [11, § 4, теорема 4]).

4) Отметим,что из условия (1) при $l = m = 1,\ p > 1$ следует соотношение $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p}),\ \delta \to 0$ (и, тем более, $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$); обратное неверно: для функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ с $\omega_1(f;\delta)_p \asymp \omega_0(\delta)$, где модуль непрерывности $\omega_0(\delta) = \delta^{1/p}(\ln(\pi e/\delta))^{-1}, \delta \in (0,\pi]$ и $\omega_0(0) = 0$, имеем $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p})(\delta \to 0)$, однако ряд (1) расходится со скоростью $\ln(\ln(en))$ при $n \to \infty$.

5) Обозначим через $BV(\mathbb{T})$ класс всех 2π-периодических функций ограниченной вариации. Известно (см., например, [40, гл. 8, § 3; 26, гл. 1, § 39; 9, т. 1, гл. 2, п. 8, теорема 8.1]), что если функция $f \in BV(\mathbb{T})$, то она ограничена, может иметь лишь разрывы непрерывности первого рода (так, что в каждой точке $y \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние пределы $f(y-0)$ и $f(y+0)$) и ее ряд Фурье в каждой точке $y \in \mathbb{R}$ сходится к значению $(1/2)\,\{f(y-0) + f(y+0)\}$ (в частности, сходится к $f(y)$ в каждой точке непрерывности f). Кроме того, если $f \in BV(\mathbb{T})$, то $f \in L_p(\mathbb{T})$ для всех $1 \le p < \infty$, при этом справедлива оценка ([35, п. 3.4, лемма 9, случай $p = 1$; п. 5, теорема 6, случай $p > 1$]; см. также [41, § 2]) $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p}),\ 1 \le p < \infty,\ \delta \in (0,\pi]$. Если же $f \in BV(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$, то $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$ $(\delta \to 0)$ при любом $1 < p < \infty$ (см., например, [41, § 2], а также [42, доказательство необходимости в утверждении теоремы 2 при $p = 1$]). Заметим, что если $\omega_1(f;\delta)_1 = o(\delta)$ $(\delta \to 0)$ для $f \in BV(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$, то f эквивалентна постоянной (см. выше п. 1) замечания 4), а для $f \in BV(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$ получаем тождественное совпадение f с постоянной. С другой стороны, если $f \in BV(\mathbb{T})$ и $\min\{f(y-0), f(y+0)\} \le f(y) \le \max\{f(y-0), f(y+0)\}$ в каждой точке $y \in \mathbb{R}$, то выполнение условия $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$ $(\delta \to 0)$ для некоторого $1 < p < \infty$ гарантирует, что $f \in C(\mathbb{T})$ (см., например, [42, теорема 2], а также [41, § 2]).

Теперь, на основании изложенного, мы можем утверждать, что *существуют ограничен-*

ные существенно разрывные 2π*-периодические функции* $\varphi \in BV(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T})$ *такие, что* $\omega_1(\varphi;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$, $\delta \in (0,\pi]$, *и* $\omega_1(\varphi;\delta)_p \neq o(\delta^{1/p})$ $(\delta \to 0)$ *при любом* $1 \le p < \infty$.

Ряды Фурье таких функций φ сходятся в каждой точке $\mathbb{R}$, но сходимость заведомо не является равномерной. Отсюда, в частности, следует, что если отказаться от условия $f \in C(\mathbb{T})$, то сформулированное выше утверждение К. Яно теряет силу, так что выполнение условия $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$ при всех $1 \le p < \infty$ не гарантирует равномерную сходимость ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$. Кроме того, ясно, что для таких функций $\varphi \in L_p(\mathbb{T})$ ряд (1) (при $l = m = 1$, $1 \le p < \infty$) всегда расходится, поскольку в противном случае мы имели бы $\omega_1(\varphi;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$ $(\delta \to 0)$.

Типичным представителем указанного выше класса функций φ является $\varphi(y) = \operatorname{sgn}\sin y$, $y \in \mathbb{R}$. Поскольку

$$\varphi(y) = \{-1, y \in ((2k-1)\pi, 2k\pi);\ 0,\ y = k\pi;\ 1,\ y \in (2k\pi,(2k+1)\pi);\ k \in \mathbb{Z}\},$$

то очевидно, что $\varphi \in BV(\mathbb{T})$, $|\varphi(y)| \le 1$ для любого $y \in \mathbb{R}$, точки $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, являются точками существенного разрыва первого рода, причем в каждой точке $y \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$\min\{\varphi(y-0),\varphi(y+0)\} \le \varphi(y) = \left(\frac{1}{2}\right)\{\varphi(y-0)+\varphi(y+0)\} \le \max\{\varphi(y-0),\varphi(y+0)\}.$$

Оценка $\omega_1(\varphi;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$, $1 \le p < \infty$, справедливая для любой функции из $BV(\mathbb{T})$, ранее была отмечена также в [41, § 2]. Справедливость соотношения $\omega_1(\varphi;\delta)_p \neq o(\delta^{1/p})(\delta \to 0)$, $1 \le p < \infty$, также очевидна, поскольку в противном случае было бы $\varphi \in C(\mathbb{T})$, что в силу определения φ не представляется возможным. В. И. Коляда [43, § 3, замечание 1] указал также, что $\omega_1(\varphi;\delta)_1 = O(\delta)$ и $\delta^{1/p} = O(\omega_1(\varphi;\delta)_p)$ при любом $p \in (1,\infty)$; отсюда фактически имеем $\omega_1(\varphi;\delta)_p \asymp \delta^{1/p}$, $\delta \in (0,\pi]$, $1 < p < \infty$.

6) В связи с изложенным в п. 5) отметим также следующее: *имеются существенно неограниченные* (*и потому существенно разрывные*) *на* $\mathbb{T}$ *функции* f_1 *и* f_2, *принадлежащие* $L_p(\mathbb{T})$ *при любом* $1 < p < \infty$, *и такие, что* $\omega_1(f_1;\delta)_p \asymp \delta^{1/p}$, $\delta \in (0,\pi]$, *и* $\omega_1(f_2;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$, $\delta \to 0$. Таким образом, условие $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$, $\delta \to 0$, также не гарантирует равномерную сходимость ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ при $1 < p < \infty$ (см. пп. 3) и 4)). Функции f_1 и f_2 определяются разложениями в ряды Фурье, которые сходятся при всех $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (см., например, [9, т. 1, гл. VII, п. 2; 26, гл. X, § 2, теорема 1]): $f_1(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\cos nx$ и $f_2(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(n\ln(en))^{-1}\cos nx$. Существенная неограниченность на $\mathbb{T}$ (точнее, в любой окрестности нуля) функций f_1 и f_2 следует из расходимости к $+\infty$ их рядов Фурье при $x = 0$ (см., например, [26, гл. VIII, § 13]). Поскольку $a_n(f_1) \downarrow 0, a_n(f_2) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p(f_1) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p(f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}(\ln(en))^{-p} < \infty,$$

то в силу теоремы Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см., например, [26, гл. X, § 3; 9, т. 2, гл. 12, лемма 6.6]): $f \in L_p(\mathbb{T}) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p(f) < \infty$ при $1 < p < \infty$ и $a_n(f) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$, имеем $f_1, f_2 \in L_p(\mathbb{T})$ при любом $1 < p < \infty$. Далее, в силу неравенств А. А. Конюшкова (см. [4, § 1, теорема 4; 44, § 2, неравенства (19) и (21)]), выписанных для косинус-ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$:

$$C_{21}(p)n^{1-1/p}a_{2n}(f) \le E_{n-1}(f)_p \le C_{22}(p)\Big\{n^{1-1/p}a_n(f) + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-2}a_\nu^p(f)\Big)^{1/p}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеем

$$2^{-1}C_{21}(p) \le n^{1/p}E_{n-1}(f_1)_p \le 2C_{22}(p), \quad 2^{-2}C_{21}(p) \le n^{1/p}\ln(en)E_{n-1}(f_2)_p \le 2C_{22}(p),$$

откуда получаем $E_{n-1}(f_1)_p \asymp n^{-1/p},\ n \in \mathbb{N}$, и $E_{n-1}(f_2)_p = o(n^{-1/p})$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $\omega_1(f_1; \pi/n)_p \asymp n^{-1/p},\ n \in \mathbb{N}$, и $\omega_1(f_2; \pi/n)_p = o(n^{-1/p})$ при $n \to \infty$.

7) Положим $f_3(x;p;\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-\alpha-1}\cos nx$, где $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p(f_3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p\alpha+1)} < \infty$, то $f_3 \in L_p(\mathbb{T})$ при всех $\alpha > 0$. Далее, в силу неравенств А. А. Конюшкова (см. п. 6)) при любом $\alpha > 0$ имеем $2^{1/p-\alpha-1}C_{21}(p) \le n^{\alpha}E_{n-1}(f_3)_p \le (1+(p\alpha)^{-1/p})C_{22}(p)$, откуда $E_{n-1}(f_3)_p \asymp n^{-\alpha},\ n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\omega_1(f_3;\delta)_p \asymp \delta^{\alpha}$ при $\alpha < 1$ и $\omega_1(f_3;\delta)_p \asymp \delta(\ln(\pi e/\delta))^{1/p}$ при $\alpha = 1,\ \delta \in (0,\pi]$.

В случае $\alpha > 1/p$ ряд, с помощью которого определяется f_3, сходится абсолютно и равномерно всюду на $\mathbb{R}$ и является рядом Фурье своей суммы $f_3(\cdot;p;\alpha) \in C(\mathbb{T})$, при этом (см. также п. 1)) $\|f_3(\cdot;p;\alpha) - S_n(f_3;\cdot)\|_{\infty} = O(n^{-(\alpha-1/p)}), n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, поскольку $\alpha > 1/p$, имеем $\|f_3(\cdot;p;\alpha) - S_n(f_3;\cdot)\|_{\infty} \ge f_3(0;p;\alpha) - S_n(f_3;0) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-(\alpha-1/p+1)} \ge (\alpha-1/p)^{-1}(n+1)^{-(\alpha-1/p)} \ge (\alpha-1/p)^{-1}2^{1/p-\alpha}n^{-(\alpha-1/p)},\ n \in \mathbb{N}$. Таким образом, при $1 < p < \infty$ и $1/p < \alpha < 1$ существует функция $f_3(\cdot;p,\alpha) \in L_p(\mathbb{T})$ с $\omega_1(f_3;\delta)_p \asymp \delta^{\alpha},\ \delta \in (0,\pi]$, реализующая порядковое равенство в оценке Ш. Изуми (см. п. 1)), и, следовательно, указанная оценка является точной в смысле порядка на классах $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$.

8) В 1976 г. была опубликована работа А. М. Гарсиа [45], привлекшая внимание автора благодаря случайно обнаруженному (после публикации [1]) в РЖ “Математика” (1992 г., № 5 Б57) реферату статьи [46] с весьма заманчивым названием.

В этой работе, в частности, установлен следующий результат ([45, теорема I.3], см. также [47, теорема 3.2]): *пусть* $1 < p < \infty, f \in L_p(\mathbb{T})$ *и сходится интеграл*

$$\int_0^{\pi} h^{-(1/p+1)} \left\|\Delta_h^1 f(\cdot)\right\|_p dh < \infty; \tag{10}$$

тогда частные суммы $S_n(f;x)$ *ряда Фурье функции* f *сходятся равномерно на* $\mathbb{T}$.

В силу справедливости порядковых равенств $(1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T}))$

$$\int_0^{\pi} t^{-(1/p+1)} \left\|\Delta_t^1 f(\cdot)\right\|_p dt \asymp \int_0^{\pi} t^{-(1/p+1)}\omega_1(f;t)_p\, dt \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega_1\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \tag{11}$$

условия (10) и (1) (случай $l = m = 1,\ p > 1$) являются равносильными, так что сформулированный выше результат А.М.Гарсиа — достаточное условие для равномерной сходимости на $\mathbb{T}$ ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$, — к тому времени был уже известен и установлен П. Л. Ульяновым [3] (см. введение, замечание 3) в 1966 г.

Эквивалентность (в смысле сходимости) интегралов в (11) известна (см., например, [48, замечания, п. (i), с. 72; 46, п. 2, замечание 2.2]) и следует из неравенств $\left\|\Delta_h^1 f(\cdot)\right\|_p \le \omega_1(f;\delta)_p \le 10\delta^{-1}\int_0^{\delta}\left\|\Delta_h^1 f(\cdot)\right\|_p dh,\ 0 \le h \le \delta$, левое из которых очевидно, а правое доказано в [45, п. 2] при $f = T$, где $T(x) = \sum_{|\nu|\le n} c_{\nu}\exp(i\nu x),\ c_0 = 0$. Приведенная в [45] схема доказательства проходит и в случае произвольной функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ также для значений $p = 1$ и $p = \infty$, поскольку при доказательстве, по существу, используется лишь инвариантность L_p-нормы относительно сдвига, т. е. $\|f(\cdot+h)\|_p = \|f(\cdot)\|_p$ для любых $h \in \mathbb{R}$ и $f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 \le p \le \infty$ (см., например, [39, § 1.4]).

9) В [46, теорема 5.1, неравенство (5.2)] приведено доказательство следующего утверждения: пусть $1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T})$ и $\int_0^1 t^{-(1/p+1)}\omega_1(f;t)_p\, dt < \infty$; тогда

$$\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_{\infty} \le C_{24}(p)\int_0^{1/n} t^{-(1/p+1)}\omega_2(f;t)_p\, dt, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Поскольку сходимость указанного интеграла (гарантирующая эквивалентность f некоторой функции из $C(\mathbb{T})$, которая после надлежащего изменения на множестве меры “нуль” снова обозначена через f) равносильна сходимости ряда (1) при $m=1,\ l=2,\ 1<p<\infty$, а величина в правой части (12) (в силу очевидного неравенства $\omega_l(f;\delta)_p \le 2^{l-1}\omega_1(f;\delta)_p$ вместо $\omega_2(f;\delta)_p$ можно положить $\omega_l(f;\delta)_p,\ l\in\mathbb{N}$) по порядку совпадает с соответствующей величиной в правой части (3), то оценка (3) в случае $m=1,\ 1<p<\infty$ была уже известна до указанных работ автора [1; 2].

10) В замечании 5.5 [46, п. 5] приводится утверждение о неулучшаемости оценки (12) (с предварительной заменой $\omega_2(f;\delta)_p$ на $\omega_1(f;\delta)_p$) в том смысле, что в ней O большое нельзя заменить на o малое.

Для доказательства этого утверждения рассматривается функция $g_\gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma}\cos nx$, где $1<\gamma+1/p<2$ и $1<p<\infty$, и с помощью одного результата С. Алянчича и М. Томича [49, теорема 4] устанавливается, что $g_\gamma\in L_p(\mathbb{T})$ и $\omega_1(g_\gamma;\delta)_p=O(\delta^{\gamma-1+1/p}),\ \delta\in(0,1]$. Далее, предположение о допустимости указанной выше замены O большого на o малое, приводит к оценке $\|g_\gamma(\cdot)-S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty=o(n^{-(\gamma-1)})$ $(n\to\infty)$, откуда $E_{n-1}(g_\gamma)_\infty=o(n^{-(\gamma-1)})$ $(n\to\infty)$ и, следовательно (в силу правого неравенства в (6) при $m=l=1,\ p=\infty$), $\omega_1(g_\gamma;\delta)_\infty=o(\delta^{\gamma-1})$ при $\delta\to0$. Последнее соотношение противоречит известному асимптотическому равенству (см., например, [9, т. 1, гл. 5, пример 11]) $g_\gamma(h)-g_\gamma(0)\simeq C_{25}(\gamma)h^{\gamma-1}$ $(h\to+0)$, которое имеет место при $1<\gamma<2$. Указанное ограничение на γ обусловливает рассмотрение значений $1<\gamma<2-1/p$ (см. [46, п. 5, с. 317]). Таким образом, в процессе доказательства утверждения в замечании 5.5 [46] фактически установлено, что при $1<p<\infty$ и $1<\gamma<2-1/p$ для функции $g_\gamma\in L_p(\mathbb{T})$ справедливы оценки $\omega_1(g_\gamma;\delta)_p=O(\delta^{\gamma-1+1/p}),\ \delta\in(0,1]$, и $\omega_1(g_\gamma;\delta)_\infty\ne o(\delta^{\gamma-1})$ при $\delta\to0$.

Подробное изложение схемы доказательства утверждения в замечании 5.5 [46] обусловлено наличием ряда необходимых комментариев, поскольку попытка любой ценой добиться желаемого противоречия часто приводит к весьма неожиданным результатам.

10.1) Полагая $\gamma=\alpha+1-1/p$ и учитывая $1<\gamma<2-1/p \iff 1/p<\alpha<1$, для функции $g_\gamma\equiv g_{\alpha,p}\in L_p(\mathbb{T})$ имеем $\omega_1(g_{\alpha,p};\delta)_p=O(\delta^\alpha),\ \delta\in(0,1]$, и $\omega_1(g_{\alpha,p};\delta)_\infty\ne o(\delta^{\alpha-1/p})$ $(\delta\to0)$, откуда следует, что в утверждении Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см. п. 1)): $f\in\mathrm{Lip}(\alpha,p)\implies f\sim g\in\mathrm{Lip}(\alpha-1/p)$ показатель $\alpha-1/p$ является точным, т. е. не допускает увеличения.

Последний факт значительно ранее установлен в уже цитированной работе П. Л. Ульянова [3, § 4, теорема 5′ и замечание 6] (см. также [29, доказательство теоремы 1]).

10.2) После того как была выписана оценка $\|g_\gamma(\cdot)-S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty=o(n^{-(\gamma-1)})$ $(n\to\infty)$, можно было бы остановиться, поскольку такая оценка для g_γ невозможна как при $\gamma+1/p>1$, так и при $\gamma>1$, а именно: для функции g_γ при $\gamma>1$ имеет место порядковое равенство $\|g_\gamma(\cdot)-S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty\asymp n^{-(\gamma-1)},\ n\in\mathbb{N}$ (см. выше в п. 7)) функцию $f_3(\cdot;p;\alpha)\equiv g_\gamma(\cdot)$ при $\alpha=\gamma-1+1/p$).

10.3) Условие $\gamma>1$ (вместо $\gamma+1/p>1$) связано не только с поведением величины $g_\gamma(h)-g_\gamma(0)$ при $h\to+0$, но и также с тем, что в противном случае ($\gamma\le1$) оценка (12) для функции g_γ теряет смысл, поскольку последовательность $\{S_n(g_\gamma;0)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится к $+\infty$ со скоростью $n^{1-\gamma}$ при $\gamma<1$ и $\ln(en)$ при $\gamma=1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_\gamma(\cdot)-S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty=+\infty$. Кроме того, из одного результата Г. Лоренца [50, § 4, теорема 8] (см. также [26, гл. 2, § 3 и гл. 10, § 9]) следует, что для функции g_γ при $1<\gamma<2$ имеет место порядковое равенство $\omega_1(g_\gamma;\delta)_\infty\asymp\delta^{\gamma-1},\ \delta\in(0,\pi]$.

10.4) Поскольку $g_\gamma(\cdot)\equiv f_3(\cdot;p;\alpha)$ при $\gamma=\alpha+1-1/p$, то учитывая приведенные выше оценки, получаем, что для функции g_γ при $1<\gamma<2-1/p$ имеют место порядковые равенства $(n\in\mathbb{N})$:

$$\|g_\gamma(\cdot)-S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty\asymp n^{-(\gamma-1)}\asymp E_{n-1}(g_\gamma)_\infty\asymp\omega_1\Big(g_\gamma;\frac{\pi}{n}\Big)_\infty\asymp\int\limits_0^{1/n}t^{-(1/p+1)}\omega_1(g_\gamma;t)_p\,dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Il'yasov N.A.** On the order of magnitude of the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series with respect to cubes on the function classes $H^l_{p,m}[\omega]$ // Anal. Math. 2002. Vol. 28, no. 1. P. 25–42.
2. **Ильясов Н.А.** О порядке равномерной сходимости рядов Фурье периодических функций из классов $H^l_p[\omega]$ // Вестн. Бакинс. ун-та. Сер. физ.-мат.наук. 1998. № 2. С. 158–170.
3. **Ульянов П.Л.** Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1967. Т. 72(114), № 2. С. 193–225.
4. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.
5. **Yano K.** On Hardy and Littlewood's theorem // Proc. Japan. Acad. 1957. Vol. 33, no. 2. P. 73–74.
6. **Геронимус Я.Л.** О некоторых свойствах функций класса L_p // Изв. вузов. Математика. 1958. № 1. С. 24–32.
7. **Темиргалиев Н.Т.** О связи теорем вложения с равномерной сходимостью кратных рядов Фурье // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 2. С. 139–148.
8. **Жижиашвили Л.В.** Сопряженные функции двух переменных и двойные ряды Фурье // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 4. С. 765–768.
9. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.; Т. 2. 537 с.
10. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
11. **Коляда В.И.** О существенной непрерывности суммируемых функций // Мат. сб. 1979. Т. 108(150), № 3. С. 326–349.
12. **Стейн И.М.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
13. **Коляда В.И.** О вложении в классы непрерывных функций многих переменных // Мат. сб. 1976. Т. 99(141), № 3. С. 421–432.
14. **Темиргалиев Н.Т.** Об одной теореме вложения // Изв. вузов. Математика. 1973. № 7. С. 103–111.
15. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
16. **Темиргалиев Н.Т.** О вложении некоторых классов функций в $C\left([0,2\pi]^m\right)$ // Изв. вузов. Математика. 1978. № 8(195). С. 88–90.
17. **Коляда В.И.** Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений // Мат. сб. 1977. Т. 102(144), № 2. С. 195–215.
18. **Ильясов Н.А.** К обратной теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 53–61.
19. **Ильясов Н.А.** О порядке убывания равномерных модулей гладкости на классах функций $E_{p,m}[\varepsilon]$ // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 4. С. 519–536.
20. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
21. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. I // Мат. сб. 1951. Т. 29(71), № 1. С. 225–232.
22. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1955. Т. 19, № 4. С. 221–246.
23. **Ильясов Н.А.** О приближении периодических функций средними Фейера — Зигмунда в разных метриках // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 48–57.
24. **Гейт В.Э.** О точности некоторых неравенств в теории приближений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 5. С. 571–582.
25. **Гейт В.Э.** О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Математика. 1972. № 7(122). С. 19–30.
26. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
27. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1953. Т. 17, № 2. С. 87–98.
28. **Гейт В.Э.** Об условиях вложения классов $H^\omega_{k,\mathbb{R}}$ и $\widetilde{H}^\omega_{k,\mathbb{R}}$ // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 169–178.
29. **Андриенко В.А.** Вложение некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1967. Т. 31, № 6. С. 1311–1326.
30. **Ульянов П.Л.** Вложение некоторых классов функций H^ω_p // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.

31. **Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.** Теоремы вложения в конструктивной теории приближений // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 9. С. 107–147.
32. **Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.** О классах Бесова, Бесова — Никольского и об оценках смешанных модулей гладкости дробных производных // Тр. МИРАН. 2003. Т. 243. С. 244–256.
33. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для некоторых классов периодических функций в L_p, $1 \le p \le \infty$ // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 6. С. 1301–1304.
34. **Ильясов Н.А.** Приближение периодических функций средними Зигмунда // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 3. С. 367–382.
35. **Hardy G.H., Littlewood J.E.** A convergence criterion for Fourier series // Math. Zeitschr. 1928. Bd. 28, № 3. S. 612–634.
36. **Izumi Shin-ichi.** Some trigonometrical series. XV //Proc. Japan. Acad. 1955. Vol. 31, № 7. P. 399–401.
37. **Hardy G.H., Littlewood J.E.** Some properties of fractional integrals. I. // Mathem. Zeitschr. 1928. Bd. 27, № 4. S. 565–606.
38. **Жук В.В.** О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи частных сумм ее ряда Фурье // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 5. С. 1015–1018.
39. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 366 с.
40. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
41. **Геронимус Я.Л.** О некоторых теоремах вложения // Изв. вузов. Математика. 1965. № 6(49). С. 53–62.
42. **Голубов Б.И.** О непрерывных функциях ограниченной p-вариации // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 305–312.
43. **Коляда В.И.** О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Тр. МИАН. 1988. Т. 181. С. 117–136.
44. **Конюшков А.А.** О наилучших приближениях при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 56–78.
45. **Garsia A.M.** A remarkable inequality and the uniform convergence of Fourier series // Indiana Univ. Math. J. 1976. Vol. 25, no. 1. P. 85–102.
46. **Oehring Ch.** On Garsia's criterion for uniform convergence of Fourier series // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1991. Vol. 51, no. 2. P. 305–322.
47. **Garsia A.M.** Combinatorial inequalities and smoothness of functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 82, no. 2. P. 157–170.
48. **Neugebauer C.J.** The L^p modulus of continuity and Fourier series of Lipschitz functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 64, no. 1. P. 71–76.
49. **Aljancic S., Tomic M.** Uber den stetigkeitsmodul von Fourier-reihen mit monotonen koeffizienten // Math. Zeitschr. 1965. Bd. 88, № 3. S. 274–284.
50. **Lorentz G.G.** Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen // Math. Zeitschr. 1948. Bd. 51, № 2. S. 135–149.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики Национальной АН Азербайджана
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

Поступила 09.04.2015