ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ОГРАНИЧЕНИИ[1]

Д. О. Зыков

Исследуются наибольшее и наименьшее значения коэффициентов нечетных тригонометрических полиномов, не превосходящих функции $\varphi(x) = x$ на отрезках $[0, \pi]$ и $[0, 2\pi]$. Получены двусторонние оценки первого коэффициента и найдено асимптотическое поведение его максимального и минимального значений по порядку полинома. Даны оценки старших коэффициентов.

Ключевые слова: тригонометрический полином, односторонние ограничения.

D. O. Zykov. Coefficients of trigonometric polynomials under a one-sided constraint.

For odd trigonometric polynomials bounded from above by the function $\varphi(x) = x$ on the intervals $[0, \pi]$ and $[0, 2\pi]$, we study the maximum and minimum values of coefficients. We obtain two-sided estimates for the first coefficient and find the asymptotic behavior of its maximum and minimum values with respect to the order of the polynomial. We estimate the leading coefficients.

Keywords: trigonometric polynomial, one-sided constraints.

1. Введение

В данной статье изучаются наибольшее и наименьшее значения коэффициентов нечетных тригонометрических полиномов

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx, \tag{1.1}$$

удовлетворяющих одному из двух ограничений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \quad 0 \le x \le \pi; \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{1.3}$$

В частности, доказано, что в предположении (1.3) для первого коэффициента полинома справедливы (в некотором смысле окончательные) оценки

$$-6 \le a_1 \le 2.$$

Экстремальные задачи для тригонометрических полиномов — обширный раздел теории функций (см., например, монографии [1;2], работы [3;4] и приведенную в них библиографию). Большое число исследований было посвящено экстремальным задачам для коэффициентов неотрицательных тригонометрических полиномов (см., например, работы [5–7] и приведенную в них библиографию). Важное значение в теории функций имеет результат Л. Фейера (1915)

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

о максимальном значении первого коэффициента неотрицательного тригонометрического полинома с фиксированным средним значением [8] (см. изложение этого результата в [2, т. 2, отд. VI]). Для старших коэффициентов такую задачу решили (1928) Е. Егервари и О. Сасс [9].

Работа разбита на два раздела в соответствии с ограничениями (1.2) и (1.3).

2. Одностороннее ограничение на отрезке $[0, \pi]$

2.1. Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n(\pi)$ есть множество нечетных тригонометрических полиномов (1.1) с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{2.1}$$

При $1 \le k \le n$ рассмотрим наибольшее и наименьшее значение

$$A_k^+(n) = \sup\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\}, \quad A_k^-(n) = \inf\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\} \tag{2.2}$$

коэффициентов $a_k = a_k(s_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{F}_n$. В этом разделе мы найдем конструктивные оценки для коэффициентов тригонометрических полиномов различных степеней. Наиболее полно эти величины были изучены для $k = 1$.

2.2. Случай $k = 1,\ n = 2$

При $n = 2,\ k = 1$ величину (2.2) можно вычислить точно.

Теорема 1. *При* $n = 2,\ k = 1$ *величина* (2.2) *имеет следующее значение*:

$$A_1^+(2) = \frac{\pi}{2}. \tag{2.3}$$

Наибольшее значение первого коэффициента в классе $\mathfrak{F}_2(\pi)$ *имеет полином*

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$ ограничение (2.1) принимает вид

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x \le x, \quad 0 < x < \pi.$$

В точке $x = \pi/2$ последнее ограничение принимает вид $a_1 \le \pi/2$, а это влечет оценку $A_1^+(2) \le \pi/2$. Для обоснования такой же оценки снизу величины $A_1^+(2)$ воспользуемся полиномом f_2, определенным в (2.4). Первый коэффициент этого полинома как раз и имеет значение $\pi/2$. Поэтому для обоснования первого равенства в (2.3) осталось показать, что $f_2 \in \mathfrak{F}_2$, т. е. проверить, что разность $\varphi(x) = x - f_2(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ неотрицательная. Производная

$$\varphi'(x) = 1 - f_2'(x) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\cos x - \cos 2x\right) = 2\cos x\left(\cos x - \frac{\pi}{4}\right)$$

функции φ на $[0, \pi]$ обращается в ноль лишь в двух точках: $x_1 = \arccos(\pi/4)$ и $x_2 = \pi/2$; более того, производная меняет знак в точке x_1 с “+” на “−” и в точке x_2 с “−” на “+”. Отсюда заключаем, что функция φ на отрезке $[0, x_1]$ возрастает от значения $\varphi(0) = 0$, убывает на $[x_1, x_2]$ до значения $\varphi(x_2) = \varphi(\pi/2) = 0$ и, наконец, возрастает на $[x_2, \pi]$. Следовательно, на отрезке $[0, \pi]$ функция φ действительно неотрицательная. Утверждение (2.3) и экстремальность полинома f_2 доказаны. □

2.3. Поведение величины $A_1^+(n)$ по n

В этом подразделе мы исследуем поведение величины $A_1^+(n)$ по n при $n \to +\infty$.

Теорема 2. *Для величин $A_1^+(n)$ и $A_1^-(n)$ справедливы следующие два утверждения.*
1. *При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $A_1^+(n) \leq 2$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^+(n) = 2$.*

Доказательство. Начнем с первого утверждения теоремы. Функция $\sin x$ на отрезке $[0,\pi]$ неотрицательная. Умножим неравенство (2.1) для $x \in [0,\pi]$ на функцию $\sin x$ и проинтегрируем по отрезку $[0,\pi]$. Учитывая, что $\int_0^\pi \sin x \sin kx\, dx = 0,\ k \neq 1$, получаем неравенство

$$a_1 \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx \leq \int\limits_0^\pi x \sin x\, dx. \tag{2.5}$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int\limits_0^\pi x\sin x\, dx = \pi,$$

то неравенство (2.5) дает оценку $a_1 \leq 2$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим конкретную функцию f, которая для $x \in [0,\pi)$ определена равенством $f(x) = x$. Разложение этой функции в ряд Фурье по системе $\{\sin kx\}_{k=1}^\infty$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k \sin kx, \quad \text{где} \quad a_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k}, \quad k \geq 1;$$

для дальнейшего важно, что $a_1 = 2$. Сгладим функцию f следующим образом. Используя параметр $\delta \in (0,\pi)$, определим на $[0,\pi]$ функцию

$$f_\delta(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi-\delta]; \\ \tau_\delta(x), & x \in [\pi-\delta, \pi], \end{cases}$$

где

$$\tau_\delta(x) = -\frac{\pi}{\delta^2}x^2 + \frac{2\pi^2 - 2\pi\delta + \delta^2}{\delta^2}x - \frac{\pi(\pi^2 - 2\pi\delta + \delta^2)}{\delta^2}$$

есть многочлен второй степени. В точке $x = \pi - \delta$ прямая $f(x) = x$ касается параболы τ_δ, к тому же ветви параболы направлены вниз. Поэтому всюду на оси имеет место неравенство $\tau_\delta(x) \leq x,\ x \in \mathbb{R}$. Продолжим функцию f_δ нечетно на $[-\pi, 0]$ и 2π-периодически на всю ось. Нетрудно понять, что будет выполняться неравенство

$$f_\delta(x) \leq x, \quad x \geq 0. \tag{2.6}$$

Функция f_δ на отрезке $[0,\pi-\delta]$ совпадает с функцией $f(x) = x$, а затем гладко переходит в параболу, пересекающую ось Ox в точке $x = \pi$. Функция f_δ на отрезке $[0,\pi]$ непрерывно дифференцируема и на концах отрезка имеет нулевые значения: $f_\delta(0) = f_\delta(\pi) = 0$. Поэтому ряд Фурье этой функции

$$f_\delta(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k(\delta)\sin kx, \quad a_k(\delta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f_\delta(x)\sin kx\, dx,$$

сходится к ней равномерно на всей оси. Выясним поведение коэффициентов Фурье $a_k(\delta)$ с увеличением k. Воспользовавшись несколько раз формулой интегрировании по частям, получаем

$$\int_0^\pi f_\delta(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{k}\int_0^\pi f'_\delta(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{k^2}\int_0^\pi f'_\delta(x) d\sin kx$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(f'_\delta(x)\sin kx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''_\delta(x)\sin kx dx\right) = -\frac{1}{k^2}\int_0^\pi f''_\delta(x)\sin kx\,dx$$

$$= -\frac{1}{k^2}\int_{\pi-\delta}^\pi f''_\delta(x)\sin kx\,dx = -\frac{2\pi}{k^3\delta^2}(\cos k\pi - \cos k(\pi-\delta)) = (-1)^{k-1}\frac{2\pi}{k^3\delta^2}(1-\cos k\delta).$$

Окончательно имеем

$$a_k(\delta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_\delta(x)\sin kx\,dx = (-1)^{k-1}\frac{4}{k^3\delta^2}(1-\cos k\delta), \quad k \geq 1. \tag{2.7}$$

Видно, что (для фиксированного δ) при $k \to \infty$ для коэффициентов справедливо соотношение $a_k(\delta) = O\left(k^{-3}\right)$; следовательно, существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что

$$|a_k(\delta)| \leq \frac{C(\delta)}{k^3}, \quad k \geq 1.$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = S_n(x; f_\delta) = \sum_{k=1}^n a_k(\delta)\sin kx$$

ряда Фурье функции f_δ. Для разности

$$f_\delta(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty a_k(\delta)\sin kx$$

при $x \in [0, 2\pi]$ справедлива оценка

$$|f_\delta(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^\infty |a_k(\delta)||\sin kx| \leq \sum_{k=n+1}^\infty \frac{C(\delta)}{k^3}\,xk \leq x\,\epsilon_n, \quad \epsilon_n = \epsilon_n(\delta) = C(\delta)\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^2};$$

отметим, что $\epsilon_n \to 0,\ n \to \infty$. Отсюда и из (2.6) для сумм S_n теперь имеем

$$S_n(x) = f_\delta(x) + S_n(x) - f_\delta(x) \leq f_\delta(x) + |f_\delta(x) - S_n(x)| \leq x + x\epsilon_n = x(1+\epsilon_n), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Тригонометрический полином

$$s_n(x) = \frac{S_n(x)}{1+\epsilon_n} \tag{2.8}$$

имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $s_n(x) \leq x,\ x \in [0, 2\pi]$, и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Первый коэффициент полинома s_n есть $a_1(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому при любом $n \geq 1$ справедливы оценки

$$\frac{a_1(\delta)}{1+\epsilon_n} \leq A_1^+(n) \leq 2.$$

Отсюда заключаем, что при любом $0 < \delta < \pi$

$$a_1(\delta) \leq \lim_{n\to\infty} A_1^+(n) \leq 2. \tag{2.9}$$

В соответствии с формулой (2.7) имеем

$$a_1(\delta) = 4\frac{1-\cos\delta}{\delta^2} \to 2, \quad \delta \to +0. \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) следует, что $A_1^+(n) \to 2,\ n \to \infty$. Второе утверждение также доказано. □

З а м е ч а н и е. При $n \geq 2$

$$A_1^-(n) = -\infty. \tag{2.11}$$

В самом деле, при любом $a_1 < 0$ полином $a_1 \sin x$ на отрезке $[0,\pi]$ неположительный, а значит, принадлежит классу $\mathfrak{F}_n(\pi)$. Отсюда следует (2.11).

2.4. Случай $2 \leq k \leq n$

Теперь мы рассмотрим возможные величины старших коэффициентов многочлена.

Теорема 3. *При $2 \leq k \leq n$ справедливы следующие два утверждения:*

$$A_k^+(n) = +\infty, \quad A_k^-(n) = -\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что $|\sin kx| \leq k\sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$, при любом $k \geq 2$. Следовательно, при любом $a \geq 0$ многочлен

$$f_k(x) = a(k\sin x \pm \sin kx)$$

неотрицательный на $[0,\pi,]$; тем более он удовлетворяет ограничению (2.1). Отсюда следуют оба утверждения теоремы. □

3. Одностороннее ограничение на отрезке $[0, 2\pi]$

3.1. Постановка задачи

Пусть теперь $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n(2\pi)$ есть множество нечетных тригонометрических полиномов вида (1.1), удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \leq x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \tag{3.1}$$

При $1 \leq k \leq n$ рассмотрим наибольшее и наименьшее значения

$$A_k^+(n) = \sup\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n(2\pi)\}, \quad A_k^-(n) = \inf\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n(2\pi)\} \tag{3.2}$$

коэффициентов $a_k = a_k(s_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{F}_n$.

В неравенстве (3.1) заменим x на $2\pi - x$; в результате получим эквивалентное ограничение

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \leq (2\pi - x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \tag{3.3}$$

Пусть $\mathfrak{G}_n$ есть множество нечетных тригонометрических полиномов

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами $b_k = b_k(\sigma_n)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \le (2\pi - x), \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{3.4}$$

Рассмотрим наибольшее и наименьшее значения

$$B_k^+(n) = \sup\{b_k(\sigma_n)\colon \sigma_n \in \mathfrak{G}_n\}, \quad B_k^-(n) = \inf\{b_k(\sigma_n)\colon \sigma_n \in \mathfrak{G}_n\} \tag{3.5}$$

коэффициентов $b_k = b_k(\sigma_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{G}_n$. Сравнивая ограничения (3.3) и (3.4), заключаем, что

$$A_k^-(n) = -B_k^+(n), \quad A_k^+(n) = -B_k^-(n), \quad 1 \le k \le n. \tag{3.6}$$

Отметим еще, что при фиксированном k величины $A_k^+(n)$ и $B_k^+(n)$ по n не убывают, а $A_k^-(n)$ и $B_k^-(n)$ не возрастают. Это наблюдение пригодится нам в дальнейшем доказательстве.

В данном разделе будут приведены конструктивные оценки величин (3.2); как и в разд. 2 наиболее полно они будут изучены при $k = 1$.

3.2. Случай $k = 1$, $n = 2$

При $n = 2$, $k = 1$ обе величины (3.2) нетрудно вычислить точно.

Теорема 4. *При $n = 2$, $k = 1$ величины* (3.2) *имеют следующие значения*:

$$A_1^+(2) = \frac{\pi}{2}, \quad A_1^-(2) = -\frac{3\pi}{2}. \tag{3.7}$$

Наибольшее и наименьшее значения первого коэффициента имеют соответственно полиномы

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, \quad g_2(x) = -\frac{3\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{3.8}$$

Доказательство. При $n = 2$ ограничение (3.1) принимает вид

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x \le x, \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{3.9}$$

В точке $x = \pi/2$ это ограничение дает оценку $a_1 \le \pi/2$. А это влечет оценку $A_1^+(2) \le \pi/2$. Для обоснования такой же оценки снизу воспользуемся полиномом f_2, определенным в (3.8). Первый коэффициент этого полинома как раз и имеет значение $\pi/2$. Поэтому для обоснования первого равенства в (3.7) осталось показать, что $f_2 \in \mathfrak{F}_2$, т. е. проверить неравенство $f_2(x) \le x$, $0 \le x \le 2\pi$. На отрезке $[\pi, 2\pi]$ это неравенство очевидно. Выше (в доказательстве теоремы 1) было установлено, что оно выполняется и на отрезке $[0, \pi]$. Тем самым доказаны первое утверждение (3.7) и экстремальность полинома f_2.

Оценим теперь коэффициент a_1 при ограничении (3.9) снизу. Для этого положим $x = 3\pi/2$ в (3.9); в результате получаем оценку $a_1 \ge -3\pi/2$. Именно такое значение имеет первый коэффициент полинома g_2, определенного в (3.8). Поэтому для обоснования второго утверждения теоремы осталось проверить, что полином g_2 удовлетворяет ограничению $g_2(x) \le x$, $0 \le x \le 2\pi$, т. е. разность $\psi(x) = x - g_2(x)$ неотрицательная на отрезке $[0, 2\pi]$. Имеем

$$\psi'(x) = 1 - g_2'(x) = 1 + \frac{3\pi}{2}\cos x + \cos 2x = 2\cos x\Big(\cos x + \frac{3\pi}{4}\Big).$$

Эта функция на $[0, 2\pi]$ обращается в ноль лишь в двух точках $x_1 = \pi/2$ и $x_2 = 3\pi/2$; причем в первой точке она меняет знак с “+” на “−”, а во второй — с “−” на “+”. Отсюда заключаем, что функция ψ на отрезке $[0, \pi/2]$ растет от значения $\psi(0) = 0$, на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ убывает до значения $\psi(3\pi/2) = 0$ и, наконец, возрастает на отрезке $[3\pi/2, 2\pi]$. Следовательно, на отрезке $[0, 2\pi]$ функция ψ неотрицательная. Тем самым доказаны второе утверждение (3.7) и экстремальность полинома g_2. $\square$

3.3. Случай $k = 1$, $n > 2$

В этом подразделе мы исследуем поведение величин $A_1^+(n)$ и $A_1^-(n)$ по n.

Теорема 5. *Для величины $A_1^+(n)$ справедливы следующие два утверждения.*
1. *При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $A_1^+(n) \leq 2$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^+(n) = 2$.*

Доказательство. Первое утверждение данной теоремы является следствием первого утверждения теоремы 2, поскольку $\mathfrak{F}_n(2\pi) \subset \mathfrak{F}_n(\pi)$. Второе утверждение теоремы 5 в свою очередь следует из второго утверждения теоремы 2, поскольку полиномы (2.8), построенные в доказательстве теоремы 2, принадлежат множеству $\mathfrak{F}_n(2\pi)$. Теорема 5 доказана.

Относительно величины $B_1^+(n)$, определенной в (3.5), справедливо такое утверждение.

Теорема 6. *Для величины $B_1^+(n)$ имеют место следующие два утверждения.*
1. *При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $B_1^+(n) \leq 6$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} B_1^+(n) = 6$.*

Доказательство. Умножим левую и правую часть неравенства (3.4) на $\sin x$ и проинтегрируем по отрезку $[0, \pi]$; это дает оценку

$$b_1 \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx \leq \int\limits_0^\pi (2\pi - x) \sin x\, dx,$$

которая после вычисления интегралов принимает вид $b_1 \leq 6$. Первое утверждение теоремы 6 доказано.

Второе утверждение доказывается по той же схеме, по которой было обосновано соответствующее утверждение теоремы 2. При $0 < \delta < \pi/2$ рассмотрим на отрезке $[0, \pi]$ вспомогательную функцию

$$g_\delta(x) = \begin{cases} 2\pi - x, & x \in [\delta, \pi - \delta]; \\ -\dfrac{2\pi}{\delta^2} x^2 + \dfrac{4\pi - \delta}{\delta} x, & x \in [0, \delta]; \\ -\dfrac{\pi}{\delta^2} x^2 + \dfrac{2\pi^2 - 2\pi\delta - \delta^2}{\delta^2} x - \dfrac{\pi(\pi^2 - 2\pi\delta - \delta^2)}{\delta^2}, & x \in [\pi - \delta, \pi]. \end{cases}$$

Эта функция на отрезке $[\delta, \pi - \delta]$ совпадает с функцией $2\pi - x$, а на отрезках $[0, \delta]$ и $[\pi - \delta, \pi]$ гладко переходит в параболы, пересекающие ось Ox в точках $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$. Из соображений выпуклости следует, что $f_\delta(x) \leq 2\pi - x,\ x \in [0, \pi]$. Продолжим функцию g_δ нечетно на $[-\pi, 0]$ и 2π-периодически на всю ось. Нетрудно понять, что имеет место оценка

$$g_\delta(x) \leq 2\pi - x, \quad x \in [0, 2\pi]. \tag{3.10}$$

Ряд Фурье функции g_δ имеет вид

$$g_\delta(x) = \sum_{k=1}^\infty b_k(\delta) \sin kx, \quad b_k(\delta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f_\delta(x) \sin kx\, dx;$$

он сходится к g_δ равномерно на всей оси. Исследуем поведение коэффициентов Фурье b_k с ростом k. Воспользовавшись несколько раз теоремой об интегрировании по частям, получаем

$$\int\limits_0^\pi g_\delta(x) \sin kx\, dx = -\frac{1}{k} \int\limits_0^\pi g_\delta(x)\, d\cos kx = -\frac{1}{k} \left(g_\delta(x) \cos kx \Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi g'_\delta(x) \cos kx\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\int\limits_0^\pi g'_\delta(x)\, d\sin kx\right) = \frac{1}{k^2}\left(g'_\delta(x)\sin kx\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi g''_\delta(x)\sin kx\, dx\right)$$

$$= \frac{2\pi}{k^3\delta^2}\left(2(1-\cos k\delta) + (-1)^{k-1}(1-\cos k\delta)\right).$$

Окончательно имеем

$$b_k(\delta) = \frac{4}{k^3\delta^2}\left(2(1-\cos k\delta) + (-1)^{k-1}(1-\cos k\delta)\right). \tag{3.11}$$

Видно, что $b_k(\delta) = O\left(k^{-3}\right)$, $k \to \infty$, а следовательно, существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что

$$|b_k(\delta)| \le C(\delta)k^{-3}, \quad k \ge 1.$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(\delta)\sin kx$$

ряда Фурье функции g_δ. Имеем

$$|g_\delta(x) - S_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^\infty |b_k(\delta)||\sin kx| \le \sum_{k=n+1}^\infty |b_k(\delta)||\sin k(2\pi - x)|$$

$$\le |2\pi - x|\sum_{k=n+1}^\infty k|b_k(\delta)| \le |2\pi - x|\,\epsilon_n, \quad \epsilon_n = C(\delta)\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

Отсюда и из (3.10) для сумм S_n получаем оценки

$$S_n(x) = g_\delta(x) + S_n(x) - g_\delta(x) \le g_\delta(x) + |g_\delta(x) - S_n(x)| \le (2\pi - x)(1+\epsilon_n), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Следовательно, полином

$$\sigma_n(x) = \frac{S_n(x)}{1+\epsilon_n}$$

удовлетворяет ограничению $\sigma_n(x) \le 2\pi - x$, $x \in [0, 2\pi]$, т. е. принадлежит множеству $\mathfrak{G}_n$. Его первый коэффициент есть $b_1(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому справедливы неравенства

$$\frac{b_1(\delta)}{1+\epsilon_n} \le B_1(n) \le 6.$$

При $n \to \infty$ получаем отсюда оценки

$$b_1(\delta) \le \lim_{n\to\infty} B_1(n) \le 6. \tag{3.12}$$

Согласно (3.11)

$$b_1(\delta) = \frac{12}{\delta^2}(1 - \cos\delta).$$

Этот коэффициент обладает свойством $b_1(\delta) \to 6$, $\delta \to +0$. Поэтому из (3.12) следует второе утверждение теоремы. □

В силу соотношений (3.6) теорему 6 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Теорема 7. *Для величины $A_1^-(n)$ имеют место следующие два утверждения.*
1. *При любом $n \ge 1$ выполняется неравенство $A_1^-(n) \ge -6$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^-(n) = -6$.*

3.4. Оценки старших коэффициентов

Следующая теорема содержит неточные, однако, информативные оценки старших коэффициентов полиномов класса $\mathfrak{F}_n(2\pi)$.

Теорема 8. *При* $1 \le k \le n$ *для величин* (3.2) *имеют место следующие неравенства*:

$$A_k^-(n) \le A_k^+(n),$$

$$A_k^-(n) \ge -2\pi - \frac{2}{k},$$

$$A_k^+(n) \le 2\pi - \frac{2}{k}.$$

Доказательство. Домножим неравенство (1.3) на функцию $1 \pm \sin kx$ и проинтегрируем по отрезку $[0, 2\pi]$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \int_0^{2\pi} \sin \nu x \,(1 \pm \sin kx)\, dx \le \int_0^{2\pi} x\,(1 \pm \sin kx)\, dx.$$

После вычисления интегралов и деления на число π это неравенство принимает вид

$$\pm a_k \le 2\pi \mp \frac{2}{k}.$$

Таким образом, для коэффициента a_k справедливы оценки

$$-2\pi - \frac{2}{k} \le a_k \le 2\pi - \frac{2}{k},$$

которые влекут утверждения теоремы. Теорема 8 доказана. □

Автор признателен В. В. Арестову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Milovanović G.V., Mitrinovic D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 836 p.
2. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. 824 с.
3. **Arestov V.V., Mendelev A.S.** Trigonometric polynomials that deviate the least from zero in measure and related problems // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 10. P. 1852–1878.
4. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
5. **Арестов В.В., Кондратьев В.П.** Об одной экстремальной задаче для неотрицательных тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 1. С. 15–28.
6. **Révész Sz.Gy.** A Fejér type extremal problem // Acta Math. Hungar. 1991. Vol. 57, nos. 3–4. P. 279–283.
7. **Révész Sz.** On some extremal problems of Landau // Serdica Math. J. 2007. Vol. 33, no. 1. P. 125–162.
8. **Fejer L.** Uber trigonometrische Polynome // J. Angew. Math. 1915. Vol. 146. P. 53–82.
9. **Egervary E.V, Szasz 0.** Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome // Mathematische Zeitschrift. 1928. Vol. 27. P. 641–652.

Зыков Дмитрий Олегович
студент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: mitya130@mail.ru

Поступила 06.04.2015