ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ПО ЕЕ ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ[1]

Р. Р. Акопян

Исследуется задача оптимального восстановления аналитической в двусвязной области функции по ее значениям на одной из двух компонент границы области, заданным с погрешностью. Получен метод оптимального восстановления в случае, когда погрешность равна целой степени модуля двусвязной области.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, аналитические функции, двусвязная область.

R. R. Akopyan. Optimal recovery of an analytic function in a doubly connected domain from its approximately given boundary values.

We study the problem of optimal recovery of a function analytic in a doubly connected domain from its approximately given values on one of the two components of the boundary. An optimal recovery method is obtained in the case when the error is an integer power of the modulus of the domain.

Keywords: optimal recovery, analytic functions, doubly connected domain.

1. Задача оптимального восстановления аналитической функции

Пусть G — двусвязная ограниченная область комплексной плоскости с границей Γ, состоящей из двух замкнутых жордановых спрямляемых кривых Γ_1 и Γ_2. Рассмотрим пространство Харди $H(G)$ функций, аналитических и ограниченных на области G с нормой

$$\|f\|_{H(G)} = \sup\{|f(z)|\colon z \in G\}.$$

Известно (см., например, [18, гл. 3, § 1, п. 1.7]), что для произвольной функции f из пространства $H(G)$ почти всюду на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ существуют некасательные предельные граничные значения, составляющие функции, которые также будем обозначать f, из пространств $L^\infty(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$; при этом имеет место равенство

$$\|f\|_{H(G)} = \|f\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

В пространстве $H(G)$ выделим класс Q функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \le 1.$$

Обозначим через Υ_z функционал, определенный на подпространстве $L^\infty(\Gamma_1)$ функций, являющихся граничными значениями на Γ_1 функций пространства $H(G)$, и ставящий в соответствие граничным значениям аналитической функции на Γ_1 ее значение в точке z области G, т. е. задаваемый равенством

$$\Upsilon_z f = f(z).$$

На классе функций Q рассмотрим задачу оптимального восстановления значения аналитической функции в конкретной точке z области. Пусть для неизвестной функции f из класса Q

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

задана функция $q \in L^\infty(\Gamma_1)$ такая, что $\|f - q\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \le \delta$. Иными словами, заданы граничные значения функции f с погрешностью δ на части границы — кривой Γ_1. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q значение $f(z)$. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать $\mathcal{O}$ — множество всех возможных, или $\mathcal{L}$ — линейных, функционалов на $L^\infty(\Gamma_1)$. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ определим величину погрешности метода формулой

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{|f(z) - Tq|\colon f \in Q,\ q \in L^\infty(\Gamma_1),\ \|f-q\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \le \delta\right\}. \tag{1.1}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T \in \mathcal{R}\right\} \tag{1.2}$$

есть величина оптимального восстановления аналитической функции в точке z (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала Υ_z) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на Γ_1, заданным с ошибкой δ. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – функционала, на котором в (1.2) достигается нижняя грань.

Задача (1.2) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации. Общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [6–9; 15; 19]. Результатам, связанным с задачами оптимального восстановления на классах аналитических функций, посвящена монография [19].

Функцию вещественного переменного $\delta \in [0,\infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta;\Upsilon_z, Q) = \sup\left\{|f(z)|\colon f \in Q,\ \|f\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \le \delta\right\}, \tag{1.3}$$

называют модулем непрерывности функционала Υ_z на классе Q. Интерес представляет как значение величины $\omega(\delta)$, так и экстремальная функция, на которой в (1.3) достигается верхняя грань.

Известно (см. [7; 9; 10; 14; 19] и приведенную там библиографию), что в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом центрально симметричном классе (каковым, в частности, является класс Q) с помощью множества $\mathcal{O}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный функционал и сама величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала. Таким образом справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta).$$

В работе [3] изучались несколько взаимосвязанных экстремальных задач на классе аналитических в кольце функций. Одна из них — задача оптимального восстановления аналитической в кольце функции по заданным с известной погрешностью $\delta > 0$ значениям функции на одной из граничных окружностей. В частности, было получено решение задачи (1.2) в случае кольца для сходящейся к нулю последовательности значений δ. Этот результат будет сформулирован в теореме B ниже. В работе [3] существенно использовались подходы из статьи Л. В. Тайкова [21], а также результаты из [2], где на классе функций, аналитических в полосе, аналогичная задача была решена автором при любом значении погрешности $\delta \ge 0$. Недавно автор получил [4; 5] решение задачи оптимального восстановления аналитической функции в односвязной области по ее значениям на части границы, заданным с погрешностью $\delta \ge 0$.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи (1.2). Будет выписано значение величины оптимального восстановления при всех $\delta \ge 0$ и получен оптимальный метод восстановления в случае, когда δ является целой степенью модуля двусвязной области. При исследовании оптимальных методов будут использованы подходы, давшие полное решение задачи в случае односвязных областей.

Для имеющего положительную меру подмножества γ границы Γ метод восстановления функции $f \in H(G)$ по ее (точным) граничным значениям на γ дает формула Карлемана — Голузина — Крылова [12] (см. также [1])

$$\forall z \in G \quad f(z) = \lim_{\sigma \to -\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \Big(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)} \Big)^{\sigma} d\zeta,$$

где φ — произвольная функция из $H(G)$, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi(\zeta)| = 1, \quad \zeta \in \Gamma \setminus \gamma; \quad |\varphi(z)| > 1, \quad z \in G.$$

В случае, когда граничные значения функции на γ заданы с погрешностью, задача восстановления значения в точке z (аналитического продолжения с части границы области) является некорректной. При определенных условиях на множество G, его границу и множество γ эта задача исследовалась М. М. Лаврентьевым [13, гл. 2, § 1, п. 4–5] (см. также [1, гл. 1, § 2]). Предложенные методы регуляризации имеют в качестве ядра введенные и названные им функции Карлемана, являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши. Примером такого регуляризующего метода является конструкция, основанная на формуле Карлемана — Голузина — Крылова. Наша цель — построение наилучшего (оптимального) метода.

2. Случай кольца

В случае, когда область G является кольцом, не ограничивая общности, можно считать, что это есть кольцо $K_{r,1} = \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z| < 1\}$, $0 < r < 1$, с центром в начале координат, внутренним радиусом, равным r, и внешним — единице, $\Gamma_1 = \{\zeta \colon |\zeta| = r\}$, Γ_2 есть единичная окружность, и $z > 0$.

Модуль непрерывности (1.3) для кольца $K_{r,1}$ известен. Следствием хорошо известной теоремы Адамара о трех кругах (см., например, [17, отд. 3, гл. 6, § 3]) является неравенство

$$\omega(\delta) \le \delta^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\ln z}{\ln r}.$$

При этом неравенство обращается в равенство только в точках $\delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$, в которых $\omega(\delta_n) = \delta_n^{\alpha} = z^n$. Для произвольного значения $\delta > 0$ величину модуля непрерывности можно получить из результата Робинсона (1943) [20] (см. также [11, гл. 11, § 4]).

Теорема А. *Пусть* $G = K_{r,1}$, $\Gamma_1 = \{\zeta \colon |\zeta| = r\}$, *точка* z *принадлежит отрезку* $[r, 1]$. *Тогда для произвольного* $\delta > 0$ *экстремальной функцией, на которой в* (1.3) *достигается верхняя грань, является функция*

$$f[r,\delta](z) = z^n \frac{\Theta\left(z\, r^n\, \delta^{-1},\, r\right)}{\Theta\left(z\, r^{-n}\, \delta,\, r\right)}, \quad r^n \le \delta < r^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4}$$

где

$$\Theta(\zeta, r) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + r^{2k-1}\zeta)(1 + r^{2k-1}\zeta^{-1}),$$

отображающая кольцо $K_{r,1}$ *на единичный круг с разрезом по дуге окружности с центром в нуле, симметричной относительно вещественной оси и пересекающейся с ней в точке* δ. *При этом все экстремальные функции имеют вид* $\varepsilon f[r,\delta]$, $|\varepsilon| = 1$.

В соответствии с этой теоремой для величины модуля непрерывности (1.3) справедливо равенство

$$\omega(\delta) = f[r,\delta](z).$$

Отметим, что функция ω переменной $\delta \in [0, +\infty)$ непрерывная, выпуклая вверх и во всех точках, кроме точек $\delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$, дифференцируемая.

Именно при $\delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$, в работе [3] получено решение задачи (1.2). Сформулируем этот результат. Рассмотрим функционал $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n[r,\rho]$, $0 < r < \rho < 1$, на $L^\infty(\Gamma_1)$, определяемый равенством

$$\mathcal{T}_n q = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int\limits_0^{2\pi} \Lambda(t) e^{-int}\,\psi(t)\,dt, \quad \psi(t) = q(re^{it}), \tag{2.5}$$

в котором функция Λ есть сумма ряда

$$\Lambda(t) = \lambda_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \cos kt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_{|k|}\, e^{ikt}, \tag{2.6}$$

со следующими коэффициентами:

$$\lambda_0 = \frac{\ln\rho}{\ln r}, \quad \lambda_k = \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \frac{1-\rho^{2k}}{1-r^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема B. *Пусть* $G = K_{r,1}$, $\Gamma_1 = \{\zeta\colon |\zeta| = r\}$, *точка* z *принадлежит интервалу* $(r,1)$. *Для величины* (1.2) *в случае* $\delta = \delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$, *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_n) = \delta_n^\alpha = z^n.$$

При этом оптимальным методом восстановления в задаче (1.2) *является линейный функционал* $\mathcal{T}_n[r,z]$, *определенный равенствами* (2.5), (2.6).

3. Общий случай двусвязной области

Воспользуемся хорошо известным фактом геометрической теории функций комплексного переменного [11, гл. 5, § 1]. Для двусвязной области G существует и единственно число $r = r(G)$, $0 < r < 1$, называемое модулем двусвязной области, такое, что существует конформное отображение G на кольцо $K_{r,1}$. Для области G и фиксированной точки $z \in G$ обозначим через g однолистную функцию, реализующую отображение области G на кольцо $K_{r,1}$, при этом переводящую компоненту Γ_2 границы G на единичную окружность и точку z в некоторую точку промежутка $(r,1)$.

Определим функцию $F[G,\delta,z]$ как суперпозицию функций g и (2.4), т. е. определяемую равенством

$$F[G,\delta,z](\zeta) = f[r,\delta]\,(g(\zeta))\,. \tag{3.7}$$

Ясно, что введенная функция $F[G,\delta,z]$ принадлежит классу Q.

Приведенные выше факты и несложные рассуждения приводят к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для произвольного* $\delta \ge 0$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = F[G,\delta,z](z). \tag{3.8}$$

При этом все экстремальные функции имеют вид $\varepsilon F[G,\delta,z]$, $|\varepsilon| = 1$.

Особыми точками функции ω (точками, в которых функция не дифференцируема) являются точки δ_n, равные целым степеням модуля области G, т.е. $\delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае функция (2.4) имеет вид $f[r,r^n](\xi) = \xi^n$, и, следовательно, для экстремальной функции (3.7) справедливо равенство

$$F[G,r^n,z](\zeta) = g^n(\zeta). \tag{3.9}$$

Рассмотрим функционал T_n на $L^\infty(\Gamma_1)$, определяемый равенством

$$T_n q = \int\limits_{\Gamma_1} P_G(\zeta, z)\Big(\frac{g(z)}{g(\zeta)}\Big)^n q(\zeta)\, ds, \tag{3.10}$$

где $P_G(\cdot, z)$ — ядро Пуассона области G для точки z.

Введенный функционал T_n и функционал $\mathcal{T}_n$, определенный равенствами (2.5), (2.6) при $\rho = g(z)$, взаимосвязаны. А именно, имеет место соотношение

$$T_n q = \mathcal{T}_n \psi, \quad \psi(t) = q(\zeta), \quad g(\zeta) = re^{it}.$$

Теорема 2. *Для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ и $\delta_n = r^n$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_n) = \omega(\delta_n) = g^n(z).$$

При этом оптимальным методом восстановления является метод T_n, задаваемый равенством (3.10).

Доказательство теоремы 2 можно получить сведением задачи (1.2) для области G к случаю, когда область является кольцом $K_{r,1}$. Приведем здесь прямое доказательство. Используя линейность функционала T_n и применяя формулу Пуассона к аналитической в области G функции $f(\zeta)g^{-n}(\zeta)$, получим соотношения

$$f(z) - T_n q = f(z) - T_n f + T_n(f - q)$$
$$= \int\limits_{\Gamma_2} P_G(\zeta, z)\left(\frac{g(z)}{g(\zeta)}\right)^n f(\zeta)\, ds + \int\limits_{\Gamma_1} P_G(\zeta, z)\left(\frac{g(z)}{g(\zeta)}\right)^n (f(\zeta) - q(\zeta))\, ds.$$

Отсюда с учетом положительности ядра Пуассона и отображения, задаваемого функцией g, следует оценка

$$|f(z) - T_n q| \le g^n(z)\Big[\int\limits_{\Gamma_2} P_G(\zeta, z)\ |f(\zeta)|\ ds + r^{-n}\int\limits_{\Gamma_1} P_G(\zeta, z)\ |f(\zeta) - q(\zeta)|\ ds\Big].$$

Тогда при $\delta = r^n$ для уклонения (1.1) функционала T_n справедливо неравенство

$$\mathcal{U}(T_n, \delta) \le g^n(z)\int\limits_{\Gamma} P_G(\zeta, z)\, ds = g^n(z). \tag{3.11}$$

Теперь из равенств (3.8), (3.9) и неравенства (3.11) следует утверждение теоремы 2.

Замечание. Обобщением теоремы Адамара (для широкого круга областей) является результат Ф. и Р. Неванлинн [16] (см. также [11, гл. 8, § 4, теорема 1]), из которого, в частности, для модуля непрерывности (1.3) следует оценка сверху

$$\omega(\delta) \le \delta^\alpha, \tag{3.12}$$

где величина α является гармонической мерой Γ_1 относительно множества G и точки z (см., например, [11, гл. 8, § 4]). В рассматриваемом в данной статье случае известны явные представления: для величины $\omega(\delta)$ — равенство (3.8) и для гармонической меры — соотношение $\alpha = \ln g(z)/\ln r$. Неравенство (3.12) обращается в равенство только при $\delta = \delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что к настоящему моменту известен оптимальный метод восстановления аналитической функции по граничным значениям, заданным с погрешностью на части границы, ([2–5] и теорема 2), только в случаях, когда неравенство (3.12) обращается в равенство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзенберг Л.А.** Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990. 248 с.
2. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 46–54.
3. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 3–13.
4. **Акопян Р.Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 17-й междунар. Сарат. зимней шк. Саратов: Научная книга, 2014. С. 17–19.
5. **Акопян Р.Р.** Оптимальный метод продолжения аналитической функции с части границы области. Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвященной памяти В. К. Иванова. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С. 22–24.
6. **Арестов В.В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
7. **Арестов В.В.** Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН. М.: Наука, 1989. Vol. 189. С. 3–20.
8. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Сер. математическая. 1995. № 11. С. 42–68.
9. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
10. **Габушин В.Н.** Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат. заметки. 1970. Т. 8, № 5. С. 551–562.
11. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
12. **Голузин Г.М., Крылов В.И.** Обобщенная формула Carleman‘а и приложение ее к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
13. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
14. **Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.** Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Vol. 50, № 6. С. 85–93.
15. **Micchelli Ch.A., Rivlin Th.J.** A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory: Proc. Internat. Sympos. (Freudenstadt, 1976). N.Y., etc.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
16. **Nevanlinna F., Nevanlinna R.** Über die Eigenschaften einer analyticchen Funktionen in der Umgeburg einer singularen Stille oder Linie // Acta Soc. Sci. Fenn. 1922. Vol. 50, no. 5. P. 1–46.
17. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 398 с.
18. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 336 с.
19. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NJVA Science Publ. Inc., 2000. 229 p.
20. **Robinson R.M.** Analytic functions in circular rings // Duke Math. J. 1943. Vol. 10, no. 2. P. 341–354.
21. **Тайков Л.В.** Аналитическое продолжение функций с ошибкой // Тр. МИАН. 1971. Т. 109. С. 61–64.

Акопян Роман Размикович
Поступила 15.02.2015
канд. физ.-мат. наук
зав. кафедрой
Озерский технологический институт
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru