ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.538.2

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА[1]

Г. А. Дубосарский

Построены гармонические всплески и сделана оценка скорости сходимости их частичных сумм во введенных в статье пространствах гармонических функций. Данные всплески можно использовать для решения задачи Неймана.

Ключевые слова: задача Неймана, гармонические всплески, базис пространств гармонических функций.

G. A. Dubosarskii. Nonorthogonal harmonic wavelets and their application to the solution of the Neumann problem.

We construct harmonic wavelets and give a bound for the convergence rate of their partial sums in the spaces of harmonic functions introduced in the paper. These wavelets can be used for the solution of the Neumann problem.

Keywords: Neumann problem, harmonic wavelets, basis of spaces of harmonic functions.

1. Введение

Данная статья посвящена построению гармонических всплесков, удобных для решения задачи Неймана. Эта задача является классической задачей математической физики и заключается в определении гармонической функции по ее известным производным по нормали к границе области. Данная работа является идейным продолжением статей [1–3].

В [1] были построены гармонические всплески, образующие базис пространств Харди в единичном круге и центральном кольце. Далее в этой работе с помощью конформного отображения базис в центральном кольце был перенесен на случай нецентрального. Эти базисы могут быть использованы для решения другой классической задачи математической физики — задачи Дирихле. Задача Дирихле заключается в определении значений гармонической функции внутри области по известным граничным значениям. В [2;3] на основе всплесков работы [1] были построены ортогональные и неортогональные гармонические всплески для решения задачи Дирихле в области, получающейся путем удаления из единичного круга нескольких меньших непересекающихся кругов. Также в статье [3] описано построение ортогональных гармонических всплесков, удобных для решения задачи Неймана. В [2; 3] построение ортогональных всплесков требует построения вспомогательных систем функций, которые получаются путем ортогонализации Грама — Шмидта системы гармонических рациональных функций относительно специальных скалярных произведений. Неортогональные всплески получаются с помощью аналога ортогонализации Грама — Шмидта для введенного несимметричного произведения той же системы функций.

В данной работе построены неортогональные всплески для решения задачи Неймана и доказана оценка скорости сходимости ряда по этим всплескам. Преимущество неортогональных всплесков по сравнению с ортогональными заключается в том, что коэффициенты разложений гармонических функций в ряды по этим всплескам представляются в более простой форме, чем у ортогональных. Однако само построение неортогональных всплесков требует большего количества вычислительных операций, чем построение ортогональных.

[1]Выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Во втором разделе данной статьи вводятся новые пространства N_p гармонических функций. Далее, в третьем разделе для функций из классов N_p строится ряд, восстанавливающий их по их производным по нормали на границе области, а также формулируется лемма об асимптотическом поведении функций из построенного ряда. Таким образом, данный ряд может быть использован для решения задачи Неймана. В четвертом разделе на основе построенного ряда строится ряд всплесков, который сходится не только внутри области, но и на ее границе. В пятом разделе данной статьи доказываются вспомогательные утверждения необходимые для оценок сходимости.

2. Пространства гармонических функций

Обозначим через $C_r(a)$ окружность с центром в точке a радиуса r. Будем также использовать обозначение $B_r(a) = \{z\colon |z-a| < r\}$ и обозначать $B_1(0)$ через K. Рассмотрим область комплексной плоскости $\widetilde{K} = \widetilde{K}(z_1, r_1, z_2, r_2, \ldots, z_m, r_m)$, получающуюся путем удаления из единичного круга m попарно не пересекающихся кругов. То есть область $\widetilde{K}$ ограничена окружностями $C_{r_0}(z_0), C_{r_1}(z_1), \ldots, C_{r_m}(z_m)$, где $z_0 = 0, r_0 = 1$, $|z_k| + r_k < 1, k = \overline{1, m}$, и $|z_k - z_l| > r_k + r_l, k \neq l$.

В статье гармонические функции полагаются вещественнозначными. Нам потребуется следующее утверждение о специальном разложении гармонической функции. Доказательство существования этого разложения можно найти в [4], а единственность проверяется так же, как в лемме 2.1 работы [5].

Утверждение. *Пусть функция $u(z)$ является гармонической в $\widetilde{K}$. Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k|, \tag{2.1}$$

где $u_0(z)$ — гармоническая функция в $B_1(0)$, $u_k(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = \lim_{z\to\infty} u(z) = 0, k = \overline{1, m}$, и $A_k, k = \overline{1, m}$, — некоторые вещественные константы.

Аналогично тому, как это сделано в работе [5], проверяется, что константы $A_k, k = \overline{1, m}$, разложения (2.1) вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{r_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} dx. \tag{2.2}$$

Поскольку в данной статье строится аппарат для решения задачи Неймана, то будем полагать производные по радиусу в (2.2) известными. Таким образом, константы A_k можно также считать найденными. Рассмотрим функцию $v(z) = u(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k|$, где константы A_k определяются по формуле (2.2). Наша задача свелась к нахождению функции $v(z)$, для которой соответствующие константы равны нулю. Пользуясь таким сведением, мы сразу можем считать, что в разложении (2.1) функции $u(z)$ не присутствуют логарифмы. Таким образом, будем полагать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} dx = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.3}$$

Поскольку решение задачи Неймана определяется с точностью до константы, чтобы добиться единственности, будем считать

$$\int_0^{2\pi} u(e^{ix}) dx = 0. \tag{2.4}$$

Классы, в которых интегрирования в (2.3) и (2.4) являются законными, будут введены ниже.

Полагаем, что функция $u(z)$ принадлежит пространству $N_p(\widetilde{K}), 1 < p < \infty$, если

$$\frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} \in L_p[0, 2\pi] \tag{2.5}$$

и выполнены равенства (2.3) и (2.4).

Если $p > 1$, то по аналогии с доказательством теорем 3 и 4 (см. [4, с. 397–400]) можно получить, что функция $u(z)$ будет непрерывна в замыкании $\widetilde{K}$. Более того, ее граничные значения принадлежат классу $Lip_{1-1/p}$. Однако при $p = 1$ выполнение условия (2.5) не гарантирует непрерывности граничных значений. Это показывает пример следующей функции, определенной в круге K:

$$u(re^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k \cos kx}{k \ln(k+2)}.$$

Рассмотрим функции $u_1(z) = \ln|1 - z|$ и $u_2(z) = \ln|1 + z|$ в единичном круге с центром в нуле. Отметим, что $\frac{\partial u_1(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial u_2(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1} = 1/2$. Таким образом, по производной по нормали к границе области гармоническая функция не обязана однозначно восстанавливаться (с точностью до константы).

Поэтому будем считать, что $u(z) \in N_1(\widetilde{K})$, если выполнены условия (2.3), (2.4), а также соотношения

$$\int_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(z_k + re^{ix}) - \frac{\partial u}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k}\Big| dx \to 0, \quad r \to r_k, \quad k = \overline{0, m}, \tag{2.6}$$

и функция $u(z)$ является непрерывной в замыкании $\widetilde{K}$. Условия (2.6) гарантируют, что функция $u(z)$ однозначно восстанавливается по граничным значениям. Условие (2.6) выполняется для функций из классов $N_p(\widetilde{K}), p > 1$.

Исходя из (2.3) и (2.4), мы получаем, что в области $\widetilde{K}$ для функции $u(z)$ из класса $N_p(\widetilde{K})$ справедливо разложение

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z), \tag{2.7}$$

где $u_0(z)$ — гармоническая функция в $B_1(0)$, $u_k(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = \lim_{z\to\infty} u(z) = 0$, $k = \overline{1, m}$.

3. Вспомогательная гармоническая система функций

Рассмотрим систему функций

$$\Big\{h_k^0(z) = Rez^k,\ \widetilde{h}_k^0(z) = Imz^k,$$

$$h_k^l(z) = Re\Big(\frac{r_l}{z - z_l}\Big)^k,\ \widetilde{h}_k^l(z) = -Im\Big(\frac{r_l}{z - z_l}\Big)^k,\ l = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}\Big\} \tag{3.1}$$

и введем псевдоскалярное произведение с помощью разложения (2.7) функции $v(z)$:

$$\langle u, v\rangle_N = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} \frac{\partial v_k(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} dx. \tag{3.2}$$

Будем нумеровать натуральными числами функции системы (3.1) в следующем порядке:

$$h_1^0(z), \widetilde{h}_1^0(z), h_1^1(z), \widetilde{h}_1^1(z), \ldots, h_1^m(z), \widetilde{h}_1^m(z),$$

$$h_2^0(z), \widetilde{h}_2^0(z), h_2^1(z), \widetilde{h}_2^1(z), \ldots, h_2^m(z), \widetilde{h}_2^m(z), \ldots . \tag{3.3}$$

Построим систему функций $\{\sigma_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\sigma_k(z) = \sum_{s=1}^{k} \omega_s^k h_s(z), \tag{3.4}$$

где h_s являются функциями системы (3.1) и выполняется условие

$$|\langle \sigma_k, \sigma_l \rangle_N| = \delta_{k,l}, \quad l \leq k. \tag{3.5}$$

Система $\{\sigma_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ строится аналогично системе $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ статьи [3] по индукции. Положим $\sigma_1(z) = h_1(z)$, тогда $\langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle_N = 1$. Пусть функции $\sigma_k(z), k = \overline{1, n-1}$, построены и, выполняется $|\langle \sigma_k, \sigma_l \rangle_N| = \delta_{k,l}, l \leq k < n$. Определим теперь функцию $\sigma_n(z)$. Для этого по аналогии с методом Грама — Шмидта введем функцию $q_n(z)$ вида

$$q_n(z) = h_n(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \sigma_k(z). \tag{3.6}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1}$ будем последовательно находить путем умножения (3.6) на функции $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ справа, полагая $\langle q_n, \sigma_k \rangle_N = 0, k = \overline{1, n-1}$. Следовательно, выполняется рекуррентное соотношение $\alpha_k = -\{\langle h_n, \sigma_k \rangle_N + \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s \langle \sigma_s, \sigma_k \rangle_N\}$. Проверим, что $\langle q_n, q_n \rangle_N \neq 0$. В силу того, что $\langle q_n, \sigma_k \rangle_N = 0, k = \overline{1, n-1}$, и (3.6) справедливо равенство $\langle q_n, q_n \rangle_N = \langle q_n, h_n \rangle_N$. Если бы $\langle q_n, q_n \rangle_N = 0$, то в силу (3.4) и (3.5) выполнялось бы $\langle q_n, h_k \rangle_N = 0, k = \overline{1, n}$. Невозможность последних равенств вытекает из леммы 4, которую мы докажем далее, не опираясь на возможность построения системы со свойством (3.5). Итак, считаем, что $\langle q_n, q_n \rangle_N \neq 0$. Остается только взять в качестве $\sigma_n(z)$ функцию $q_n(z)/\sqrt{|\langle q_n, q_n \rangle|}$.

Сопоставим функции $u(z)$ из пространства $N_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$, ряд

$$u(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sigma_k(z). \tag{3.7}$$

Коэффициенты $\mu_k, k \in \mathbb{N}$ найдем из условий

$$\Big\langle u - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \sigma_k, \sigma_n \Big\rangle_N = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Подставляя в (3.8) значения $n = 1, 2, \ldots$, последовательно находим μ_k по формуле

$$\mu_k = \Big\{ \langle u, \sigma_k \rangle_N - \sum_{s=1}^{k-1} \mu_s \langle \sigma_s, \sigma_k \rangle_N \Big\}.$$

Откуда можно вывести, что $\mu_k = \langle u, d_k \rangle_N$, где d_k — линейная комбинация функций h_s, $s = \overline{1, k}$. Функции $d_k(z)$ определяются единственным образом и не зависят от функции $u(z)$. Из рекуррентных соотношений для коэффициентов μ_k заключаем

$$d_k = \langle \sigma_k, \sigma_k \rangle_N \Big\{ \sigma_k - \sum_{s=1}^{k-1} d_s \langle \sigma_s, \sigma_k \rangle_N \Big\},$$

откуда делаем вывод, что коэффициенты μ_k равны сумме интегралов от произведения производных функции $u(z)$ по радиусам на границе $\widetilde{K}$ и полиномов $\dfrac{\partial}{\partial r}(d_k)_l^*(z_l + re^{ix})\Big|_{r=r_l}$, $l = \overline{0, m}$.

Будем нумеровать функции $\sigma_n(z)$ и коэффициенты μ_n ряда (3.7) двумя индексами. Функция $\sigma_n(z)$ является линейной комбинацией функций $h_s(z), s = \overline{1,n}$. Пусть $h_n(z) = \overset{(\sim)}{h}{}^l_k(z)$, тогда будем полагать, что $\sigma_n(z) = \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k(z)$. Коэффициенты μ_n при функциях $\sigma_n = \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k$ ряда (3.7) будем обозначать через $\overset{(\sim)}{\mu}{}^l_k(z)$.

Через $\tau,\ 0 < \tau < 1$, обозначим величину

$$\tau = \max\Big\{|z_k| + r_k, \frac{r_k}{1 - |z_k|}, \frac{r_k}{|z_k - z_l| - r_l}: \ k, l = \overline{1,m}, \quad k \neq l\Big\}. \tag{3.9}$$

Повторяя доказательство теоремы 1 в [3] и используя лемму 7, которую мы докажем далее, можно убедиться в справедливости следующей теоремы об асимптотике функций $\sigma^l_k(z)$.

Теорема 1. *При $\tau < \tau' < 1$ справедлива оценка*

$$\sigma^l_k(z) = \begin{matrix} h^l_k(z)/k + O(\tau'^k), & k \to \infty, & l = 0, \\ h^l_k(z) r_l/k + O(\tau'^k), & k \to \infty, & l = \overline{1,m}. \end{matrix}$$

Введем частичные суммы ряда (3.7)

$$s_n(z; u) = \sum_{l=1}^{n} \mu_k \sigma_k(z). \tag{3.10}$$

Из соотношений (3.5) и (3.8) следует

$$\langle u - s_n(\cdot; u), h_k\rangle_N = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.11}$$

4. Гармонические всплески

Используя полученную вспомогательную систему $\sigma_k(z)$, построим гармонические всплески. Ряды по этим всплескам будут сходиться равномерно в замыкании $\widetilde{K}$. Для этого рассмотрим неотрицательную четную дважды непрерывно дифференцируемую функцию Мейера $\widehat{\varphi}(\omega)$, которая удовлетворяет требованиям

$$\widehat{\varphi}(\omega) \equiv 1 \text{ при } |\omega| \leq \frac{1-\varepsilon}{2}, \ \ \widehat{\varphi}(\omega) \equiv 0 \text{ при } |\omega| \geq \frac{1+\varepsilon}{2}, \ \ \widehat{\varphi}^2\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2} \text{ нечетна при } |\omega| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

где $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{3}$. Функция $\widehat{\theta}(\omega)$, введенная Д. Оффином и К. И. Осколковым в [6], неотрицательна и определяется соотношением

$$\widehat{\theta}^2(\omega) = \widehat{\varphi}^2\Big(\frac{\omega}{2}\Big) - \widehat{\varphi}^2(\omega).$$

Заметим, что $\operatorname{supp} \widehat{\theta}(\omega) \subseteq \Big\{\omega \in \mathbb{R} : \dfrac{1-\varepsilon}{2} < |\omega| < 1 + \varepsilon\Big\}$ и $\widehat{\theta}(\omega)$ — дважды дифференцируемая функция.

Перейдем теперь к построению гармонических всплесков в $\widetilde{K}$. Для этого мы будем использовать всплески из статьи [1], являющиеся базисом пространства $C[0, 2\pi]$. Выпишем эти всплески в явном виде

$$w_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w_n(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta^n_\nu \cos \nu x, \quad \widetilde{w}_n(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta^n_\nu \sin \nu x, \tag{4.1}$$

где

$$\theta^n_\nu = 2^{(2-j)/2} \widehat{\theta}\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big) \sin \frac{2\pi\nu(k + 0.5)}{2^j}, \quad n = 2^{j-1} + k, \quad j \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1.$$

Так как носитель функции $\widehat{\theta}(\omega)$ компактен, то при достаточно больших ν выполняется $\theta^n_\nu = 0$. Таким образом, суммы в (4.1) фактически являются конечными.

Рассмотрим преобразование, переводящее ряд $\sum\limits_{n=1}\{\lambda_n\gamma_n(z)+\widetilde{\lambda}_n\widetilde{\gamma}_n(z)\}$ в ряд $\sum\limits_{n=1}\{\Lambda_n\Gamma_n(z)+\widetilde{\Lambda}_n\widetilde{\Gamma}_n(z)\}$, в котором

$$\overset{(\sim)}{\Lambda}_n = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta^n_\nu \overset{(\sim)}{\lambda}_\nu, \quad \overset{(\sim)}{\Gamma}_n = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta^n_\nu \overset{(\sim)}{\gamma}_\nu.$$

Применим это преобразование при каждом $l = \overline{0,m}$ к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\mu^l_n\sigma^l_n(z)+\widetilde{\mu}^l_n\widetilde{\sigma}^l_n(z)\}$$

и получим ряд

$$M^l_0G^l_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{M^l_n\Omega^l_n(z)+\widetilde{M}^l_n\widetilde{\Omega}^l_n(z)\},$$

где

$$\overset{(\sim)}{M}{}^l_n = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta^n_\nu \overset{(\sim)}{\mu}{}^l_\nu, \quad \overset{(\sim)}{\Omega}{}^l_n(z) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta^n_\nu \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_\nu(z). \tag{4.2}$$

Введем для гармонической функции $u(z)\in N_p(\widetilde{K})$ частичную сумму $S^W_n(z;u)$, $n\in\mathbb{N}$, всплесков следующим образом:

$$S^W_n(z;u) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\{M^l_s\Omega^l_s(z)+\widetilde{M}^l_s\widetilde{\Omega}^l_s(z)\}.$$

Введем число δ, удовлетворяющее неравенствам

$$\delta\le 1, \quad \delta\ge |z_k|+r_k, \quad \frac{r_k}{\delta}\le |z_k-z_l|-r_l, \quad k,l=\overline{0,m}, \quad k\ne l, \tag{4.3}$$

и число τ_δ, $0<\tau_\delta<1$, следующим образом:

$$\tau_\delta = \max\Big\{|z_k|+\frac{r_k}{\delta}, \quad \frac{r_k}{\delta-|z_k|}, \quad \frac{r_k}{|z_k-z_l|-r_l/\delta}, \quad k,l=\overline{1,m}, \quad k\ne l\Big\}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим норму

$$\|u\|_\delta = \|u(\delta e^{ix})\|_C + \sum_{l=1}^{m}\Big\|u\Big(z_l+\frac{r_l}{\delta}e^{ix}\Big)\Big\|_C, \tag{4.5}$$

где $\|f\|_C = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$ и δ удовлетворяет неравенствам (4.3). Обозначим через $E_nf(x)$ наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами степени не выше n по норме пространства $C[0,2\pi]$. Введем следующее скалярное произведение: $(f,g)_{L_2} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$.

Рассмотрим частичные суммы $W_n(x;f)$ разложения $f(x)\in C[0,2\pi]$ по всплескам (4.1)

$$W_n(x;f) = \sum_{l=0}^{n-1} w_l(x)(w_l,f)_{L_2} + \sum_{l=1}^{n-1}\widetilde{w}_l(x)(\widetilde{w}_l,f)_{L_2}.$$

В статье [1] доказано, что нормы операторов $W_n: C[0,2\pi]\to C[0,2\pi], 1\le p\le\infty$, которые мы обозначим через $\|W_n\|$, равномерно ограничены. Отметим, что если $u(z)\in N_p(\widetilde{K}), 1\le p<\infty$, то функция $u(z)$ непрерывна, поэтому из следующей теоремы вытекает, что система функций (4.2) является базисом пространства $N_p(\widetilde{K}), 1\le p<\infty$, с равномерной нормой $\|u\|_\infty = \max\{|u(z)|\colon z\in\overline{\widetilde{K}}\}$, и на любом компакте в области $\widetilde{K}$ сходимость частичных сумм $S^W_n(\cdot;u)$ будет происходить со скоростью геометрической прогрессии. Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 4 в [3].

Теорема 2. *Пусть функция* $u(z) \in N_p(\widetilde{K}), 1 \le p < \infty$, $n = 2^{j-1} + k, 0 \le k < 2^{j-1}$, $N = [2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, δ *определяется неравенствами* (4.3). *Тогда для суммы* $S_n^W(\cdot; u)$ *и числа* τ', $\tau_\delta < \tau' < 1$, *выполняется оценка*

$$\|u - S_n^W(\cdot; u)\|_\delta \le \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \delta^{N+1}(\|W_n\| + 1) \sum_{l=0}^{m} E_N u(z_l + r_l e^{ix}) + O({\tau'}^N)\|u\|_\infty, \quad n \to \infty,$$

где числа τ *и* τ_δ *и норма* $\|\cdot\|_\delta$ *введены в* (3.9), (4.4) *и* (4.5).

5. Вспомогательные результаты

Будем использовать нормы

$$\|f(x)\|_{L_p} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \quad \|f(x)\|_{L_\infty} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$$

и следующие нормы в пространстве $N_p(\widetilde{K})$ с учетом представления (2.7):

$$\|u\|_p = \sum_{k=0}^{m} \|u(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}, \tag{5.1}$$

$$\|u\|_{p,\widetilde{K}} = \sum_{k=0}^{m} \|u_k(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}. \tag{5.2}$$

В работе [2] доказана лемма 4, которую мы приведем в несколько ослабленном виде.

Лемма 1. *Нормы* $\|\cdot\|_p$ *и* $\|\cdot\|_{p,\widetilde{K}}$, *введенные в* (5.1) *и* (5.2) *при всех* $1 \le p \le \infty$, *эквивалентны в пространстве* $N_1(\widetilde{K})$.

В статье [3] установлена следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $u(z)$ *— гармоническая в области* $\widetilde{K}$ *и непрерывная в ее замыкании функция, тогда функция*

$$\gamma(\delta; u) = \int_0^{2\pi} |u(\delta e^{ix})|^p dx + \sum_{k=1}^{m} \int_0^{2\pi} \left|u\Big(z_k + \frac{r_k}{\delta} e^{ix}\Big)\right|^p dx$$

является возрастающей по переменной δ, *удовлетворяющей неравенствам* (4.3).

Введем еще одно псевдоскалярное произведение с помощью разложения (2.7) функции $v(z)$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(z_k + r_k e^{ix}) v_k(z_k + r_k e^{ix}) dx. \tag{5.3}$$

Следующая лемма является обобщением леммы 2 статьи [3].

Лемма 3. *Пусть* I *— конечное множество различных натуральных чисел, и пусть для функции* $R(z) = \sum_{n \in I} \lambda_n h_n(z)$ *выполняются равенства* $\langle R, h_n\rangle = 0$, $n \in I$. *Тогда* $R(z) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $R(z)$ такова, что $\langle R, h_n\rangle = 0$, $n \in I$. Обозначим через $I_c^l, l = \overline{0,m}$, множество индексов k таких, что $h_k^l = h_n$ и $n \in I$. Аналогично, обозначим через $I_s^l, l = \overline{0,m}$, множество индексов k таких, что $\widetilde{h}_k^l = h_n$ и $n \in I$. Тогда $\langle R, h_k^l\rangle = 0, k \in I_c^l$ и $\langle R, \widetilde{h}_k^l\rangle = 0, k \in I_s^l$. Откуда по определению (5.3) произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ следует

$$\int\limits_0^{2\pi} R(z_l + r_l e^{ix}) \cos kx dx = 0, \quad k \in I_c^l, \quad \int\limits_0^{2\pi} R(z_l + r_l e^{ix}) \sin kx dx = 0, \quad k \in I_s^l, \tag{5.4}$$

что в свою очередь означает

$$E_l^* R(z_l + r_l e^{ix})_2 = \|R(z_l + r_l e^{ix})\|_{L_2}, \tag{5.5}$$

где $E_l^* f(x)_2 = \min_{\chi_k, \widetilde{\chi}_k} \|f(x) - \sum_{k\in I_c^l} \chi_k \cos kx - \sum_{k \in I_s^l} \widetilde{\chi}_k \sin kx\|_2$. Пусть выполняется $R = \sum_{s,l} \lambda_s^l h_s^l + \sum_{s,l} \widetilde{\lambda}_s^l \widetilde{h}_s^l$. Поскольку разложение (2.7) единственно, мы получаем, что l-я из компонент функции $(\overset{(\sim)}{h}{}_s^l)_l$ совпадает с ней самой, а остальные равны нулю, т. е. $(\overset{(\sim)}{h}{}_s^l)_l = \overset{(\sim)}{h}{}_s^l$, $(\overset{(\sim)}{h}{}_s^l)_\nu = 0$, $\nu \neq l$. Откуда заключаем, что l-я компонента представления (2.7) вычисляется по формуле

$$R_l = \sum_s \lambda_s^l h_s^l + \sum_s \widetilde{\lambda}_s^l \widetilde{h}_s^l.$$

Следовательно, $R_l(z_l + r_l e^{ix})$ является тригонометрическим полиномом по гармоникам $\cos kx$, $k \in I_c^l$ и $\sin kx, k \in I_s^l$. Значит, справедливо равенство $E_l^* R(z_l + r_l e^{ix})_2 = E_l^*(R - R_l)(z_l + r_l e^{ix})_2$. Введем функцию $v_l, l = \overline{1,m}$, по правилу

$$v_l(z) = (R - R_l)\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} z\Big) \tag{5.6}$$

при δ, удовлетворяющему неравенствам (4.3), и $\delta \neq 1$. Легко проверить, что функция $v_l(z)$ является гармонической в круге K. Пусть $v_l(e^{ix}) = \omega_0/\sqrt{2} + \sum_{k=1}^\infty \{\omega_k \cos kx + \widetilde{\omega}_k \sin kx\}$. Из того, что $v_l(z) \in h_\infty(K)$, следует, что $v_l(\delta e^{ix}) = \omega_0/\sqrt{2} + \sum_{k=1}^\infty \delta^k \{\omega_k \cos kx + \widetilde{\omega}_k \sin kx\}$. Отсюда вытекает неравенство

$$E_l^{*2} v_l(\delta e^{ix})_2 = \sum_{k \notin I_c^l} \delta^{2k} \omega_k^2 + \sum_{k\notin I_s^l} \delta^{2k} \widetilde{\omega}_k^2 \le \sum_{k\notin I_c^l} \omega_k^2 + \sum_{k \notin I_s^l} \widetilde{\omega}_k^2 = E_l^{*2} v_l(e^{ix})_2. \tag{5.7}$$

Откуда заключаем

$$E_l^*(R - R_l)(z_l + r_l e^{ix})_2 = E_l^* v_l(\delta e^{ix})_2 \le E_l^* v_l(e^{ix})_2 = E_l^*(R - R_l)\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big)_2. \tag{5.8}$$

Учитывая (5.5)–(5.8) и то, что $R_l\Big(z_l + \dfrac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big) = \sum\limits_{k \in I_c^l} \delta^k \lambda_k^l \cos kx + \sum\limits_{k\in I_c^l} \delta^k \widetilde{\lambda}_k^l \sin kx$, получаем, что при $l = \overline{1,m}$

$$\begin{aligned} \|R(z_l + r_l e^{ix})\|_{L_2} &= E_l^* R(z_l + r_l e^{ix})_2 = E_l^*(R - R_l)(z_l + r_l e^{ix})_2 \\ &\le E_l^*(R - R_l)\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big)_2 = E_l^* R\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta}e^{ix}\Big)_2 \le \Big\|R\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big)\Big\|_{L_2}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Аналогично получается неравенство

$$\|R(e^{ix})\|_{L_2} \le \big\|R\big(\delta e^{ix}\big)\big\|_{L_2}. \tag{5.10}$$

Используя неравенства (5.9) и (5.10) и лемму 2 при $p = 2$, получаем $\gamma(\delta; R) \le \gamma(1; R) \le \gamma(\delta; R)$. Следовательно, $\gamma(\delta; R) = \gamma(1; R)$, из чего заключаем, что все предыдущие неравенства в этой лемме должны обратиться в равенства. Значит, $E_l^* v_l(\delta e^{ix})_2 = E_l^* v_l(e^{ix})_2$. Из (5.7) видно, что это возможно, только если $\omega_k = 0$ при $k \notin I_c^l$, и $\widetilde{\omega}_k = 0$ при $k \notin I_s^l$. Следовательно, при $l = \overline{1,m}$ выполняется $v_l(e^{ix}) = \omega_0 + \sum_{k\in I_c^l} \omega_k \cos kx + \sum_{k\in I_s^l} \omega_k \sin kx$. Поскольку $v_l(z) \in h_\infty(K)$, то

$$v_l(z) = \omega_0 + \sum_{k\in I_c^l} \omega_k \mathrm{Re} z^k + \sum_{k\in I_s^l} \omega_k \mathrm{Im} z^k.$$

В силу формулы (5.6) при $l = \overline{1,m}$ получаем

$$(R - R_l)(z) = \omega_0 + \sum_{k\in I_c^l} \omega_k \mathrm{Re}\Big(\frac{\delta(z-z_l)}{r_l}\Big)^k + \sum_{k\in I_s^l} \omega_k \mathrm{Im}\Big(\frac{\delta(z-z_l)}{r_l}\Big)^k = \mathrm{Re} P_l(z), \tag{5.11}$$

где $P_l(z)$ — некоторый многочлен. Складывая неравенства (5.11) при $k = \overline{1,m}$ и используя $R(z) = \sum_{l=0}^m R_l(z)$, заключаем, что $R(z) = \Big(\mathrm{Re}\sum_{l=0}^m P_l(z) - R_0(z)\Big)/(m-1)$. Так как правая часть предыдущего равенства представляет собой вещественную часть некоторого многочлена, то $R_k(z) \equiv 0, k = \overline{1,m}$. Следовательно, $R(z) = R_0(z)$. Равенство $R_0(z) \equiv 0$ следует из формул (5.4) при $l = 0$. Таким образом, $R(z) \equiv 0$. □

Лемма 4. *Пусть функция $R(z)$ является линейной комбинацией функций $h_k(z), k = \overline{1,n}$, и $\langle R, h_k\rangle_N = 0, k = \overline{1,n}$. Тогда $R(z) \equiv 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняется $R = \sum\limits_{l=0}^{m} \Big(\sum\limits_{s=1}^{n_l} \lambda_s^l h_s^l + \sum\limits_{s=1}^{\widetilde{n}_l} \widetilde{\lambda}_s^l \widetilde{h}_s^l\Big)$. По определению произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$ и в силу того, что $\frac{\partial}{\partial r} \overset{(\sim)}{h}{}_k^l(z_l + re^{ix})\Big|_{r=r_l} = \frac{k}{r_l} \overset{(\sin)}{\cos} kx$ при $k = \overline{1, \overset{(\sim)}{n}_l}$, справедливо равенство

$$0 = \langle R, \overset{(\sim)}{h}{}_k^l\rangle_N = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial R(z_l + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_l} \frac{k}{r_l} \overset{(\sin)}{\cos} kx dx.$$

Откуда заключаем, что ряд Фурье функции $\frac{\partial R(z_l + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_l}, l = \overline{0,m}$, не содержит гармоник $\overset{(\sin)}{\cos} kx, k = \overline{1, \overset{(\sim)}{n}_l}$. Рассмотрим функцию $\widetilde{R}(z)$, гармонически сопряженную к $R(z)$. Функция $\widetilde{h}_k^l$ является гармонически сопряженной к функции h_k^l, и функция h_k^l является гармонически сопряженной к функции $-\widetilde{h}_k^l$. Следовательно, $\widetilde{R}(z)$ является линейной комбинацией функций $h_k^l(z),\ k = \overline{1,\widetilde{n}_l}$, и $\widetilde{h}_k^l(z),\ k = \overline{1,n_l}$.

Заметим, что функции $R(z)$ и $\widetilde{R}(z)$ являются однозначными вещественнозначными гармоническими функциями. Следовательно, для функции $\widetilde{R}(z)$ справедливо равенство

$$\widetilde{R}(z) - \widetilde{R}(a) = \int\limits_a^z \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial x}dx + \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial y}dy,$$

где интегрирование происходит по кривой, соединяющей точки z_0 и z. Из формул Коши — Римана следует

$$\widetilde{R}(z) - \widetilde{R}(a) = \int\limits_a^z -\frac{\partial R}{\partial y}dx + \frac{\partial R}{\partial x}dy. \tag{5.12}$$

Проверим теперь при $l = \overline{0,m}$ формулу

$$\widetilde{R}(z_l + r_l e^{i\varphi}) - \widetilde{R}(z_l + r_l) = r_l \int\limits_0^{\varphi} \frac{\partial R}{\partial r}(z_l + re^{it})\Big|_{r=r_l} dt. \tag{5.13}$$

В силу формулы (5.12) достаточно доказать

$$\int\limits_{z_l+r_l}^{z_l+r_le^{i\varphi}} -\frac{\partial R}{\partial y}dx+\frac{\partial R}{\partial x}dy = r_l\int\limits_0^{\varphi}\frac{\partial R}{\partial r}(z_l+re^{it})\Big|_{r=r_l}dt. \tag{5.14}$$

Так как координаты x и y при движении по окружности $C_r(z_l)$ определяются по формулам $x=\mathrm{Re}z_l+r\cos t$, $y=\mathrm{Im}z_l+r\sin t$, то выполняются равенства

$$\frac{\partial}{\partial r}R(z_l+re^{it}) = \frac{\partial}{\partial x}R(z_l+re^{it})\frac{dx}{dr}+\frac{\partial}{\partial y}R(z_l+re^{it})\frac{dy}{dr}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}R(z_l+re^{it})\cos t+\frac{\partial}{\partial y}R(z_l+re^{it})\sin t. \tag{5.15}$$

Из (5.15) при $x=\mathrm{Re}z_l+r_l\cos t$, $y=\mathrm{Im}z_l+r_l\sin t$ следует

$$r_l\frac{\partial}{\partial r}R(z_l+re^{it})\Big|_{r=r_l} = \frac{\partial}{\partial x}R(z_l+re^{it})\Big|_{r=r_l}dy-\frac{\partial}{\partial y}R(z_l+re^{it})\Big|_{r=r_l}dx.$$

Откуда сразу же получается равенство (5.14), эквивалентное (5.13). Из (5.13) следует, что функция $\widetilde{R}(z_l+r_le^{ix})$ как функция угла x является первообразной функции $r_l\dfrac{\partial R}{\partial r}(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}$.

Как мы уже отмечали, тригонометрический ряд Фурье функции $\dfrac{\partial R(z_l+re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_l}$, $l=\overline{0,m}$, не содержит гармоник $\overset{(\sin)}{\cos}kx$, $k=\overline{1,\overset{(\sim)}{n}_l}$. Следовательно, ряд Фурье ее первообразной $\dfrac{1}{r_l}\widetilde{R}(z_l+r_le^{i\varphi})$ не содержит гармоник $\cos kx, k=\overline{1,\widetilde{n}_l}$, и $\sin kx, k=\overline{1,n_l}$. Таким образом, при $l=\overline{0,m}$, $k=\overline{1,\overset{(\sim)}{n}_l}$, с учетом определения произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ по формуле (5.3) выполняется $0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\widetilde{R}(z_l+r_le^{ix})\overset{(\sin)}{\cos}kxdx=\langle\widetilde{R},\overset{(\sim)}{h}{}^l_k\rangle$. Таким образом, функция $\widetilde{R}(z)$ является линейной комбинацией функций $h^l_k(z), k=\overline{1,\widetilde{n}_l}$, и $\widetilde{h}^l_k(z), k=\overline{1,n_l}$, и выполняются предыдущие равенства. Отсюда, применяя лемму 3, заключаем, $\widetilde{R}(z)\equiv 0$. Следовательно, $R(z)\equiv\mathrm{const}$, поскольку ее гармонически сопряженная функция $\widetilde{R}(z)\equiv 0$. Остается заметить, что система (3.1) не содержит константы и, значит, $R(z)\equiv 0$. □

Путем непосредственного вычисления с помощью разложения в ряд Тейлора и оценки с использованием бинома Ньютона можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 5. *Для функций системы* (3.1)*, произведения* (3.2) *и числа* τ*, введенного в* (3.9)*, равномерно по* k*,* k'*,* l *и* l' *выполняются оценки*

$$\langle\overset{(\sim)}{h}{}^l_k/k,\overset{(\sim)}{h}{}^{l'}_{k'}/k'\rangle_N=\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}+O(\tau^k),\quad k\to\infty,\quad \langle\overset{(\sim)}{h}{}^l_k/k,\overset{(\sim)}{h}{}^{l'}_{k'}/k'\rangle_N=\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}+O(\tau^{k'}),\quad k'\to\infty, \tag{5.16}$$

$$\langle h^l_k/k,\widetilde{h}^{l'}_{k'}/k'\rangle_N=O(\tau^k),\quad k\to\infty,\quad \langle h^l_k/k,\widetilde{h}^{l'}_{k'}/k'\rangle_N=O(\tau^{k'}),\quad k'\to\infty, \tag{5.17}$$

$$\langle\widetilde{h}^l_k/k,h^{l'}_{k'}/k'\rangle_N=O(\tau^k),\quad k\to\infty,\quad \langle\widetilde{h}^l_k/k,h^{l'}_{k'}/k'\rangle_N=O(\tau^{k'}),\quad k'\to\infty. \tag{5.18}$$

Пусть $u(z)\in N_p(\widetilde{K}), 1\le p<\infty$. Воспользуемся представлением (2.7) и разложим функции $u_l(z_l+r_le^{ix})$, $l=\overline{0,m}$, в ряды Фурье

$$u_l(z_l+r_le^{ix})\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^l_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma^l_k\cos kx+\widetilde{\gamma}^l_k\sin kx\}, \tag{5.19}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\gamma_0^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.20}$$

Поскольку выполняются (5.19) и равенства $h_k^l(z_l + r_l e^{ix}) = \cos kx$, $\widetilde{h}_k^0(z_l + r_l e^{ix}) = \sin kx$, в круге K при $l = 0$ и вне $\overline{B_{r_l}(z_l)}$ при $l = \overline{1,m}$, выполняется

$$u_l = \frac{\gamma_0^l}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^0 + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^0\}. \tag{5.21}$$

В силу (2.7) и теоремы о среднем значении справедливо равенство

$$0 = u_l(\infty) = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/2)_{L_2}, \quad l = \overline{1,m}. \tag{5.22}$$

Так как справедливы (2.4) и (5.22), то $\gamma_0^0 = (u_0(e^{ix}), 1/2)_{L_2} = (u(e^{ix}), 1/2)_{L_2} = 0$. Следовательно, справедливы равенства $\gamma_0^l = 0$, $l = \overline{1,m}$. Из разложения (2.7) и равенств (5.21) следует, что в $\widetilde{K}$ выполняется

$$u(z) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^l(z) + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^l(z)\}. \tag{5.23}$$

Будем нумеровать коэффициенты $\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l$ одним индексом в соответствии с тем, как функции $\overset{(\sim)}{h}{}_k^l$ нумеруются в порядке (3.3). Например, если $m = 1$, то функции h_k^l и $\widetilde{h}_k^l$ будут выписаны в порядке (3.3) следующим образом:

$$h_1^0(z), \widetilde{h}_1^0(z), h_1^1(z), \widetilde{h}_1^1(z), h_2^0(z), \widetilde{h}_2^0(z) \dots .$$

Значит, $h_3 = h_1^1$, $\gamma_3 = \gamma_1^1$, $h_4 = \widetilde{h}_2^0$ и $\gamma_4 = \widetilde{\gamma}_2^0$.

Введем частичную сумму $s_n^*(z; u)$ ряда (5.23)

$$s_n^*(z; u) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k h_k(z), \tag{5.24}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (5.20). Из определения коэффициентов γ_k и леммы 1 следует, что существует константа C_1 такая, что выполняется неравенство

$$|\gamma_k| \le C_1 \|u\|_1. \tag{5.25}$$

Здесь и далее все константы C_k предполагаются зависящими только от геометрии области $\widetilde{K}$.

Лемма 6. *Пусть $u(z) \in N_2(\widetilde{K})$, тогда существует константа C_2 такая, что выполняется неравенство*

$$\|u\|_2^2 \le C_2 \sum_{l=0}^{m} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial}{\partial r} u(z_l + r e^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2 dx, \tag{5.26}$$

где норма $\|\cdot\|_2$ введена в (5.1).

Доказательство. Оценим выражение $\|u_0\|_2$, где u_0 — компонента разложения (2.7). Пусть в круге K выполняется

$$u_0(re^{ix}) = \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (\chi_k \cos kx + \widetilde{\chi}_k \sin kx).$$

Так как $u(z) \in N_2(\widetilde{K})$, то $\chi_0 = 0$, следовательно,

$$\|u_0(e^{ix})\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty}(\chi_k^2 + \widetilde{\chi}_k^2) \le \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\chi_k^2 + \widetilde{\chi}_k^2) = \Big\|\frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2}. \tag{5.27}$$

Аналогично устанавливается, что при $k = \overline{1,m}$

$$\|u_k(z_k + r_k e^{ix})\|^2_{L_2} \le \Big\|\frac{\partial u_k}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k}\Big\|^2_{L_2}. \tag{5.28}$$

Из (5.27), (5.28) и леммы 1 получаем, что для доказательства (5.26) достаточно установить при $k = \overline{0,m}$ следующее неравенство:

$$\Big\|\frac{\partial u_k}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k}\Big\|^2_{L_2} \le C_3 \sum_{l=0}^{m} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial}{\partial r} u(z_l + re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2 dx. \tag{5.29}$$

Докажем (5.29) при $k = 0$. Рассмотрим число $\rho,\ 0 < \rho < 1$, выбранное таким образом, что круги $B_{r_k}(z_k),\ k = \overline{1,m}$, лежат внутри $B_\rho(0)$. Установим неравенство

$$\Big\|\frac{\partial u_0(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2} \le C_4\Big(\Big\|\frac{\partial u(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2} + \Big\|\frac{\partial u_0(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=\rho}\Big\|^2_{L_2}\Big). \tag{5.30}$$

Из разложения (2.7) в кольце, образованном окружностями C_ρ и $C_1(0)$, следует, что существуют функции $u_0^*(z)$ и $u_1^*(z)$ такие, что $u(z) = u_0^*(z) + u_1^*(z)$, где $u_0^*(z)$ — гармоническая в $B_1(0)$ функция, $u_1^*(z)$ — гармоническая вне $B_r(0)$, $u_1^*(\infty) = 0$. С другой стороны, в силу (2.7) и того, что $u(z) \in N_2(\widetilde{K})$, выполняется равенство $u(z) = \sum_{k=0}^m u_k(z)$. Поскольку разложение (2.7) однозначно, мы заключаем, что справедливы соотношения $u_0^*(z) = u_0(z)$, $u_1^*(z) = \sum_{k=1}^m u_k(z)$.

Для функции $u(z)$ выполняются равенства (5.21), то есть

$$u_0^*(z) = \omega_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^0 r^k \cos kx + \widetilde{\omega}_k^0 r^k \sin kx, \tag{5.31}$$

$$u_1^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^1 \frac{\rho^k}{r^k} \cos kx + \widetilde{\omega}_k^1 \frac{\rho^k}{r^k} \sin kx. \tag{5.32}$$

В силу (5.31) получаем

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial r}(re^{ix}) = \frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^0 \frac{\partial r^k \cos kx}{\partial r} + \omega_k^0 \frac{\partial r^k \sin kx}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^0 k r^{k-1} \cos kx + \omega_k^0 k r^{k-1} \sin kx.$$

Следовательно, в силу $u = u_0$ справедливо равенство

$$\Big\|\frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\{(\omega_k^0)^2 + (\widetilde{\omega}_k^0)^2\}. \tag{5.33}$$

Аналогично, с учетом (5.31), (5.32) и того, что $A^* = 0$, получаем равенства

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\{(\omega_k^0 - \omega_k^1\rho^k)^2 + (\widetilde{\omega}_k^0 - \widetilde{\omega}_k^1\rho^k)^2\}, \tag{5.34}$$

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\Big\{\Big(\omega_k^0\rho^{k-1} - \frac{\omega_k^1}{\rho}\Big)^2 + \Big(\widetilde{\omega}_k^0\rho^{k-1} - \frac{\widetilde{\omega}_k^1}{\rho}\Big)^2\Big\}. \tag{5.35}$$

Для доказательства неравенства (5.30) нам нужно оценить (5.33) сверху суммой рядов (5.34) и (5.35). Для этого достаточно установить, что справедлива оценка

$$(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k)^2 \le C_4\Big\{(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k - \overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k\rho^k)^2 + \Big(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k\rho^{k-1} - \frac{\overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k}{\rho}\Big)^2\Big\}.$$

Для этого воспользуемся неравенством $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac-bd)^2$ при $a = \overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k - \overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k\rho^k$, $b = \overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k\rho^{k-1} - \overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k/\rho$, $c = 1$, $d = \rho^{k+1}$, и получим

$$\Big\{(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k - \overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k\rho^k)^2 + \Big(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k\rho^{k-1} - \frac{\overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k}{\rho}\Big)^2\Big\}\{1+\rho^{2k+2}\} \ge (\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k)^2(1-\rho^{2k})^2.$$

Остается положить $C_4 = \max\limits_k \dfrac{1+\rho^{2k+2}}{(1-\rho^{2k})^2}$. Таким образом, неравенство (5.30) установлено.

Докажем теперь неравенство

$$\Big\|\frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|^2_{L_2} \le C_5\sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial r}u(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2dx. \tag{5.36}$$

Функция $u_0(z)$ восстанавливается по значениям $\dfrac{\partial u}{\partial r}(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}$, $l=\overline{0,m}$, по формуле

$$u_0(z) = \sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(z_l+re^{i\varphi})\Big|_{r=r_l}K_l(\varphi,z)d\varphi,$$

где $K_l(\cdot,\cdot)$ — некоторые ядра. Ядра $K_l(\varphi,\rho e^{ix})$ непрерывно дифференцируемы по r, следовательно,

$$\frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho} = \sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(z_l+re^{i\varphi})\Big|_{r=r_l}\frac{\partial K_l}{\partial r}(\varphi,\rho e^{ix})\Big|_{r=\rho}d\varphi.$$

Поскольку функции $\dfrac{\partial K_l}{\partial r}(\varphi,\rho e^{ix})\Big|_{r=\rho}$ непрерывны, то они ограничены некоторой константой C_6. По неравенству Коши получаем

$$\Big\|\frac{\partial u_0}{\partial r}(\rho e^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|^2_{L_2} \le \frac{2}{\pi}C_6^2\sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(z_l+r_le^{ix})\Big|_{r=r_l}dx = 2\pi C_6^2\sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial r}u(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2dx.$$

Неравенство (5.36) доказано. Учитывая (5.30), выводим, что справедливо (5.29) при $k=0$. Случаи $k=\overline{1,m}$ разбираются аналогично. □

Доказательство следующей леммы производится аналогично доказательству леммы 5 статьи [3].

Лемма 7. *Пусть функция $u(z)\in N_p(\widetilde{K}), 1\le p<\infty$. Тогда при $\tau<\tau'<1$ выполняется оценка*

$$\|s_n(\cdot;u) - s_n^*(\cdot;u)\|_\infty = O((\tau')^{n/(2m+2)})\|u\|_1, \quad n\to\infty,$$

где сумма $s_n(\cdot;u)$ введена в (3.10), а сумма $s_n^*(\cdot;u)$ — в (5.24).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v^*(z)\in N_p(\widetilde{K})$. Из соотношений (3.11) и леммы 4 следует, что $s_n(\cdot,v^*)$ однозначно определяется из условия

$$\langle v^* - s_n(\cdot,v^*), h_k\rangle_N = 0, \quad k=\overline{1,n}. \tag{5.37}$$

Представим сумму $s_n(z,v^*)$ в следующем виде: $s_n(z,v^*)=\sum_{l=1}^{n}\alpha_l^* h_l(z)$. Тогда из условия (5.37) следует, что коэффициенты α_l^* удовлетворяют системе уравнений

$$A\alpha^*=V^*, \tag{5.38}$$

где матрица A и векторы α^*, V^* определяются по формулам $A=(\langle h_l,h_k\rangle_N)_{l,k=1}^n$, $\alpha^*=(\alpha_l^*)_{l=1}^n$, $V^*=(\langle v^*,h_k\rangle_N)_{k=1}^n$. Решение системы уравнений (5.38) записывается в виде $\alpha^*=A^{-1}V^*$. Поскольку коэффициенты α_l^* определяются из системы (5.38) однозначно, матрица A обратима.

Оценим норму $\|A^{-1}\|_{l_2(M)}=\max_{\|V\|_{l_2}=1}\|A^{-1}V\|_{l_2}$, где $\|(y_1,y_2,\dots,y_n)\|_{l_2}=\big(\sum_{k=1}^n y_k^2\big)^{1/2}$. Пусть $\|V\|_{l_2}=\|(V_1,V_2,\dots,V_n)\|_{l_2}=1$. Подберем функцию $v(z)$ как линейную комбинацию функций $h_k(z), k=\overline{1,n}$, так, чтобы $\langle v,h_k\rangle_N=V_k,\quad k=\overline{1,n}$. Пусть выполняется

$$v(z)=\sum_{l=0}^{m}\Big\{\sum_{k=1}^{n_l}\alpha_k^l h_k^l+\sum_{k=1}^{\widetilde n_l}\widetilde\alpha_k^l\widetilde h_k^l\Big\}. \tag{5.39}$$

Введем норму $\|v\|_{\widetilde K}$ следующим образом:

$$\|v\|_{\widetilde K}^2=\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2dx.$$

Используя равенство Парсеваля для функции $\dfrac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}$, равенство

$$\frac{\partial}{\partial r}\overset{(\sim)}{h}{}_k^l(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}=k\overset{(sin)}{\cos}kx$$

и определение (5.3) произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$, имеем

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big\|_{L_2}^2=\Big(\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l},\frac{1}{\sqrt2}\Big)_{L_2}^2$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l},\cos kx\Big)_{L_2}^2+\Big(\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l},\sin kx\Big)_{L_2}^2\Big\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\{\langle v,h_k^l/k\rangle_N^2+\langle v,\widetilde h_k^l/k\rangle_N^2\}\le\sum_{k=1}^{\infty}\{\langle v,h_k^l\rangle_N^2+\langle v,\widetilde h_k^l\rangle_N^2\}. \tag{5.40}$$

Из (5.40) заключаем, что выполняется

$$\|v\|_{\widetilde K}^2=\sum_{l=0}^{m}\Big\|\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big\|_{L_2}^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\langle v,h_k\rangle_N^2. \tag{5.41}$$

Из (5.39) следует, что набор $\{h_k\colon k=\overline{1,n}\}$ в представлении функции $v(z)$ состоит из функций $h_s^l, s=\overline{0,n_l}$, и $\widetilde h_s^l, s=\overline{1,\widetilde n_l}$. Оценим теперь $\langle v,\overset{(\sim)}{h}{}_{s'}^{l'}\rangle_N$ при $s'>\overset{(\sim)}{n}{}_{l'}$. Из (5.16), (5.17) и (5.18) следует, что при $s<s'$ выполняется

$$|\langle\overset{(\sim)}{h}{}_s^l,h_{s'}^{l'}\rangle_N|\le C_7ss'\tau^s,\quad|\langle\overset{(\sim)}{h}{}_s^l,h_{s'}^{l'}\rangle_N|\le C_7ss'\tau^{s'}.$$

Следовательно, $|\langle\overset{(\sim)}{h}{}_s^l,h_{s'}^{l'}\rangle_N|\le C_7ss'\tau^{(s+s')/2}$. Используя $\langle h_s^l,h_{s'}^l\rangle_N=0$ при $s<s'$, и неравенство $|\alpha_k|\le C_1\|v\|_1$ (см. (5.25) при $u(z)=v(z)$) и оценку $k\tau^{k/2}=O(\tau^{k/4})$, получаем при $s'\to\infty$

$$\langle v,h_{s'}^l\rangle_N=\Big\langle\sum_{l'=0}^{m}\Big\{\sum_{s=0}^{n_l}\alpha_s^l h_s^l+\sum_{s=1}^{\widetilde n_l}\widetilde\alpha_s^l\widetilde h_s^l\Big\},h_{s'}^{l'}\Big\rangle_N\le\|v\|_1\sum_{l'=0}^{m}\sum_{s=0}^{\infty}O(ss'\tau^{(s+s')/2})\le\|v\|_2O(\tau^{s'/4}),$$

где норма $\|\cdot\|_p$ введена в (5.1). Аналогично оценивается выражение $\langle v, \widetilde{h}^{l'}_{s'}\rangle_N$ при $s' > \widetilde{n}_{l'}$. Таким образом, при $s > \overset{(\sim)}{n}_l, l = \overline{0, m}$, выполняется

$$\langle v, \overset{(\sim)}{h}{}^l_s\rangle_N = O(\tau^{s/4})\|v\|_2, \quad s \to \infty. \tag{5.42}$$

Заметим, что если $\overset{(\sim)}{h}{}^l_k = h_n$, то для числа n справедливы неравенства $(m+1)(2k-1) < n \leq (m+1)(2k+1)$. Из (5.41), (5.42), предыдущего замечания и леммы 6 следует

$$\|v\|^2_{\widetilde{K}} = \sum_{k=1}^{n}\langle v, h_k\rangle^2_N + \|v\|^2_2 O(\tau^{n/(8m+8)}) = \sum_{k=1}^{n}\langle v, h_k\rangle^2_N + \|v\|^2_{\widetilde{K}} O(\tau^{n/(8m+8)}), \quad n \to \infty. \tag{5.43}$$

Из оценки (5.43) выводим, что при достаточно больших n выполняется

$$\|v\|^2_{\widetilde{K}} \leq C_8 \sum_{k=1}^{n}\langle v, h_k\rangle^2_N. \tag{5.44}$$

Из леммы 4 вытекает, что $\Big(\sum_{k=1}^n \langle v, h_k\rangle^2_N\Big)^{1/2}$ является нормой в пространстве линейных комбинаций функций $h_k(z), k = \overline{1, n}$. Отсюда в силу эквивалентности норм в конечномерных пространствах неравенство (5.44) будет выполняться для всех n с некоторой константой C_9.

Из сделанного выше предположения о том, что $\|V\|^2_2 = 1$, и равенств $\|V\|^2_2 = \sum_{k=1}^n \langle v, h_k\rangle^2_N$ следует, что выполняется $\|v\|_{\widetilde{K}} \leq C_9$. Заметим, что коэффициенты $\overset{(\sim)}{\alpha}{}^l_k$ в (5.39) являются решением системы уравнений $A\alpha = V$, где $\alpha = (\alpha^l_k)^n_{k=1}$. Из формулы (5.25) при $u(z) = v(z)$ следует, что $|\alpha_s| \leq C_1\|v\|_2$. С помощью леммы 6 получаем $|\alpha_s| \leq C_{10}$. Откуда заключаем $\|A^{-1}V\|_2 = \|(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\|_2 \leq C_{10}\sqrt{n}$. Поэтому справедливо неравенство

$$\|A^{-1}\|_{l_2(M)} \leq C_{10}\sqrt{n}. \tag{5.45}$$

Из (3.11) следует, что линейный оператор частичной суммы $s_n\colon u \to s_n(\cdot; u)$ сохраняет линейные комбинации функций $h_k(z), k = \overline{1, n}$. Отсюда выводим, что выполняется $s_n(\cdot; u) - s^*_n(\cdot; u) = s_n(\cdot; u - s^*_n(\cdot; u))$.

Пусть далее $v^*(z) = u(z) - s^*_n(z; u)$. Здесь частичная сумма $s_n(\cdot; v^*)$ находится из системы (5.38). В силу оценки (5.45) получаем, что справедливо неравенство

$$\|\alpha^*\|_{l_2} \leq \|A^{-1}\|_{l_2(M)}\|V^*\|_{l_2} \leq C_{10}\sqrt{n}\|V^*\|_{l_2}. \tag{5.46}$$

Оценим теперь величину $\|V^*\|_{l_2}$. Координаты V^*_k вычисляются по формуле $V^*_k = \langle v^*, h_k\rangle_N = \langle u - s^*_n(\cdot, u), h_k\rangle_N$. Из равенств (5.23) и (5.24) следует

$$u(z) - s^*_n(z; u) = \sum_{l=n+1}^{\infty}\gamma_l h_l(z). \tag{5.47}$$

Пусть $h_k = \overset{(\sim)}{h}{}^s_t$, тогда из (2.6) и (3.2) следует

$$\langle u - s^*_n(\cdot; u), h_k\rangle_N = \lim_{R\to r_s}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}(u - s^*_n(\cdot; u))(z_s + re^{ix})\Big|_{r=R}\frac{\partial}{\partial r}h_k(z_s + re^{ix})\Big|_{r=R}dx. \tag{5.48}$$

Поскольку $s^*_n(z; u)$ сходится равномерно к $u(z)$ внутри $\widetilde{K}$, то, подставляя в (5.48) формулу (5.47) и меняя местами суммирование и интегрирование, в пределе получаем

$$\langle u - s^*_n(\cdot; u), h_k\rangle_N = \sum_{l=n+1}^{\infty}\gamma_l\langle h_l, h_k\rangle_N.$$

С помощью (5.25) и леммы 5 выводим

$$\langle u - s_n^*(\cdot; u), h_k\rangle_N = \sum_{l=n+1}^{\infty} \gamma_l \langle h_l, h_k\rangle_N = \sum_{l=n+1}^{\infty} |\gamma_l| O(kl\tau^{l/(2m+2)})$$

$$\leq C_1 \|u\|_1 \sum_{l=n+1}^{\infty} O(kl\tau^{l/(2m+2)}) = \|u\|_1 O(kn\tau^{n/(2m+2)}), \quad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\|V^*\|_{l_2} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \langle u - s_n(\cdot; u), h_k\rangle_N^2\Big)^{1/2}$$

$$= O\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 n^2 \tau^{2n/(2m+2)}\Big)^{1/2}\Big)\|u\|_1 = O(n^{5/2}\tau^{n/(2m+2)})\|u\|_1, \quad n \to \infty.$$

Подставим это соотношение в (5.46) и получим

$$\|\alpha^*\|_{l_2} = O(n^3 \tau^{n/(2m+2)})\|u\|_1, \quad n \to \infty. \tag{5.49}$$

Из определения коэффициентов α_k^* следует, что выполняются равенства $s_n(z; u - s_n^*(\cdot; u)) = s_n(z; v^*) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* h_k(z)$. Из (5.49) и того, что $|h_k| = O(1), z \in \widetilde{K}$, получаем

$$\|s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u)\|_\infty = \|s_n(u - s_n^*(\cdot; u))\|_\infty = \Big\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* h_k(z)\Big\|_\infty$$

$$\leq \max_{k=\overline{1,n}} |\alpha_k^*| \sum_{k=1}^{n} \|h_k(z)\|_\infty = O(n^4 \tau^{n/(2m+2)})\|u\|_1 = O((\tau')^{n/(2m+2)})\|u\|_1, \quad n \to \infty, \quad \tau < \tau' < 1.$$

□

Автор благодарит Николая Ивановича Черных за внимание к работе и за замечания, позволившие улучшить текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–149.
2. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 99–114.
3. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами и их приложения к задачам математической физики// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 109–124.
4. **Голузин Г. М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
5. **Субботин Ю. Н., Черных Н. И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
6. **Offin D., Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. approx. 1993. Vol. 9, № 2. P. 319–325.

Дубосарский Глеб Александрович
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: glebUU@mail.ru

Поступила 10.10.2014