ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.929

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Ю. Ф. Долгий

Прямая задача оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием связана с нахождением решения краевой задачи для нелинейного матричного функционально-дифференциального уравнения. Предлагается при построении точных решений задачи оптимальной стабилизации перейти к обратной задаче нахождения абсолютно непрерывной составляющей меры Стилтьеса. Обратная задача описывается матричным линейным интегральным уравнением второго рода. Получены достаточные условия, при выполнении которых обратная задача сводится к краевой задаче для автономной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При решении последней задачи используется преобразование Лапласа.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с последействием, устойчивость движений, оптимальная стабилизация, дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, уравнение Риккати, функционально-дифференциальные уравнения, краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразование Лапласа.

Yu. F. Dolgii. Exact solutions of an optimal stabilization problem for systems of differential equations with aftereffect.

The direct problem of optimal stabilization for systems of differential equations with aftereffect is related to finding a solution of a boundary value problem for a nonlinear matrix functional differential equation. In the construction of exact solutions of the optimal stabilization problem, it is proposed to pass to the inverse problem of finding an absolutely continuous component of a Stieltjes measure. The inverse problem is described by a matrix linear integral equation of the second kind. Sufficient conditions are obtained under which the inverse problem can be reduced to a boundary value problem for an autonomous linear system of ordinary differential equations. In the solution of this problem, the Laplace transform is used.

Keywords: differential equations with aftereffect, stability of motions, optimal stabilization, differential equations in a Banach space, Riccati equation, functional differential equations, boundary value problem for ordinary differential equations, Laplace transform.

1. Введение

Объект управления описывается линейной системой дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-r}^{0} d\eta(s)x(t+s) + Bu, \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x : [-r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; $r > 0$; B — постоянная матрица; матричнозначная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r, 0]$, $\eta(0) = 0$.

Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1.1) и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(x^\top(t)C_x x(t) + u^\top(t)C_u u(t)\Big)\, dt, \tag{1.2}$$

где C_x и C_u — положительно определенные матрицы.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00094).

При решении задачи оптимальной стабилизации для линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием при квадратичном критерии качества Н. Н. Красовский предложил использовать квадратичные функционалы [1; 2]. Для рассматриваемого подхода были получены достаточные условия существования оптимального стабилизирующего управления [1; 3]. Ю. С. Осипов установил их связь с вполне управляемостью специальной конечномерной системы [4–6]. В функциональном пространстве состояний системе дифференциальных уравнений с последействием можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение в банаховом пространстве [7]. Задача определения коэффициентов аналитического представления квадратичного функционала может быть сведена к проблеме нахождения решения специальной определяющей системы обобщенных уравнений Риккати [1; 8–11]. При построении оптимального управления возникают трудности, связанные с интегрированием определяющей системы обобщенных уравнений Риккати. Точные решения этой системы уравнений получены в рамках специальных постановок задач [10; 12].

Прямая задача оптимальной стабилизации для системы дифференциальных уравнений с последействием связана с нахождением решения краевой залачи для нелинейного матричного функционально-дифференциального уравнения [13]. В настоящей работе предлагается при построении точных решений задачи оптимальной стабилизации перейти к обратной задаче нахождения абсолютно непрерывной составляющей меры Стилтьеса по заданному решению краевой задачи. Получены достаточные условия, при выполнении которых обратная задача сводится к краевой задаче для автономной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний

При решении задачи стабилизации удобно, следуя Н. Н. Красовскому [7], от конечномерной постановки задачи перейти к бесконечномерной, вводя с помощью формул $\mathbf{x}_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $t \in \mathbb{R}^+$, функциональные элементы для решений системы (1.1), принадлежащие сепарабельному гильбертовому пространству $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2\left([-r, 0), \mathbb{R}^n\right) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^{0} \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$.

В функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ системе (1.1) соответствует уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где неограниченный оператор $\mathbf{A}$ задается формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \int\limits_{-r}^{0} d\eta(s)\mathbf{x}(s)$$

и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}) = \mathbb{W}_2^1\left([-r, 0], \mathbb{R}^n\right)$, а ограниченный оператор $\mathbf{B} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{H}$ — формулами

$$(\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{B}u)(0) = Bu.$$

Показатель качества (1.2) переходных процессов в функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ описывается формулой

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\langle \mathbf{C}_x \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle + u^\top(t) C_u u(t) \Big)\, dt,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{C}_x : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{C}_x \mathbf{x})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{C}_x \mathbf{x})(0) = C_x \mathbf{x}(0).$$

Теорема 1 [3]. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой. Тогда существует оптимальное стабилизирующее управление, определяемое формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1} B^\top (\mathbf{U}\mathbf{x})(0), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{U}$ *— вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор, удовлетворяющий операторному уравнению Риккати*

$$\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{U} + \mathbf{C}_x - \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U} = 0. \tag{2.2}$$

В приведенной теореме неограниченный сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ задается формулами [13]

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{y})(\vartheta) = -\frac{d\hat{\mathbf{y}}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{A}^*\mathbf{y})(0) = \hat{\mathbf{y}}(0),$$

где

$$\hat{\mathbf{y}}(\vartheta) = \mathbf{y}(\vartheta) - \eta^\top(\vartheta)\mathbf{y}(0), \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad \hat{\mathbf{y}}(0) = \hat{\mathbf{y}}(-0),$$

и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}^*) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{H} : \hat{\mathbf{y}}(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1([-r,0], \mathbb{R}^n), \mathbf{y}(-r) = 0\right\}$, а ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{D} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ задается формулами $(\mathbf{D}\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $(\mathbf{D}\mathbf{x})(0) = D\mathbf{x}(0)$, где $D = BC_u^{-1}B^\top$.

Проблема нахождения решения операторного равнения Риккати рассматривалась в работах [1; 8; 9; 13].

Лемма 1 [13]. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой. Тогда решение уравнения Риккати* (2.2) *единственно и определяет вполне непрерывный оператор Гильберта — Шмидта, допускающий представление*

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})(\vartheta) = K(\vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^{0} K(\vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

в котором $K(\vartheta, s) = K^\top(s, \vartheta)$, $\vartheta, s \in [-r, 0]$, *и матричнозначная функция* K *удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \hat{K}^\top(s, \vartheta)}{\partial s} + K(\vartheta, 0)DK(0, s) = 0, \quad \vartheta, s \in [-r, 0), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, 0)}{\partial \vartheta} - \hat{K}^\top(-0, \vartheta) + K(\vartheta, 0)DK(0, 0) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \tag{2.4}$$

$$\hat{K}(-0, 0) + \hat{K}^\top(-0, 0) - K(0, 0)DK(0, 0) + C_x = 0, \tag{2.5}$$

$$\hat{K}(-r, s) + \eta^\top(-r)K(0, s) = 0, \quad s \in [-r, 0]. \tag{2.6}$$

Здесь $\hat{K}(\vartheta, s) = K(\vartheta, s) - \eta^\top(\vartheta)K(0, s)$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $s \in [-r, 0]$.

3. Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения

Рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta} = \int_{-r}^{\vartheta} \Big(X(\tau)d\eta(\tau - \vartheta) + d\eta^\top(\tau)X^\top(\tau - \vartheta) \Big) \tag{3.1}$$

$$+ X(-r)\eta(-r - \vartheta) + \left(X(\vartheta) - \zeta(\vartheta)X(-r)\right) D\eta^{\top -1}(-r)X(-r)$$

$$-\int_{-r}^{\vartheta}(X(\tau)-\zeta(\tau)X(-r))\,D\left(X^\top(\tau-\vartheta)-X^\top(-r)\zeta^\top(\tau-\vartheta)\right)d\tau,$$

$$X(0)+X^\top(0)-X^\top(-r)\eta^{-1}(-r)D\eta^{\top-1}(-r)X(-r)+C_x=0, \tag{3.2}$$

$$X(-r))\eta(-r)=\eta^\top(-r)X^\top(-r). \tag{3.3}$$

Здесь $\zeta(\vartheta)=\eta^\top(\vartheta)\eta^{\top-1}(-r),\ \vartheta\in[-r,0],\ det\eta(-r)\neq 0$.

Теорема 2. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой и* $det\eta(-r)\neq 0$. *Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}]=C_u^{-1}B^\top\Big(X^\top(-r)\eta^{-1}(-r)\mathbf{x}(0)$$

$$-\int_{-r}^{0}\left(X^\top(s)-X^\top(-r)\eta^{-1}(-r)\eta(s)\right)\mathbf{x}(s)ds\Big),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{H}, \tag{3.4}$$

где X — решение краевой задачи (3.1)–(3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $X(\vartheta)=\hat K(\vartheta,0)$, $\vartheta\in[-r,0)$, $X(0)=X(-0)$. Из определения функции $\hat K$ следует, что $K(\vartheta,0)=X(\vartheta)+\eta^\top(\vartheta)K(0,0)$, $\vartheta\in[-r,0)$. Используя формулу (2.6), находим

$$K(0,0)=-\eta^{\top-1}(-r)X(-r),$$

$$K(\vartheta,0)=X(\vartheta)-\eta^\top(\vartheta)X^\top(-r)\eta^{-1}(-r),\quad \vartheta\in[-r,0). \tag{3.5}$$

Согласно полученным результатам из (2.1) следует (3.4), а из (2.5) и симметричности матрицы $K(0,0)$ вытекает справедливость равенств (3.2), (3.3).

Для окончания доказательства теоремы достаточно показать, что функция X удовлетворяет уравнению (3.1). Введем матричнозначную функцию

$$\Phi(\vartheta,s)=\hat K(\vartheta,s)-\hat K(\vartheta,0)\eta(s),\quad \vartheta,s\in[-r,0). \tag{3.6}$$

Учитывая определение функции $\hat K$, имеем

$$\Phi(\vartheta,s)=K(\vartheta,s)-K(\vartheta,0)\eta(s)-\eta^\top(\vartheta)K(0,s)+\eta^\top(\vartheta)K(0,0)\eta(s),\quad \vartheta,s\in[-r,0).$$

Из последнего равенства и симметричности матричнозначной функции K следует, что матричнозначная функция Φ удовлетворяет равенству

$$\Phi^\top(\vartheta,s)=\Phi(s,\vartheta),\quad \vartheta,s\in[-r,0). \tag{3.7}$$

Используя формулу (3.6), уравнение (2.3) преобразуем к виду

$$\frac{\partial\Phi(\vartheta,s)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\Phi(\vartheta,s)}{\partial s}+\frac{\partial\hat K(\vartheta,0)}{\partial\vartheta}\eta(s)+\eta^\top(\vartheta)\frac{\partial\hat K^\top(s,0)}{\partial s}$$

$$+K(\vartheta,0)DK^\top(s,0)=0,\quad \vartheta,s\in[-r,0). \tag{3.8}$$

Это матричное уравнение распадается на независимые скалярные уравнения в частных производных первого порядка, определяющие элементы матричнозначной функции Φ. Учитывая условие (3.7), решение уравнения (3.8) можно искать в области $-r\le s\le\vartheta<0$. Используя методы интегрирования скалярных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [14, § 53], находим

$$\Phi(\vartheta,s)=\Psi(\vartheta-s)-\int_{-r}^{s}K(\tau+\vartheta-s,0)DK(0,\tau)d\tau$$

$$-\int_{-r}^{s}\Big(\frac{\partial\hat{K}(\tau+\vartheta-s,0)}{\partial\tau}\eta(\tau)+\eta^{\top}(\tau+\vartheta-s)\frac{\partial\hat{K}^{\top}(\tau,0)}{\partial\tau}\Big)d\tau,\quad -r\le s\le\vartheta<0. \tag{3.9}$$

Учитывая предыдущую формулу, определения функций Φ, $\hat{K}$ и условие (2.6), находим

$$\Psi(\vartheta-s)=-\hat{K}(\vartheta-s-r,0)\eta(-r),\quad -r\le s\le\vartheta<0.$$

Тогда из (3.9) следует, что решение уравнения (3.8) определяется формулой

$$\Phi(\vartheta,s)=-X(\vartheta-s-r)\eta(-r)-\int_{-r}^{s}K(\tau+\vartheta-s,0)DK(0,\tau)d\tau$$

$$-\int_{-r}^{s}\left(\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau+\vartheta-s}\eta(\tau)+\eta^{\top}(\tau+\vartheta-s)\frac{dX^{\top}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau,\quad -r\le s\le\vartheta<0. \tag{3.10}$$

Используя определения функций Φ, $\hat{K}$ и условие (2.6), убеждаемся в справедливости формулы

$$K(\vartheta,s)=\Phi(\vartheta,s)+X(\vartheta)\eta(s)+\eta^{\top}(\vartheta)X^{\top}(s)+\eta^{\top}(\vartheta)\eta^{\top-1}(-r)X(-r)\eta(s),\quad -r\le s\le\vartheta<0.$$

Из формул (3.10), (3.6) при $\vartheta\in[-r,0)$ находим

$$\Phi(-0,\vartheta)=\hat{K}(-0,\vartheta)-\hat{K}(-0,0)\eta(\vartheta)=-X(-\vartheta-r)\eta(-r)$$

$$-\int_{-r}^{\vartheta}\left(K(\tau-\vartheta,0)DK(0,\tau)+\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}\eta(\tau)+\eta^{\top}(\tau-\vartheta)\frac{dX^{\top}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau.$$

Из полученного равенства при $\vartheta\in[-r,0)$ следует, что

$$\hat{K}(-0,\vartheta)=-X(-\vartheta-r)\eta(-r)+X(0)\eta(\vartheta)$$

$$-\int_{-r}^{\vartheta}\left(K(\tau-\vartheta,0)DK(0,\tau)+\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}\eta(\tau)+\eta^{\top}(\tau-\vartheta)\frac{dX^{\top}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau.$$

Подставляя найденное выражение в (2.4) и учитывая определение функции X, имеем

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta}=-\eta^{\top}(-r)X^{\top}(-\vartheta-r)+\eta^{\top}(\vartheta)X^{\top}(0)$$

$$-\int_{-r}^{\vartheta}\left(K(0,\tau)DK(\tau-\vartheta,0)+\eta^{\top}(\tau)\frac{dX^{\top}(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}+\frac{dX(\tau)}{d\tau}\eta(\tau-\vartheta)\right)d\tau$$

$$-K(\vartheta,0)DK(0,0),\quad \vartheta\in[-r,0).$$

Используя формулу интегрирования по частям, преобразуем последнее уравнение к виду (3.1). $\square$

4. Обратная задача оптимальной стабилизации

Переход от определяющей системы уравнений (2.3)–(2.6) к краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения (3.1)–(3.3) позволяет упростить процедуру построения оптимального стабилизирующего управления. Применение аналитических методов при нахождении решения краевой задачи (3.1)–(3.3) также наталкивается на серьезные технические трудности. Наложим дополнительные ограничения на ядро Стилтьеса, полагая $\eta = \eta_d + \eta_a$, где $\eta_d(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in (-r_1, 0]$, $\eta_d(\vartheta) = -\sum_{k=1}^{q} \tilde{A}_k$, $\vartheta \in (-r_{q+1}, -r_q]$, $q = \overline{1, p-1}$, $\eta_d(\vartheta) = -\sum_{k=1}^{p} \tilde{A}_k$, $\vartheta \in [-r, -r_p]$, $\eta_a(\vartheta) = -\tilde{A}_0 + \int_0^{\vartheta} A(s)ds$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $\eta_a(0) = 0$, $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_p \leq r$, $\tilde{A}_k$, $k = \overline{0, p}$, — постоянные матрицы, A — матричнозначная функция с интегрируемыми с квадратом элементами. Система (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{p} \tilde{A}_k x(t - r_k) + \int_{-r}^{0} A(s)x(t+s)ds + Bu, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.1}$$

Теорема 3. *Пусть система* (4.1) *является стабилизируемой и* $\det\eta(-r) \neq 0$. *Тогда краевая задача для функционально-дифференциального уравнения* (3.1)–(3.3) *эквивалентна функционально-дифференциальному уравнению*

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi(\vartheta)}{d\vartheta} &= \Psi(\vartheta)\tilde{A}_0 - \Big(\Psi(\vartheta) + \eta_d^{\top}(\vartheta)K_0\Big) DK_0 + A^{\top}(\vartheta)K_0 \\ &- \eta^{\top}(-r)K_0\eta(-\vartheta - r) + \eta_a^{\top}(-r)K_0\eta_a(-\vartheta - r) \\ &+ \int_{-r}^{\vartheta} \Big(A^{\top}(z)\Psi^{\top}(z-\vartheta) + \Psi(z)A(z-\vartheta)\Big) dz \\ &- \int_{-r}^{\vartheta} \Big(\Psi(z) + \eta_d^{\top}(z)K_0\Big) D \Big(\Psi^{\top}(z-\vartheta) + K_0\eta_d(z-\vartheta)\Big) dz \\ &+ \sum_{r_q < r+\vartheta} \Big(\Psi(\vartheta - r_q) - \eta_a^{\top}(\vartheta - r_q)K_0\Big) \tilde{A}_q + \sum_{r_q > -\vartheta} \tilde{A}_q^{\top} \Big(\Psi^{\top}(-\vartheta - r_q) - K_0\eta_a(-\vartheta - r_q)\Big)\end{aligned} \tag{4.2}$$

с краевым условием $\Psi(-r) = -\eta_d^{\top}(-r)K_0$ *и алгебраическому уравнению*

$$\tilde{A}_0^{\top}K_0 + K_0\tilde{A}_0 - K_0DK_0 + \Psi^{\top}(0) + \Psi(0) + C_x = 0. \tag{4.3}$$

Связь решения X *краевой задачи* (3.1)–(3.3) *с решением* Ψ, K_0 *системы*(4.2)–(4.3) *определяется формулами* $\Psi(\vartheta) = X(\vartheta) + \eta_a^{\top}(\vartheta)K_0$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $\Psi(0) = \Psi(-0)$, $K_0 = -X^{\top}(-r)\eta^{-1}(-r)$.

Доказательство. Учитывая связь решения X краевой задачи (3.1)–(3.3) с решением Ψ, K_0 системы (4.2), (4.3), получим краевое условие $\Psi(-r) = -\eta_d^{\top}(-r)K_0$, а из равенства (3.2) алгебраическое уравнение (4.3). Преобразуя интегралы в правой части уравнения (3.1), имеем

$$\begin{aligned}&\int_{-r}^{\vartheta} \Big(X(\tau)d\eta_a(\tau - \vartheta) + d\eta_a^{\top}(\tau)X^{\top}(\tau - \vartheta)\Big) \\ &= \int_{-r}^{\vartheta} \Big(\Psi(\tau)A(\tau - \vartheta) + A^{\top}(\tau)\Psi^{\top}(\tau - \vartheta)\Big) d\tau + \Psi(\vartheta)\tilde{A}_0 + \eta_a^{\top}(-r)K_0\eta_a(-r - \vartheta),\end{aligned}$$

$$\int\limits_{-r}^{\vartheta} \Big(X(\tau) d\eta_d(\tau-\vartheta) + d\eta_d^\top(\tau) X^\top(\tau-\vartheta) \Big)$$

$$= \sum_{r_q<r+\vartheta} \Big(\Psi(\vartheta - r_q) - \eta_a^\top(\vartheta - r_q) K_0 \Big) \tilde{A}_q + \sum_{r_q>-\vartheta} \tilde{A}_q^\top \Big(\Psi^\top(-\vartheta - r_q) - K_0 \eta_a(-\vartheta - r_q) \Big).$$

Используя эти равенства, получим (4.2). □

Нелинейное уравнение (4.2), определяющее матричную функцию Ψ, линейно зависит от матричной функции A. Поэтому обратная задача нахождения матричного коэффициента A системы дифференциальных уравнений с последействием (4.1) по заданному решению Ψ уравнения (4.2) линейна.

При решении задачи восстановления задаются матрицы $\tilde{A}_k$, $k = \overline{0,p}$, а матрица K_0 определяется из уравнения (4.3). Матричная функция A является решением интегрального уравнения второго рода

$$\int\limits_{-r}^{\vartheta} A^\top(z)\Psi^\top(z-\vartheta)dz + \int\limits_{-r-\vartheta}^{0} \Psi(z+\vartheta)A(z)dz + A^\top(\vartheta)K_0$$

$$+ \eta_d^\top(-r)K_0 \int\limits_{-r-\vartheta}^{0} A(z)dz + \int\limits_{-r}^{0} A^\top(z)dzK_0\eta_d(-r-\vartheta)$$

$$+ \sum_{r_q<r+\vartheta} \int\limits_{\vartheta-r_q}^{0} A^\top(z)dzK_0\tilde{A}_q + \sum_{r_q>-\vartheta} \tilde{A}_q^\top K_0 \int\limits_{-r_q-\vartheta}^{0} A(z)dz = G(\vartheta), \tag{4.4}$$

где

$$G(\vartheta) = d\Psi(\vartheta)/d\vartheta - \Psi(\vartheta)\tilde{A}_0 + \int\limits_{-r}^{\vartheta} \Big(\Psi(z) + \eta_d^\top(z)K_0 \Big) D \Big(\Psi^\top(z-\vartheta) + K_0\eta_d(z-\vartheta) \Big) dz$$

$$+ \eta_d^\top(-r)K_0 \Big(\eta_d(-r-\vartheta) - \tilde{A}_0 \Big) - \tilde{A}_0^\top K_0 \eta_d(-r-\vartheta) + \left(\Psi(\vartheta) + \eta_d(\vartheta)K_0 \right) DK_0$$

$$- \sum_{r_q<r+\vartheta} \Big(\Psi(\vartheta - r_q) + \tilde{A}_0^\top K_0 \Big) \tilde{A}_q - \sum_{r_q>-\vartheta} \tilde{A}_q^\top \Big(\Psi^\top(-\vartheta - r_q) + K_0\tilde{A}_0 \Big), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Точные решения уравнения (4.4) удалось найти при выполнении следующих дополнительных условий:

1) Функция Ψ задается формулой

$$\Psi(\vartheta) = \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} (\vartheta + r)^j e^{\lambda_k(\vartheta+r)} \Psi_{kj}, \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{4.5}$$

и удовлетворяет условию $\Psi(-r) = -\eta_d^\top(-r)K_0$. Здесь Ψ_{kj} — матрицы размерности $n \times n$, $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{0, M}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k \neq 0$, $k = \overline{1, M}$. Если λ_k — вещественное число, то матрица Ψ_{kj} имеет вещественные элементы, а каждому невещественному числу λ_k соответствует сопряженное число $\lambda_{k'} = \overline{\lambda_k}$ и $\Psi_{k'j} = \overline{\Psi_{kj}}$. Последние условия гарантируют вещественность матричнозначной функции Ψ.

2) Сосредоточенные запаздывания соизмеримы, т. е. $r_q = N_q\Delta$, где N_q — натуральные числа, $q = \overline{1, p}$, $r = r_p$.

Покажем, что при выполнении последних условий задачу нахождения решения интегрального уравнения второго рода (4.4) можно заменить задачей нахождения решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем обозначения

$$X_{kj}(\vartheta) = \int\limits_{-r-\vartheta}^{0} (z+r+\vartheta)^j e^{\lambda_k(z+r+\vartheta)} A(z)dz,$$

$$Y_{kj}(\vartheta) = \int\limits_{-r}^{\vartheta} (z+r-\vartheta)^j e^{\lambda_k(z+r-\vartheta)} A^\top(z)dz, \quad j=\overline{0,M_k}, \quad k=\overline{0,M}.$$

Используя представление (4.5), уравнение (4.4) запишем в следующем виде:

$$A^\top(\vartheta)K_0 + \sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(Y_{kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj}X_{kj}(\vartheta)\Big) + \eta_d^\top(-r)X_{00}(\vartheta) + Y_{00}(0)\eta_d(-r-\vartheta)$$

$$+\sum_{r_q<r+\vartheta}\left(Y_{00}(0)-Y_{00}(\vartheta-r_q)\right)\tilde{A}_q + \sum_{r_q>-\vartheta}\tilde{A}_q^\top X_{00}(\vartheta-r+r_q) = G(\vartheta), \quad \vartheta\in[-r,0].$$

Функции $X_{kj}, Y_{kj}, j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$, являются компонентами решения следующей краевой задачи:

$$\frac{dX_{k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k X_{k0}(\vartheta) + A(-r-\vartheta), \quad \frac{dY_{k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k Y_{k0}(\vartheta) + e^{\lambda_k r}A^\top(\vartheta),$$

$$\frac{dX_{kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k X_{kj}(\vartheta) + jX_{k(j-1)}(\vartheta), \quad \frac{dY_{kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k Y_{kj}(\vartheta) - jY_{k(j-1)}(\vartheta) + r^j e^{\lambda_k r}A^\top(\vartheta),$$

$$j=\overline{0,M_k}, \quad k=\overline{0,M}, \tag{4.6}$$

$$X_{kj}(-r)=0, \quad Y_{kj}(-r)=0, \quad j=\overline{0,M_k}, \quad k=\overline{0,M}.$$

Вводя обозначения $G_1(\vartheta)=G(\vartheta), G_2(\vartheta)=G^\top(-r-\vartheta), A_1(\vartheta)=A^\top(\vartheta), A_2(\vartheta)=A(-r-\vartheta)$, $X_{1kj}(\vartheta)=X_{kj}(\vartheta), X_{2kj}(\vartheta)=X_{kj}^\top(-r-\vartheta), Y_{1kj}(\vartheta)=Y_{kj}(\vartheta),\ Y_{2kj}(\vartheta)=Y_{kj}^\top(-r-\vartheta),\ j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}, \vartheta\in[-r/2,0]$, преобразуем краевую задачу (4.6) к следующей форме:

$$\frac{dX_{1k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k X_{1k0}(\vartheta) + A_2(\vartheta), \quad \frac{dY_{1k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k Y_{1k0}(\vartheta) + e^{\lambda_k r}A_1(\vartheta),$$

$$\frac{dX_{2k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k X_{2k0}(\vartheta) - A_1(\vartheta), \quad \frac{dY_{2k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k Y_{2k0}(\vartheta) - e^{\lambda_k r}A_2(\vartheta),$$

$$\frac{dX_{1kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k X_{1kj}(\vartheta) + jX_{1k(j-1)}(\vartheta), \quad \frac{dY_{1kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k Y_{1kj}(\vartheta) - jY_{1k(j-1)}(\vartheta) + r^j e^{\lambda_k r}A_1(\vartheta),$$

$$\frac{dX_{2kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k X_{2kj}(\vartheta) - jX_{2k(j-1)}(\vartheta), \quad \frac{dY_{2kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k Y_{2kj}(\vartheta) + jY_{2k(j-1)}(\vartheta) - r^j e^{\lambda_k r}A_2(\vartheta),$$

$$j=\overline{1,M_k}, \quad k=\overline{0,M}, \tag{4.7}$$

$$X_{2kj}(-r)=0, \quad Y_{2kj}(-r)=0, \quad X_{1kj}(-r/2)=X_{2kj}^\top(-r/2), \quad Y_{1kj}(-r/2)=Y_{2kj}^\top(-r/2), \tag{4.8}$$

$$j=\overline{0,M_k}, \quad k=\overline{0,M}.$$

Здесь функции A_1, A_2 определяются формулами

$$A_1(\vartheta)K_0 = G_1(\vartheta) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(Y_{1kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj}X_{1kj}(\vartheta)\Big) - \eta_d^\top(-r)X_{100}(\vartheta) - Y_{100}(0)\eta_d(-r-\vartheta)$$

$$-\sum_{r_q<r+\vartheta}\left(Y_{100}(0)-Y_{00}(\vartheta-r_q)\right)\tilde{A}_q-\sum_{r_q>-\vartheta}\tilde{A}_q^\top X_{00}(\vartheta-r+r_q),$$

$$K_0A_2(\vartheta)=G_2(\vartheta)-\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(X_{2kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top+\Psi_{kj}Y_{2kj}(\vartheta)\Big)-X_{200}(\vartheta)\eta_d(-r)-\eta_d^\top(\vartheta)Y_{100}^\top(0)$$

$$-\sum_{r_q<-\vartheta}\tilde{A}_q^\top\Big(Y_{100}^\top(0)-Y_{00}^\top(-\vartheta-r_q-r)\Big)-\sum_{r_q>\vartheta+r}X_{00}^\top(-\vartheta-2r+r_q)\tilde{A}_q,\quad \vartheta\in[-r/2,0]. \tag{4.9}$$

Система (4.7), (4.9) является системой дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами. Отклонения могут быть положительными и отрицательными. Соизмеримость сосредоточенных запаздываний позволяет ввести новые функции $X_{1kjq}(s)=X_{1kj}(s+(qr)/(2N_p))$, $X_{2kjq}(s)=X_{2kj}(s+(qr)/(2N_p))$, $Y_{1kjq}(s)=Y_{1kj}(s+(qr)/(2N_p))$, $Y_{2kjq}(s)=Y_{2kj}(s+(qr)/(2N_p))$, $s\in[-r/(2N_p),0]$, $q=\overline{0,N_p-1}$. Для этих функций последняя краевая задача преобразуется в линейную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Задача интегрируется аналитическими методами, но в случае ее большой размерности нахождение решения в аналитической форме затруднено. С помощью преобразования Лапласа полученную краевую задачу можно свести к алгебраической.

5. Использование преобразования Лапласа при решении краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом разделе будем предполагать, что функция Ψ задается формулой (4.5) и $\eta_d=0$. Тогда формулы (4.9) упрощаются

$$A_1(\vartheta)K_0=G_1(\vartheta)-\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(Y_{1kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top+\Psi_{kj}X_{1kj}(\vartheta)\Big),$$

$$K_0A_2(\vartheta)=G_2(\vartheta)-\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(X_{2kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top+\Psi_{kj}Y_{2kj}(\vartheta)\Big),\quad \vartheta\in[-r/2,0]. \tag{5.1}$$

В этом случае не требуется дополнительных преобразований связанных с разбиением отрезка $[-r/2,0]$, так как система (4.7), (5.1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

При выполнении условия $\eta_d=0$ функция G является матричнозначным квазиполиномом и допускает представление

$$G(\vartheta)=\sum_{Re(\lambda_k)\neq 0,k=\overline{1,M}}\sum_{j=0}^{M_k+\tilde{M}}(\vartheta+r)^je^{\lambda_k(\vartheta+r)}G_{kj}^{+}+\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{M_k+\tilde{M}+1}(\vartheta+r)^je^{-\lambda_k(\vartheta+r)}G_{kj}^{-},$$

где $\vartheta\in[-r,0]$, $\tilde{M}=\max\limits_{0\le k\le M}M_k$.

Будем искать решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.7), (5.1), используя метод преобразования Лапласа. С этой целью, учитывая аналитические представления функций G_1,G_2 в форме квазиполиномов, продолжим рассматриваемые уравнения на полуось $(-\infty,0]$. Преобразования Лапласа решений системы уравнений (4.7), (5.1)

$$L[X_{1kj}](\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{0}X_{1kj}(s)\exp(\lambda s)ds,\ L[X_{2kj}](\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{0}X_{2kj}(s)\exp(\lambda s)ds,$$

$$L[Y_{1kj}](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} Y_{1kj}(s)\exp(\lambda s)ds,\ L[Y_{2kj}](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} Y_{2kj}(s)\exp(\lambda s)ds,$$

$$j = \overline{0, M_k}, \quad k = \overline{0, M}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

удовлетворяют системе дискретных разностных уравнений

$$L[X_{1k0}](\lambda) = -\frac{1}{\lambda + \lambda_k} L[A_2](\lambda) + \frac{1}{\lambda + \lambda_k} X_{1k0}(0),$$

$$L[Y_{1k0}](\lambda) = -\frac{\exp(\lambda_k r)}{\lambda - \lambda_k} L[A_1](\lambda) + \frac{1}{\lambda - \lambda_k} Y_{1k0}(0),$$

$$L[X_{2k0}](\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_k} L[A_1](\lambda),\ L[Y_{2k0}](\lambda) = \frac{\exp(\lambda_k r)}{\lambda + \lambda_k} L[A_2](\lambda),$$

$$L[X_{1kj}](\lambda) = -\frac{j}{\lambda + \lambda_k} L[X_{1k(j-1)}](\lambda) + \frac{1}{\lambda + \lambda_k} X_{1kj}(0),$$

$$L[Y_{1kj}](\lambda) = \frac{j}{\lambda - \lambda_k} L[Y_{1k(j-1)}](\lambda) + \frac{1}{\lambda - \lambda_k} Y_{1kj}(0) - \frac{r^j \exp(\lambda_k r)}{\lambda - \lambda_k} L[A_1](\lambda),$$

$$L[X_{2kj}](\lambda) = \frac{j}{\lambda - \lambda_k} L[X_{2k(j-1)}](\lambda),$$

$$L[Y_{2kj}](\lambda) = -\frac{j}{\lambda + \lambda_k} L[Y_{2k(j-1)}](\lambda) + \frac{r^j \exp(\lambda_k r)}{\lambda + \lambda_k} L[A_2](\lambda),$$

$$j = \overline{1, M_k}, \quad k = \overline{0, M}.$$

Решения системы разностных уравнений определяются формулами

$$L[X_{1kj}](\lambda) = \sum_{q=0}^{j} \frac{(-1)^{j-q} j!}{q!(\lambda + \lambda_k)^{j-q+1}} X_{1kq}(0) - \frac{(-1)^j j!}{(\lambda + \lambda_k)^{j+1}} L[A_2](\lambda),$$

$$L[Y_{1kj}](\lambda) = \sum_{q=0}^{j} \frac{j!}{q!(\lambda - \lambda_k)^{j-q+1}} Y_{1kq}(0) - \exp(\lambda_k r) \sum_{q=0}^{j} \frac{j! r^q}{q!(\lambda - \lambda_k)^{j-q+1}} L[A_1](\lambda),$$

$$L[X_{2kj}](\lambda) = \frac{j!}{(\lambda - \lambda_k)^{j+1}} L[A_1](\lambda), \tag{5.2}$$

$$L[Y_{2kj}](\lambda) = \exp(\lambda_k r) \sum_{q=0}^{j} \frac{(-1)^{j-q} j! r^q}{q!(\lambda + \lambda_k)^{j-q+1}} L[A_2](\lambda),$$

$$j = \overline{0, M_k}, \quad k = \overline{0, M}.$$

Используя (5.1), имеем

$$L[A_1](\lambda)K_0 = L[G_1](\lambda) - \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} \left(L[Y_{1kj}](\lambda)\Psi_{kj}^{\top} + \Psi_{kj} L[X_{1kj}](\lambda) \right),$$

$$K_0 L[A_2](\lambda) = L[G_2](\lambda) - \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} \left(L[X_{2kj}](\lambda)\Psi_{kj}^{\top} + \Psi_{kj} L[Y_{2kj}](\lambda) \right).$$

Учитывая (5.2), для $L[A_1](\lambda)$ и $L[A_2](\lambda)$ получим линейную неоднородную систему алгебраических матричных уравнений

$$L[A_1](\lambda)\left(\Phi_{11}(\lambda)-K_0\right)+\Phi_{12}(\lambda)L[A_2](\lambda)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(S_{1kj}(\lambda)X_{1kj}(0)-Y_{1kj}(0)S_{1kj}^{\top}(-\lambda)\Big)-L[G_1](\lambda),$$

$$L[A_1](\lambda)\Phi_{12}^{\top}(-\lambda)+\Big(\Phi_{11}^{\top}(-\lambda)-K_0\Big)L[A_2](\lambda)=-L[G_2](\lambda). \tag{5.3}$$

Здесь $\Phi_{11},\Phi_{12},S_{1kj}$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$, определяются формулами

$$\Phi_{11}(\lambda)=\sum_{k=0}^{M}e^{\lambda_k r}\sum_{j=0}^{M_k}j!\Psi_{kj}^{\top}\sum_{p=0}^{j}\frac{r^p}{p!(\lambda-\lambda_k)^{j+1-p}},$$

$$\Phi_{12}(\lambda)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Psi_{kj}\frac{(-1)^j j!}{(\lambda+\lambda_k)^{j+1}},$$

$$S_{1kj}(\lambda)=\sum_{p=j}^{M_k}\Psi_{kp}\frac{(-1)^{p-j}p!}{j!(\lambda+\lambda_k)^{p+1-j}},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Коэффициенты системы (5.3) являются рациональными функциями параметра λ. Поэтому рациональными функциями являются также решения этой системы $L[A_1](\lambda)$, $L[A_2](\lambda)$ и преобразования Лапласа $L[X_{1kj}](\lambda), L[Y_{1kj}](\lambda)$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$. Они будут линейно зависеть от неизвестных матриц $X_{1kj}(0)$, $Y_{1kj}(0)$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$. Применяя обратные преобразования Лапласа, находим функции A_1, A_2, X_{1kj},Y_{1kj}, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$, также линейно зависящие от неизвестных матриц $X_{1kj}(0)$, $Y_{1kj}(0)$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$. Последние матрицы находятся из краевых условий (4.8).

П р и м е р. Пусть для системы (4.1) и критерия качества (1.2) выполняются условия: $n=m=1$, $r=2$, $\tilde{A}_0=0$, $B=1$, $C_x=6$, $C_u=1$. Функцию Ψ определим формулой $\Psi(\vartheta)=-\frac{1}{2}(\vartheta+2)$, $\vartheta\in[-2,0]$ и найдем решение $K_0=2$ алгебраического уравнения (4.3).

Используя краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений (4.7), (5.1), получим систему дифференциальных уравнений

$$2\frac{d^2A_1}{d\vartheta^2}-\frac{dA_1}{d\vartheta}+\frac{1}{2}A_1-\frac{1}{2}A_2=-\frac{1}{4}\vartheta,\ 2\frac{d^2A_2}{d\vartheta^2}+\frac{dA_2}{d\vartheta}+\frac{1}{2}A_2-\frac{1}{2}A_1=\frac{1}{4}(\vartheta+2)$$

с краевыми условиями

$$A_1(-1)=A_2(-1),\quad \frac{dA_1(-1)}{d\vartheta}=-\frac{dA_2(-1)}{d\vartheta},\quad A_2(0)=-\frac{1}{4},\quad \frac{dA_2(0)}{d\vartheta}=\frac{5}{8}.$$

Решение последней краевой задачи определяется формулами

$$A_1(\vartheta)=d_1-\frac{1}{4}(\vartheta+1)+d_3\left(\cos\left(0.5(\vartheta+1)\right)-\sin\left(0.5(\vartheta+1)\right)\right),$$

$$A_2(\vartheta)=d_1+\frac{1}{4}(\vartheta+1)+d_3\left(\cos\left(0.5(\vartheta+1)\right)+\sin\left(0.5(\vartheta+1)\right)\right),\quad \vartheta\in[-1,0],$$

$$d_1=\frac{\sin(0.5)+5\cos(0.5)}{4\left(\sin(0.5)-\cos(0.5)\right)},\quad d_3=\frac{3}{4\left(\cos(0.5)-\sin(0.5)\right)}.$$

Восстанавленная система (4.1) имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-2}^{0} \Big(d_1 - \frac{1}{4}(\vartheta+1) + d_3\left(\cos\left(0.5(\vartheta+1)\right) - \sin\left(0.5(\vartheta+1)\right)\right)\Big)x(t+\vartheta)d\vartheta, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Ее оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой

$$u^0[x(\cdot)] = 2x(0) - \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}(\vartheta+2)x(\vartheta)d\vartheta, \quad x(\cdot) \in \mathbb{H}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
2. **Красовский Н.Н.** Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздыванием времени // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 295–302.
3. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 1. P. 95–139.
4. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
5. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
6. **Габелая А.Г., Иваненко В.И., Одарич О.Н.** Стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1976. № 8. С. 12–16.
7. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
8. **Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K.** Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 48–88.
9. **Янушевский Р.Т.** Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.
10. **Ким А.В., Ложников А.Б.** Линейно-квадратичные задачи управления для систем с последействием. Точные решения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 15–31.
11. **Долгий Ю.Ф.** К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 92–105.
12. **Колмановский В.Б.** Точные формулы в задаче управления некоторыми системами с последействием // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 228–235.
13. **Долгий Ю.Ф.** Аналитические решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления / ИПУ РАН. М., 2014. С. 1349–1362.
14. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 232 с.

Поступила 27.04.2015

Долгий Юрий Филиппович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Yurii.Dolgii@imm.uran.ru