ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА БОМАНА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАНКЛЯ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Приводится решение экстремальной задачи Бомана для неотрицательных функций с носителем преобразования Данкля в евклидовом шаре или параллелепипеде. При доказательстве используются инвариантность задачи относительно ортогональных преобразований, квадратурные формулы по нулям функций Бесселя.

Система корней, группа отражений, вес Данкля, преобразование Данкля, экстремальная задача Бомана, квадратурная формула Бесселя.

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov. Bohman extremal problem for the Dunkl transform.

We give a solution of the Bohman extremal problem for nonnegative functions with the support of the Dunkl transform in a Euclidean ball or parallelepiped. The proof uses the invariance of the problem under orthogonal transforms and quadrature formulas with zeros of Bessel functions.

Keywords: root system, reflection group, Dunkl weight, Dunkl transform, Bohman extremal problem, Bessel quadrature formula.

Введение

Работа посвящена решению экстремальной задачи Бомана для преобразования Данкля.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$,

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)} \tag{0.1}$$

— обобщенный степенной вес, или вес Данкля, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k(\alpha)\colon R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, порожденной R,

$$c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\, dx$$

— интеграл Макдональда — Мета — Сельберга, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x)\, dx$, $L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, d\mu_k(x),$$

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_d = (0, \ldots, 0, 1)$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$, $\sigma_\alpha \in O(d)$ — отражение относительно гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$,

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)(\alpha, e_j)\, \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha x)}{(\alpha, x)}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00045), Министерства образования и науки РФ (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К) и Фонда Дмитрия Зимина “Династия”.

— дифференциально-разностные операторы Данкля, $\Delta_k f(x) = \sum_{j=1}^{d} D_j^2 f(x)$ — лапласиан Данкля, $e_k(x,y) = E_k(x,iy)$ — обобщенная экспонента (ядро Данкля), являющаяся решением системы уравнений

$$D_j f(x) = iy_j f(x), \quad j = 1,\dots,d, \quad f(0) = 1.$$

Для $e_k(x,y)$ многие свойства аналогичны свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$, в частности

$$-\Delta_k e_k(x,y) = |y|^2 e_k(x,y). \tag{0.2}$$

Гармонический анализ в пространствах с весом Данкля осуществляется с помощью преобразования Данкля

$$F_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}\, d\mu_k(x).$$

Основные факты из теории Данкля можно найти в [1]. В частности, обратное преобразование Данкля определяется как $F_k^{-1}(f)(x) = F_k(f)(-x)$. В безвесовом случае ($k(\alpha) \equiv 0$) имеем классическое преобразование Фурье с коэффициентом $(2\pi)^{-d/2}$, для которого будем использовать обозначение $F(f)$.

Пусть $V \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклое центрально-симметричное компактное тело с центром в нуле, инвариантное относительно группы отражений $G(R)$,

$$|x|_V = \min\{\lambda > 0\colon x \in \lambda V\}$$

— норма в $\mathbb{R}^d$, порожденная телом V,

$$V^* = \Bigl\{x \in \mathbb{R}^d\colon \max_{y \in V} |(x,y)| \le 1\Bigr\}$$

— поляра V, $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f, $\mathcal{E}_k(\tau V)$ — класс неотрицательных непрерывных функций f, $\tau > 0$, для которых

$$|x|^2 f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k), \quad \operatorname{supp} F_k(f) \subset \tau V, \quad F_k(f)(0) = 1.$$

Если $f \in \mathcal{E}_k(\tau V)$, то для всех $z \in \mathbb{C}^d$ справедливо равенство

$$f(z) = \int_{\tau V} F_k(f)(y) e_k(z,y)\, d\mu_k(y),$$

поэтому $f(z)$ — целая функция, для которой справедлива экспоненциальная оценка

$$|f(z)| \le c_f e^{\tau |\operatorname{Im} z|_{V^*}}, \quad c_f > 0, \quad \operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_d). \tag{0.3}$$

Обратное утверждение, называемое теоремой Пэли — Винера, доказано для случаев, когда V — евклидов шар или параллелепипед [2].

Задача Бомана для преобразования Данкля состоит в вычислении величины

$$\mathrm{B}_k(\tau V) = \inf\Bigl\{\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\, d\mu_k(x)\colon f \in \mathcal{E}_k(\tau V)\Bigr\}. \tag{0.4}$$

В безвесовом случае будем писать $\mathrm{B}(\tau V)$.

Задача Бомана допускает вероятностную интерпретацию. Функцию $f \in \mathcal{E}_k(\tau V)$ можно рассматривать как плотность распределения случайного вектора $X = (X_1, \dots, X_d)$, для которого $\varphi(x) = F_k(f)(x)$ — характеристическая функция, так как $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(x)$ — непрерывная и положительно определенная функция. Действительно, используя интегральное представление обобщенной экспоненты [3]

$$e_k(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,y)}\, d\mu_k^x(\xi),$$

где μ_k^x — вероятностная борелевская мера, носитель которой лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{co}\{gx\colon g\in G(R)\}$ орбиты x относительно группы $G(R)$, для произвольных наборов $\{x_m\}_{m=1}^N\subset\mathbb{R}^d$, $\{\alpha_m\}_{m=1}^N\subset\mathbb{C}$ получим

$$\sum_{m,n=1}^N\varphi(x_m-x_n)\alpha_m\overline{\alpha_n}=\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\sum_{m,n=1}^N\overline{e_k(x,x_m-x_n)}\alpha_m\overline{\alpha_n}\,d\mu_k(x)$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\sum_{m,n=1}^N e^{-i(\xi,x_m-x_n)}\alpha_m\overline{\alpha_n}\,d\mu_k^x(\xi)\,d\mu_k(x)$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\biggl|\sum_{m=1}^N\alpha_m e^{-i(\xi,x_m)}\biggr|^2\,d\mu_k^x(\xi)\,d\mu_k(x)\ge 0.$$

Согласно (0.2)

$$E|X|^2=\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2f(x)\,d\mu_k(x)=-\Delta_k\varphi(0)$$

— второй момент распределения. Таким образом, в задаче Бомана необходимо в классе $\mathcal{E}_k(\tau V)$ найти плотность распределения с минимальным вторым моментом.

Заметим, что $\operatorname{supp}F_k(f)\subset\tau V$ тогда и только тогда, когда для $g(x)=f(\tau x)$, $\operatorname{supp}F_k(g)\subset V$. Следовательно, делая замену переменной, используя однородность функций $|x|^2$, $v_k(x)$ и полагая $|k|=\sum_{\alpha\in R_+}k(\alpha)$, получим

$$\mathrm{B}_k(\tau V)=\inf\biggl\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2f(x)\,d\mu_k(x)\colon\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\,d\mu_k(x)=1\biggr\}$$

$$=\inf\biggl\{\frac{1}{\tau^{2+d-1+|k|}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2g(x)\,d\mu_k(x)\colon\frac{1}{\tau^{d-1+|k|}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}g(x)\,d\mu_k(x)=1\biggr\}$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\inf\biggl\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2g(x)\,d\mu_k(x)\colon\int\limits_{\mathbb{R}^d}g(x)\,d\mu_k(x)=1\biggr\}=\frac{1}{\tau^2}\,\mathrm{B}_k(V).$$

Итак, $\mathrm{B}_k(V)=\tau^2\mathrm{B}_k(\tau V)$, поэтому в дальнейшем положим $\tau=1$.

В одномерном случае задачу (0.4) поставил и решил Х. Боман [4]. Он доказал, что

$$\mathrm{B}([-1,1])=-(F(f_1))''(0)=\pi^2,$$

где

$$f_1(x)=(2/\pi)^{5/2}\left(\frac{\cos(x/2)}{1-(x/\pi)^2}\right)^2,\quad F(f_1)(y)=\begin{cases}(1-|y|)\cos\pi y+\pi^{-1}\sin\pi|y|, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|\ge 1.\end{cases}$$

Функция $F(f_1)$ является генератором известного положительного метода приближения Бомана — Коровкина (см. [5]).

Пусть $B^d=\{x\in\mathbb{R}^d\colon |x|\le 1\}$ — евклидов шар, $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $J_\lambda(t)$ — функция Бесселя порядка $\lambda\ge -1/2$,

$$j_\lambda(t)=2^\lambda\Gamma(\lambda+1)\,\frac{J_\lambda(t)}{t^\lambda}=\prod_{s=-\infty}^{\infty}\Bigl(1-\frac{t}{q_{\lambda,s}}\Bigr)$$

— нормированная функция Бесселя, $0 < q_{\lambda,1} < q_{\lambda,2} < \ldots$ — положительные нули $J_\lambda(t)$, $q_{\lambda,1-s} = -q_{\lambda,s}$ — отрицательные нули, $s \in \mathbb{N}$,

$$q_\lambda = q_{\lambda,1} = \min_{s\in\mathbb{Z}} |q_{\lambda,s}|. \tag{0.5}$$

При $d = 1$ имеем $j_{-1/2}(t) = \cos t$ и $q_{-1/2} = \pi/2$.

В многомерном случае задачу Бомана (0.4) решили В. Эм, Т. Гнейтинг и Д. Ричардс [6]. Они доказали, что

$$\mathrm{B}(B^d) = -\Delta F(f_d)(0) = 4q^2_{d/2-1},$$

$$f_d(x) = \frac{2^{2-3d/2}}{\Gamma(d/2)q^2_{d/2-1}} \left(\frac{j_{d/2-1}(|x|/2)}{1-(|x|/(2q_{d/2-1}))^2}\right)^2.$$

В.А. Юдин [7] еще до работы [6] предложил общий метод построения функций из класса $\mathcal{E}(V)$. Следуя ему, один из авторов данной статьи в [8] выписал функции f_d, $F(f_d)$ и определил многомерный радиальный аналог линейного положительного метода приближения Бомана—Коровкина.

Пусть $b_\lambda^{-1} = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)$, $d\nu_\lambda(t) = b_\lambda t^{2\lambda+1}\,dt$, $t \in \mathbb{R}_+$, $L_1(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,\lambda} = \int_0^\infty |f(t)|\,d\nu_\lambda(t),$$

$$H_\lambda f(s) = \int_0^\infty f(t) j_\lambda(st)\,d\nu_\lambda(t)$$

— преобразование Ганкеля (см. [9, гл. 1]),

$$D_\lambda = \frac{1}{t^{2\lambda+1}}\frac{d}{dt}\Bigl(t^{2\lambda+1}\frac{d}{dt}\Bigr)$$

— дифференциальный оператор Бесселя, $\mathcal{E}_\lambda(\tau)$ — класс четных неотрицательных непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций f, для которых

$$t^2 f \in L_1(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda), \quad \operatorname{supp} H_\lambda f \subset [0,\tau], \quad H_\lambda f(0) = 1.$$

Если $f \in \mathcal{E}_\lambda(\tau)$, то для всех $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \int_0^\tau H_\lambda f(s) j_\lambda(zs)\,d\nu_\lambda(s),$$

поэтому $f(z)$ — четная целая функция, для которой справедлива экспоненциальная оценка

$$|f(z)| \le c_f e^{\tau|\mathrm{Im}\,z|}, \quad c_f > 0.$$

Справедливо и обратное утверждение [2], называемое теоремой Пэли—Винера.

Задача Бомана для преобразования Ганкеля состоит в вычислении величины

$$\mathrm{B}_\lambda(\tau) = \inf\Bigl\{\int_0^\infty t^2 f(t)\,d\nu_\lambda(t)\colon f \in \mathcal{E}_\lambda(\tau)\Bigr\}.$$

В [10] доказано, что

$$\mathrm{B}_\lambda(\tau) = -D_\lambda H_\lambda f_\lambda(0) = \Bigl(\frac{2q_\lambda}{\tau}\Bigr)^2$$

и единственная экстремальная функция имеет вид

$$f_{\lambda,\tau}(t) = \frac{2^{-3\lambda-1}\tau^{2\lambda+2}}{\Gamma(\lambda+1)q_\lambda^2}\left(\frac{j_\lambda(\tau t/2)}{1-(\tau t/(2q_\lambda))^2}\right)^2. \tag{0.6}$$

В работе решается задача Бомана для преобразования Данкля в случаях, когда тело V есть евклидов шар или параллелепипед. Для евклидова шара будем использовать инвариантность задачи относительно группы ортогональных преобразований $O(d)$ пространства $\mathbb{R}^d$ и решение задачи Бомана для преобразования Ганкеля, для параллелепипеда — многомерную квадратурную формулу по нулям функций Бесселя.

1. Задача Бомана для евклидова шара

Пусть $\lambda_k = d/2-1+\sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)$, $S^{d-1} = \{x\in\mathbb{R}^d\colon |x|=1\}$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^d$, $x'\in S^{d-1}$,

$$a_k^{-1} = \int\limits_{S^{d-1}} v_k(x')\,dx', \quad d\omega_k(x') = a_k v_k(x')\,dx',$$

где dx' — лебегова мера на сфере.

Применяя сферические координаты, получим

$$c_k^{-1} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-r^2/2} r^{d-1+2|k|}\,dr \int\limits_{S^{d-1}} v_k(x')\,dx' = b_{\lambda_k}^{-1} a_k^{-1}. \tag{1.1}$$

Известно [11], что

$$\int\limits_{S^{d-1}} \overline{e_k(x,y')}\,d\omega_k(y') = j_{\lambda_k}(|x|), \quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

Если $f\in\mathcal{E}_k(B^d)$ — радиальная функция, $f(x)=f_0(|x|)$, $|x|=t$, $|y|=s$, то согласно (1.1), (1.2) имеем

$$F_k(f)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x) = \int\limits_0^\infty f_0(t) j_{\lambda_k}(st)\,d\nu_{\lambda_k}(t) = H_{\lambda_k} f_0(s),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_k(x) = \int\limits_0^\infty t^2 f_0(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t),$$

и $f_0\in\mathcal{E}_{\lambda_k}(1)$, поэтому $\mathrm{B}_k(B^d)\le \mathrm{B}_{\lambda_k}(1)$. Докажем противоположное неравенство.

Лемма 1. *Если функция $f\in\mathcal{E}_k(B^d)$, то функция*

$$f_0(t) = \int\limits_{S^{d-1}} f(tx')\,d\omega_k(x') \in \mathcal{E}_{\lambda_k}(1)$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_k(x) = \int\limits_0^\infty t^2 f_0(t)\,d\nu_\lambda(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интеграл, определяющий $f_0(t)$, инвариантен относительно ортогональных преобразований, поэтому $f_0(t)$ — неотрицательная четная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция. Применяя (1.1), получим

$$H_{\lambda_k} f_0(0) = \int_0^\infty f_0(t)\, d\nu_{\lambda_k}(t) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(tx')\, d\omega_k(x')\, d\nu_{\lambda_k}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_k(x) = 1,$$

$$\int_0^\infty t^2 f_0(t)\, d\nu_\lambda(t) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} t^2 f(tx')\, d\omega_k(x')\, d\nu_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\, d\mu_k(x).$$

Значит, $f_0(t), t^2 f_0(t) \in L_1(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k})$.

Так как $f(z)$ — целая функция на $\mathbb{C}^d$, то для всех $x' \in S^{d-1}$ функция $f(\zeta x')$ — целая по ζ на $\mathbb{C}$. Поэтому по теоремам Коши и Мореры $f_0(\zeta)$ — четная целая функция на $\mathbb{C}$, для которой в силу (0.3) справедлива оценка

$$|f_0(\zeta)| \le \int_{S^{d-1}} |f(\zeta x')|\, d\omega_k(x') \le \int_{S^{d-1}} c_f e^{|\mathrm{Im}\,(\zeta x')|}\, d\omega_k(x') = c_f e^{|\mathrm{Im}\,\zeta|}.$$

По теореме Пэли — Винера [2] носитель преобразования Ганкеля $\operatorname{supp} H_\lambda f_0 \subset [0,1]$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает, что $\mathrm{B}_k(B^d) \ge \mathrm{B}_{\lambda_k}(1)$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $\lambda_k = d/2 - 1 + \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)$, *то*

$$\mathrm{B}_k(B^d) = -\Delta_k F_k(f_k)(0) = 4q_{\lambda_k}^2$$

и радиальная экстремальная функция имеет вид

$$f_k(x) = \frac{2^{-3\lambda_k-1}}{\Gamma(\lambda_k+1)q_{\lambda_k}^2}\left(\frac{j_{\lambda_k}(|x|/2)}{1-(|x|/(2q_{\lambda_k}))^2}\right)^2.$$

2. Задача Бомана для параллелепипеда

Евклидов шар инвариантен относительно всей группы ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^d$, поэтому задачу Бомана в этом случае удалось решить для произвольного веса (0.1). Опишем вес (0.1), систему корней и порожденную ею группу отражений, относительно которой инвариантен параллелепипед $\Pi_a = \prod_{j=1}^d [-a_j, a_j]^d$, $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $a_j > 0$.

Рассмотрим систему корней $R = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$. Для нее $R_+ = \{e_1, \dots, e_d\}$, $G(R)$ — группа диагональных матриц порядка d с элементами ± 1 на главной диагонали, изоморфная $\mathbb{Z}_2^d$. Для инвариантной функции $k(\pm e_j) = \lambda_j + 1/2$, $\lambda_j \ge -1/2$ и степенной вес имеет вид

$$v_k(x) = \prod_{j=1}^d |x_j|^{2\lambda_j+1}. \tag{2.1}$$

Обобщенная экспонента имеет вид

$$e_k(x,y) = \prod_{j=1}^d e_{\lambda_j}(x_j y_j), \quad e_{\lambda_j}(x_j y_j) = j_{\lambda_j}(x_j y_j) - i j'_{\lambda_j}(x_j y_j). \tag{2.2}$$

Нормы в $\mathbb{R}^d$, инвариантные относительно группы отражений $G(R)$, зависят от модулей координат. Таковой является норма, порожденная параллелепипедом Π_a. Норма, порожденная полярой Π_a, запишется так:

$$|x|_{\Pi_a^*} = \sum_{j=1}^{d} a_j |x_j|. \tag{2.3}$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}^d$,

$$D_\lambda f(x) = \sum_{j=1}^{d} D_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{x_j^{2\lambda_j+1}} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(x_j^{2\lambda_j+1} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\Big)$$

— лапласиан Данкля Δ_k на функциях, четных по каждой переменной,

$$r_\lambda(s,a) = \prod_{j=1}^{d} r_{\lambda_j}(s_j, a_j), \quad r_{\lambda_j}(s_j, a_j) = \frac{2^{2\lambda_j+3} |q_{\lambda_j, s_j}|^{2\lambda_j}}{a_j^{2\lambda_j+2} \big(J'_{\lambda_j}(q_{\lambda_j, s_j})\big)^2} > 0,$$

$$b_a^s = (b_1^{s_1}, \dots, b_d^{s_d}) = \Big(\frac{2q_{\lambda_1, s_1}}{a_1}, \dots, \frac{2q_{\lambda_d, s_d}}{a_d}\Big),$$

$E^{d,a}$ — класс целых функций f в $\mathbb{C}^d$ экспоненциального типа a_j по j-й переменной,

$$|f(z)| \leq c_f \exp\Big(\sum_{j=1}^{d} a_j |z_j|\Big), \quad z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d. \tag{2.4}$$

Нам понадобится многомерный вариант квадратурной формулы по нулям функций Бесселя [12], в одномерном случае доказанный в [13; 14].

Лемма 2 [12, с. 49]. *Если вес v_k определен в (2.1), $f \in E^{d,a} \cap L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_k(x) = c_k \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} r_\lambda(s,a) f(b_a^s), \tag{2.5}$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно.

Теорема 2. *Если вес v_k определен в (2.1), $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$,*

$$b_a = \Big(\frac{2q_{\lambda_1}}{a_1}, \dots, \frac{2q_{\lambda_d}}{a_d}\Big),$$

то

$$\mathrm{B}_k(\Pi_a) = -\Delta_k F_k(f_k)(0) = -D_\lambda F_k(f_k)(0) = |b_a|^2 \tag{2.6}$$

и экстремальная функция имеет вид

$$f_k(x) = \prod_{j=1}^{d} f_{\lambda_j, a_j}(x_j), \tag{2.7}$$

где функции $f_{\lambda_j, a_j}(x_j)$ из (0.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathcal{E}_k(\Pi_a)$. Так как в силу (0.3), (2.3), (2.4)

$$\mathcal{E}_k(\Pi_a) \subset E^{d,a} \cap L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k),$$

то

$$f(x), |x|^2 f(x) \in E^{d,a} \cap L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k).$$

Применяя квадратурную формулу (2.5) и учитывая неравенство $|b_a^s|^2 \geq |b_a|^2$ при $s \in \mathbb{Z}^d$, справедливое в силу (0.5), получим

$$1 = F_k(f)(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_k(x) = c_k \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} r_\lambda(s,a) f(b_a^s),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\, d\mu_k(x) = c_k \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} r_\lambda(s,a)|b_a^s|^2 f(b_a^s) \geq |b_a|^2 c_k \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} r_\lambda(s,a) f(b_a^s) = |b_a|^2.$$

Оценка снизу в (2.6) получена.

Функция $f_k(x)$ (2.7) четная по каждой переменной. В силу (2.2)

$$F_k(f_k)(y) = \prod_{j=1}^d H_{\lambda_j} f_{\lambda_j,a_j}(y_j).$$

Согласно свойствам функций (0.6) отсюда вытекает, что $f_k \in \mathcal{E}_k(\Pi_a)$ и

$$-D_\lambda F_k(f_k)(0) = \sum_{j=1}^d \prod_{i\neq j} H_{\lambda_i} f_{\lambda_i,a_i}(0)\, \frac{1}{y_j^{2\lambda_j+1}} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(y_j^{2\lambda_j+1} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big) H_{\lambda_j} f_{\lambda_j,a_j}(0)$$

$$= \sum_{j=1}^d \Big(\frac{2q_{\lambda_j}}{a_j}\Big)^2 = |b_a|^2.$$

Оценка сверху в (2.6) и экстремальность f_k получены. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rösler M.** Dunkl operators: Theory and applications. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135. (Lecture Notes in Math.; vol. 1817.)
2. **Jeu M. de** Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform // Trans. Amer. Math. Soc. 2006. Vol. 358, no. 10. P. 4225–4250.
3. **Rösler M.** A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355, no. 6. P. 2413–2438.
4. **Bohman H.** Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1960. Vol. 4. P. 99–157.
5. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 368 с.
6. **Ehm W., Gneiting T., Richards D.** Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356, no. 11. P. 4655–4685.
7. **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона // Мат. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 439–444.
8. **Иванов В.И.** О приближении функций в пространствах L_p // Мат. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 15–40.
9. **Горбачев Д.В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений. Тула: Гриф и К, 2005. 192 с.
10. **Горбачев Д.В.** Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье — Ганкеля // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.
11. **Xu Y.** Dunkl operators: Funk–Hecke formula for orthogonal polynomials on spheres and on balls // Bull. London Math. Soc. 2000. Vol. 32, no. 4. P. 447–457.
12. **Иванов А.В.** Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2011. Вып. 2. С. 29–58.

13. **Frappier C., Oliver P.** A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60, no. 201. C. 303–316.
14. **Grosev G.R., Rahman Q.I.** A quadrature formulae with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64, no. 210. P. 715–725.

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru

Поступила 10.01.2015

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru