ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518.452

О РАСХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ В КЛАССАХ $\varphi(L)$, БЛИЗКИХ К L [1]

М. Р. Габдуллин

В работе показана неулучшаемость теоремы о достаточных условиях сходимости тригонометрического ряда Фурье функции в классах $\varphi(L)$ в случае, когда класс $\varphi(L)$ “близок” к L.

Ключевые слова: тригонометрические ряды Фурье, классы $\varphi(L)$.

M. R. Gabdullin. On the divergence of trigonometric Fourier series in classes $\varphi(L)$ contained in L.

We show the unimprovability of a theorem on sufficient convergence conditions for the trigonometric Fourier series of a function in classes $\varphi(L)$ in the case when the class $\varphi(L)$ is “close” to L.

Keywords: trigonometric Fourier series, classes $\varphi(L)$.

Пусть f — 2π-периодическая суммируемая на $[0,2\pi)$ функция. Напомним, что ее коэффициенты Фурье и частные суммы Фурье определяются следующим образом:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt,\quad S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Для неубывающей функции $\varphi\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $\lim_{u\to\infty}\varphi(u)=\infty$, через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех 2π-периодических измеримых на $[0,2\pi)$ функций, для которых $\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(|f(t)|)\,dt<\infty$. Заметим, что в случае $\varphi(t)=t^p,\ p>0$, мы имеем $\varphi(L)=L^p$.

В теории тригонометрических рядов значительный интерес представляет вопрос о сходимости ряда Фурье функции к самой функции в различных функциональных пространствах. Хорошо известны классические результаты, касающиеся сходимости в пространствах L^p. Так, М. Рисс (см., например, [1, гл. VIII, § 20, теорема 2]) показал, что если $p>1$ и $f\in L^p$, то

$$\int\limits_0^{2\pi}|S_n(f,t)-f(t)|^p\,dt\to 0,\quad n\to\infty;$$

А. Н. Колмогоровым [2] было доказано, что данное соотношение имеет место при всех $0<p<1$ для всякой суммируемой функции f. Далее, известно [3, т. 1, гл. VII, теорема 6.9], что если $f\in L\log^+L$, то $\displaystyle\int_0^{2\pi}|S_n(f,t)-f(t)|\,dt\to 0,\ n\to\infty.$

Следующая теорема, вытекающая из [3, т. 2, гл. XII, теорема 4.34] и свойств сопряженной функции, позволяет обобщить перечисленные выше результаты.

Теорема 1. *Пусть функция* $\chi\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *удовлетворяет условиям: для некоторого* $s>0$ *функция* $\chi(u)/u^s$ *не убывает;* $\chi(0)=0$; $\chi(u)\to\infty$ *при* $u\to\infty$; $\chi(2u)=O(\chi(u))$, $u\to\infty$; $\varphi(u)=u\displaystyle\int_1^u\chi(t)t^{-2}\,dt$ *при* $u\ge1$; $\varphi(u)=0$ *при* $0\le u\le 1$. *Тогда для любой функции* $f\in\varphi(L)$ *справедливо* $\displaystyle\int_0^{2\pi}\chi(|S_n(f,t)-f(t)|)\,dt\to 0$, $n\to\infty$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

В самом деле, при $\chi(u)=u^p,\ p\in(0,1)\bigcup(1,\infty)$ мы получаем вышеупомянутые результаты Рисса и Колмогорова, так как в этом случае $\varphi(u)\sim\chi(u)=u^p$, $u\to\infty$; при $\chi(u)=u$ имеем $\varphi(u)\sim u\log u$, $u\to\infty$, что также согласуется с изложенным выше.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что из неубывания функции $\chi(u)/u^s$ следует неубывание функции $\chi(u)$. Далее, так как $\chi(2u)=O(\chi(u))$, то и $\varphi(2u)\le C\varphi(u)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\chi(2u)\le C\chi(u)$ и $\varphi(2u)\le C\varphi(u)$. Ввиду неубывания функции $\chi(t)/t^s$ при любых $\alpha_n\ge 1$ имеем

$$(\alpha_n)^s\int\limits_0^{2\pi}\chi(|S_n(f,t)-f(t)|)\,dt\le\int\limits_0^{2\pi}\chi(|S_n(\alpha_nf,t)-\alpha_nf(t)|)\,dt.$$

Известно (см., например, [4, следствие 3.2]), что для любой функции $f\in\varphi(L)$ найдется последовательность тригонометрических полиномов $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ степени не выше n таких, что $\int_0^{2\pi}\varphi(|f(t)-T_n(t)|)\,dt\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть $n\in\mathbb{N}$, тогда

$$\chi(|S_n(\alpha_nf,t)-\alpha_nf(t)|)=\chi(|S_n(\alpha_nf-\alpha_nT_n,t)-(\alpha_nf(t)-\alpha_nT_n(t))|)$$
$$\le\chi(|S_n(2\alpha_nf-2\alpha_nT_n,t)|)+\chi(|2\alpha_nf(t)-2\alpha_nT_n(t)|).$$

Используя теорему [3, гл. XII, теорема 4.34], стандартными методами легко показать, что при всех $g\in\varphi(L)$ справедливо $\int_0^{2\pi}\chi(|S_n(g,t)|)dt\le K\int_0^{2\pi}\varphi(|g(t)|)dt+K$. Кроме того, при $u\ge 2$ имеем

$$\varphi(u)\ge u\int\limits_{u/2}^{u}\frac{\chi(t)}{t^2}\,dt\ge u\chi(u/2)\int\limits_{u/2}^{u}\frac{dt}{t^2}\ \ge\chi(u/2)\ge C^{-1}\chi(u).$$

Значит,

$$(\alpha_n)^s\int\limits_0^{2\pi}\chi(|S_n(f,t)-f(t)|)\,dt\le(K+C)\int\limits_0^{2\pi}\varphi(2\alpha_n|f(t)-T_n(t)|)\,dt+K+2\pi\chi(2).$$

Далее, $\varphi(kx)\le\varphi(2^{[\log_2k]+1}x)\le C^{[\log_2k]+1}\varphi(x)\le Ck^a\varphi(x)$, где $a=\log_2C$. Поэтому

$$(\alpha_n)^s\int\limits_0^{2\pi}\chi(|S_n(f,t)-f(t)|)\,dt\le 2^aC(K+C)(\alpha_n)^a\int\limits_0^{2\pi}\varphi(|f(t)-T_n(t)|)\,dt+O(1).$$

Положим $\alpha_n=\left(\int_0^{2\pi}\varphi(|f(t)-T_n(t)|)\,dt\right)^{-1/a}$. Тогда $\alpha_n\to\infty$, $n\to\infty$, и мы получаем

$$(\alpha_n)^s\int\limits_0^{2\pi}\chi(|S_n(f,t)-f(t)|)\,dt\le O(1).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. □

В случае, когда функция $\chi(t)$ на бесконечности растет медленнее, чем t^p при всех $p>1$, удалось показать неулучшаемость теоремы 1 в следующем смысле.

Теорема 2. *Пусть функция* $\tilde\varphi\colon\ [0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *не убывает,* $\tilde\varphi(u)\to\infty$ *при* $u\to\infty$, $g(u):=\int_1^u\tilde\varphi(t)t^{-2}\,dt$, $\varphi_1(u):=ug(u)$. *Пусть при этом* $g(u)\to\infty$, *если* $u\to\infty$, *и* $g(u^2)=$

$O(g(u))$. *Тогда для любой функции* $\varphi : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$, *связанной с* $\tilde\varphi$ *соотношением* $\tilde\varphi(u) = o(\varphi(u))$, $u \to \infty$, *найдется функция* $F \in \varphi_1(L)$ *такая, что*

$$\sup_n \int_0^{2\pi} \varphi(|S_n(F,t)|)\,dt = \infty.$$

Доказательство. Заметим, что для любой функции $\psi_1\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $\psi_1(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, существует неубывающая функция $\psi_2\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $\psi_2(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, такая, что $\psi_2(u) \leqslant \psi_1(u)$ при всех $u \geqslant 0$. Поэтому достаточно доказать теорему в случае, когда функция $\psi(u) := \varphi(u)/\tilde\varphi(u)$ не убывает.

Таким образом, в дальнейшем мы считаем, что функция ψ (а следовательно, и функция φ) не убывает. Аналогично, можно считать, что $\psi(u) = o(\sqrt{u})$, $u \to \infty$.

Мы будем пользоваться тем, что при всех $a, b, c \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\varphi(|a+b+c|) \geqslant \varphi\Big(\frac{|a|}{2}\Big) - \varphi(2|b|) - \varphi(2|c|) \tag{1}$$

и

$$\varphi(|a|) \geqslant \varphi\Big(\frac{|b|}{2}\Big) - \varphi(|a-b|), \tag{2}$$

которые легко следуют из неубывания функции φ и неравенства треугольника для модуля. Действительно, проверим первое неравенство. Имеем

$$\varphi(|u+v|) \leqslant \varphi(2\max\{|u|,|v|\}) = \max\{\varphi(|2u|), \varphi(|2v|)\} \leqslant \varphi(|2u|) + \varphi(|2v|),$$

поэтому

$$\varphi\Big(\frac{|a|}{2}\Big) \leqslant \varphi\Big(\frac{|a+b+c|}{2} + \frac{|b+c|}{2}\Big) \leqslant \varphi(|a+b+c|) + \varphi(|b+c|) \leqslant \varphi(|a+b+c|) + \varphi(|2b|) + \varphi(|2c|).$$

Аналогично проверяется второе неравенство.

Выберем на $[0, 2\pi)$ последовательность попарно не пересекающихся отрезков $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$, $|\Delta_n| = 1/n^2$. Определим 2π-периодические функции $f_n(x)$ следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2, & x \in \Delta_n; \\ 0, & x \in [0, 2\pi) \setminus \Delta_n. \end{cases}$$

Согласно условиям теоремы существует константа $C > 0$ такая, что при всех $u > 0$ справедливо неравенство $g(u^2) \leqslant Cg(u)$. Заметим, что отсюда при любом $\varepsilon > 0$ вытекает соотношение

$$g(u) = o(u^\varepsilon), \quad u \to \infty. \tag{3}$$

В самом деле, при $u \geqslant 1$ имеем

$$g(u) \leqslant g\big(2^{[\log_2 u]+1}\big) \leqslant C^{[\log_2 u]} g(2) \leqslant 2^{\log_2 C \log_2 u} g(2) = u^{\log_2 C} g(2),$$

и при достаточно большом n получим $g(u) \leqslant C^n g(u^{\frac{1}{2^n}}) \leqslant g(2) C^n u^{\frac{\log_2 C}{2^n}} = O(u^\varepsilon)$.

В свою очередь отсюда следует, что при всех $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение $\tilde\varphi(u) = o(u^{1+\varepsilon})$, $u \to \infty$. Действительно,

$$\frac{g(u)}{u^\varepsilon} = \frac{\displaystyle\int_1^u \tilde\varphi(t) t^{-2}\,dt}{u^\varepsilon} \geqslant \frac{\displaystyle\int_{\sqrt{u}}^u \tilde\varphi(t) t^{-2}\,dt}{u^\varepsilon} \geqslant \frac{\tilde\varphi(\sqrt{u})(1 - u^{-1/2})}{u^{1/2+\varepsilon}},$$

и так как левая часть неравенства стремится к нулю при $u \to \infty$, то $\tilde{\varphi}(u^{1/2}) = o(u^{1/2+\varepsilon})$, $u \to \infty$, при всех $\varepsilon > 0$, что эквивалентно приведенному выше соотношению. Таким образом, мы можем считать, что $\varphi(u) = \tilde{\varphi}(u)\psi(u) = o(u^2)$, $u \to \infty$, и существует $u_0 > 0$ такое, что $\varphi(u) \leqslant u^2$ при всех $u \geqslant u_0$.

Выберем бесконечно большие последовательности α_k и β_k так, чтобы $g(\beta_k) = o(g(k))$, $\alpha_k = o(\psi(\beta_k))$ и $\alpha_k \leqslant \sqrt{k}$.

Теперь выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ следующим образом: n_1 такое, что $\alpha_{n_1} \geqslant 2$ и $g(n_1) \geqslant 1/2$, а далее, если $n_1, \ldots, n_{k-1}$ уже выбраны, то n_k выбираем настолько большим, чтобы были выполнены неравенства

$$\alpha_{n_k} \geqslant 2^k, \tag{4}$$

$$\alpha_{n_k} g(n_k) \geqslant 2\alpha_{n_{k-1}} g(n_{k-1}), \tag{5}$$

$$\alpha_{n_k} g(n_k) \geqslant n_{k-1}, \tag{6}$$

$$C_3 \frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}} \geqslant 2\Big(\sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|f_{n_j}\|_2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big)^2, \tag{7}$$

где $C_3 > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от функции g.

Определим функцию F. Положим $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{f_{n_k}(x)}{\alpha_{n_k} g(n_k)}$. Прежде всего проверим, что $F \in \varphi_1(L)$. Это следует из (4):

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi_1(F(x))\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_{n_k}} \varphi_1\Big(\frac{n_k^2}{\alpha_{n_k} g(n_k)}\Big)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} \varphi_1\Big(\frac{n_k^2}{\alpha_{n_k} g(n_k)}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} \frac{n_k^2}{\alpha_{n_k} g(n_k)} g(n_k^2) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{\alpha_{n_k}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{2^k} < \infty.$$

Теперь покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(|S_{n_k}(F,t)|)\,dt = \infty$.

Так как

$$S_{n_k}(F,x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha_{n_j} g(n_j)} S_{n_k}(f_{n_j}, x) + \frac{1}{\alpha_{n_k} g(n_k)} S_{n_k}(f_{n_k}, x) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n_j} g(n_j)} S_{n_k}(f_{n_j}, x)\,,$$

то в силу неравенства (1) имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|S_{n_k}(F,t)|)\,dt \geqslant I_1 - I_2 - I_3, \tag{8}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \varphi\Big(\frac{1}{2\alpha_{n_k} g(n_k)}\,|S_{n_k}(f_{n_k}, t)|\Big)\,dt, \quad I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \varphi\Big(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\,|S_{n_k}(f_{n_j}, t)|\Big)\,dt,$$

$$I_3 = \int\limits_0^{2\pi} \varphi\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\,|S_{n_k}(f_{n_j}, t)|\Big)\,dt.$$

Оценим I_2. Ввиду неравенства $I_2 \leqslant 2\pi\varphi(u_0) + 4\int_0^{2\pi} \Big|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{S_{n_k}(f_{n_j},x)}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big|^2 dx$ и неравенства $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$ для неотрицательных a,b имеем

$$\sqrt{I_2} \leqslant \sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\Big\|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{S_{n_k}(f_{n_j})}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big\|_2$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|S_{n_k}(f_{n_j})\|_2}{\alpha_{n_j} g(n_j)} \leqslant \sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|f_{n_j}\|_2}{\alpha_{n_j} g(n_j)},$$

откуда в силу (7)

$$I_2 \leqslant \Big(\sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|f_{n_j}\|_2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big)^2 \leqslant \frac{C_3}{2}\frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}}. \tag{9}$$

Оценим I_3. Так как $|D_{n_k}(t)| \leqslant n_k + 1/2$, то $|S_{n_k}(f_{n_j},x)| \leqslant 2n_k+1$. Учитывая (5) и (6), получаем

$$I_3 \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \varphi\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}(2n_k+1)\Big)\,dx \leqslant 2\pi\varphi\Big(6\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{n_k}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big)$$

$$\leqslant 2\pi\varphi\Big(6\sum_{l=0}^{\infty} \frac{n_k}{2^l \alpha_{n_{k+1}} g(n_{k+1})}\Big) \leqslant 2\pi\varphi(12). \tag{10}$$

Наконец, оценим I_1. Пусть d_n — середина отрезка Δ_n. Заметим, что при $x \in [0,2\pi)$ справедливо

$$\Big|S_n(f_n,x) - \frac{1}{\pi}D_n(x-d_n)\Big| = \frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_0^{2\pi} D_n(x-t)f_n(t)\,dt - D_n(x-d_n)\Big|$$

$$= \frac{n^2}{\pi}\Big|\int\limits_{\Delta_n} (D_n(x-t) - D_n(x-d_n))\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{\pi}\max_{t\in\Delta_n}|D_n(x-t) - D_n(x-d_n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\max_{t\in\Delta_n}|D_n'(t)||t-d_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}.$$

Отсюда в силу неравенства (2) находим

$$I_1 \geqslant \int\limits_0^{2\pi} \varphi\Big(\frac{1}{4\pi\alpha_{n_k} g(n_k)}\,|D_{n_k}(x)|\Big)\,dx + O(1).$$

Далее, известно, что равномерно по $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$ справедливо соотношение

$$D_n(x) = \frac{\sin nx}{x} + O(1).$$

Еще раз пользуясь неравенством (2), получим

$$I_1 \geqslant \int\limits_0^{\pi} \varphi\Big(\frac{1}{8\pi\alpha_{n_k} g(n_k)}\,\Big|\frac{\sin n_k x}{x}\Big|\Big)\,dx + O(1).$$

Обозначим $A_k = \{t \in [0,\pi]\colon |\sin n_k t| \geqslant 1/2\}$. Тогда

$$I_1 \geqslant \int\limits_{A_k} \varphi\Big(\frac{1}{8\pi\alpha_{n_k} g(n_k)}\,\Big|\frac{\sin n_k x}{x}\Big|\Big)\,dx + O(1)$$

$$\geqslant \sum_{l=0}^{n_k-1} \int\limits_{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{\pi}{6n_k}}^{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{5\pi}{6n_k}} \varphi\Big(\frac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)}\,\frac{1}{x}\Big)\,dx + O(1) \geqslant \frac{2}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6n_k}}^{\pi} \varphi\Big(\frac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)}\,\frac{1}{x}\Big)\,dx + O(1),$$

так как в силу неубывания функции φ справедливо

$$\int\limits_{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{\pi}{6n_k}}^{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{5\pi}{6n_k}} \varphi\Big(\frac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)}\,\frac{1}{x}\Big)\,dx \geqslant 2\int\limits_{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{5\pi}{6n_k}}^{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{7\pi}{6n_k}} \varphi\Big(\frac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)}\,\frac{1}{x}\Big)\,dx.$$

Делая замену $x = \dfrac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)u}$, получим

$$I_1 \geqslant \frac{C_1}{\alpha_{n_k}g(n_k)} \int\limits_{1}^{C_2\frac{n_k}{\alpha_{n_k}g(n_k)}} \tilde{\varphi}(u)\psi(u)u^{-2}\,du + O(1).$$

В силу условий $\alpha_{n_k} \leqslant \sqrt{n_k}$ и $g(n_k) = o(n_k^{1/4})$ (соотношение (3) при $\varepsilon = 1/4$), а также определения функции $g(u)$ при достаточно больших k имеем

$$I_1 \geqslant \frac{C_1}{\alpha_{n_k}g(n_k)} \int\limits_{\beta_{n_k}}^{C_2 n_k^{1/4}} \tilde{\varphi}(u)\psi(u)u^{-2}\,du + O(1) \geqslant \frac{C_1\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}g(n_k)}\big(g(C_2 n_k^{1/4}) - g(\beta_{n_k})\big) + O(1)$$

$$\geqslant \frac{C_1}{2}\frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}}\frac{g(C_2 n_k^{1/4})}{g(n_k)} + O(1) \geqslant C_3\frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}} + O(1). \tag{11}$$

Наконец, собирая вместе полученные оценки (8)–(11) при достаточно больших k, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|S_{n_k}(F,t)|)\,dt \geqslant \frac{C_3}{2}\,\frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}} + O(1).$$

Так как $\alpha_n = o(\psi(\beta_n)),\ n \to \infty$, то отсюда вытекает утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961. 937 с.
2. **Kolmogoroff A.** Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fund. Math. 1925. Vol. 7. P. 24–29.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. М.: Мир. 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
4. **Ульянов П.Л.** Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 2. С. 3–52.

Габдуллин Михаил Рашидович
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Gabdullin.Mikhail@ya.ru

Поступила 22.05.2015