ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 514.17; 532.5

ОДИН КЛАСС РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ТОРЕ С СОЛЕНОИДАЛЬНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ. II[1]

$\boxed{\text{В. П. Верещагин}}$, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Исследуется задача о решениях $(\mathbf{V}, p)$ в торе D уравнения Эйлера с соленоидальным векторным полем $\mathbf{V}$, аналогичная рассмотренной в предыдущей работе авторов 2014 г., только теперь в классе векторных полей $\mathbf{V}$, линии которых совпадают с параллелями вложенных в D торов с той же, что и у D, осевой окружностью. Найдены условия, при которых эта задача разрешима, и определены соответствующие решения.

Ключевые слова: скалярное и векторное поля, уравнение Эйлера, дивергенция, ротор.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. A solution class of the Euler equation in a torus with solenoidal velocity field. II.

We study a problem on solutions $(\mathbf{V}, p)$ of the Euler equation with solenoidal velocity field $\mathbf{V}$ in a torus D, which is similar to the problem considered in the authors' previous paper 2014. Now, the problem is considered in the class of vector fields $\mathbf{V}$ whose lines coincide with lines of latitude of tori embedded in D with the same circular axis. Conditions are found under which this problem is solvable, and solutions are found too.

Keywords: scalar and vector fields, Euler equation, divergence, curl.

В данной работе продолжены исследования уравнений движения сплошной среды, допускающие в различных областях некоторые специальные решения, определяемые задаваемыми геометрическими ограничениями на поле скоростей, начатые в работах [1–5].

Рассмотрим математическую проблему существования и построения гладкого решения в торе D системы дифференциальных уравнений

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} + (\mathbf{V}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p = \mathbf{f},\ (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{V}) = 0\Big\} \tag{1}$$

при указанных в аннотации геометрических ограничениях на поле $\mathbf{V}$. Здесь и далее D — тор, ограниченный тороидальной поверхностью с осевой окружностью $\mathcal{L}_c$ радиуса r_c и с внутренним радиусом r_0 (радиусом сечений тора плоскостями, перпендикулярными к $\mathcal{L}_c$).

Система (1) состоит из уравнения Эйлера относительно векторного поля $\mathbf{V}$ и скалярного поля p и уравнения соленоидальности векторного поля $\mathbf{V}$. Определяя решение $(\mathbf{V}, p)$ системы (1), будем считать, что пара $(\mathbf{V}, p)$, как и любая пара (σ, Φ), гладкая в $D^4 = D \times \mathbb{R}_+$, если первая компонента пары непрерывно дифференцируема в D^4, а вторая непрерывна в D^4 и имеет там непрерывные пространственные производные. В механике при наличии реального векторного поля сил $\mathbf{f}$, начальных и краевых условий уравнение Эйлера описывает движение идеальной невязкой сплошной среды постоянной плотности ρ в эйлеровой системе отсчета. *Для образности*, как и в некоторых работах [1–5], мы сохраняем принятую в механике терминологию: движение сплошной среды, $\mathbf{V}$ — поле скоростей, $\mathbf{f}$ — поле сил, p — поле давлений, $(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{V})$ — дивергенция поля $\mathbf{V}$, ρ — плотность среды и т. д. Напомним, что в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ гамильтониан $\boldsymbol{\nabla}$ определяется формулой $\boldsymbol{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i\, \partial/\partial x_i$. Удобно точку O поместить в центр симметрии тора, а ось Ox_3 совместить с его осью симметрии. Движения, у которых линии векторного поля скоростей совпадают с окружностями $\mathcal{L}_{R,x_3} = \{\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)\colon x_3 = \text{const},\ R =: \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - r_c = \text{const}\}$, $R^2 + x_3^2 < r_c^2$,

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

лежащими внутри D, проще всего описывать в криволинейных координатах, в качестве координатных линий которых выбираются прямые, параллельные оси Ox_3, лучи с началом на оси Ox_3, параллельные плоскости Ox_1x_2, и параллели $\mathcal{L}_{R,x_3}$ внутри тора D. Каждой точке $X = \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) = \sum_1^3 x_i\mathbf{e}_i$ тора D ставим (однозначно) в соответствие тройку чисел R, φ, x_3, определяющих проходящие через $\mathbf{X}$ координатные линии (достаточно двух линий, например, параллели $\mathcal{L}_{R,x_3}$ и луча $\mathcal{L}_{x_3,\varphi} = \{\mathbf{X} = \mathbf{e}_3x_3 + (\mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi)(r_c + R)\colon x_3 = \text{const},\ \varphi = \text{const},\ r_c + R > 0\}$, а также правую тройку ортов $\mathbf{e}_R(\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, $\mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис описанной криволинейной системы координат, где

$$\begin{cases} \mathbf{e}_R(\varphi) = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi; \\ \mathbf{e}_\varphi(\varphi) = \mathbf{e}_1(-\sin\varphi) + \mathbf{e}_2\cos\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_R\cos\varphi + \mathbf{e}_\varphi(-\sin\varphi); \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_R\sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi\cos\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

При этом точку $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)$ будем обозначать также через $\mathbf{X}(R, \varphi, x_3)$:

$$\mathbf{X}(R, \varphi, x_3) = r_c\mathbf{e}_R(\varphi) + R\mathbf{e}_R(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3, \tag{3}$$

(параметр r_c тора D один и тот же для всех $\mathbf{X} \in D$). Из формулы (3) видно, что тройка чисел $(r_c + R, \varphi, x_3)$ совпадает с координатами точки $\mathbf{X}$ в цилиндрической системе координат с полярной осью Ox_1 в плоскости Ox_1x_2. Однако введенная криволинейная система координат отлична от цилиндрической: здесь в каждой полуплоскости Π_φ $(0 \le \varphi < 2\pi)$, проходящей через ось Ox_3 и луч $\mathcal{L}_{0,\varphi}$, вводится своя декартова система координат с базисом $\mathbf{e}_R(\varphi)$, $\mathbf{e}_3$ и с началом в точке $X_c(\varphi) = r_c\mathbf{e}_R(\varphi) = r_c(\mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi)$. Векторные поля в $\mathbb{R}^3 \backslash Ox_3$, порожденные базисными векторами $\mathbf{e}_R(\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, $\mathbf{e}_3$ по формулам $\mathbf{e}_R(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_R(\varphi(\mathbf{X}))$, $\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_\varphi(\varphi(\mathbf{X}))$, $\mathbf{e}_3(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{e}_3$, в цилиндрической и во введенной системах координат, конечно, совпадают, но координата R точки $\mathbf{X}(R, \varphi, x_3)$ определяется расстоянием $\mathbf{X}$ до прямой $\mathcal{L}_\varphi = \{\mathbf{X}_c(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3\colon x_3 \in \mathbb{R}\}$, а не до оси Ox_3, причем $R < 0$ при $x_1^2 + x_2^2 < r_c^2$. Отсюда и из (2) следует, что в D для $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}(R, \varphi, x_3)$ имеем

$$x_1 = (r_c + R)\cos\varphi, \quad x_2 = (r_c + R)\sin\varphi, \quad -r_0 < R < r_0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \tag{4}$$

причем $\mathbf{X}$ лежит внутри D, только если $R^2 + x_3^2 < r_0^2$. Дифференцируя эти соотношения по x_1, x_2, получаем

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial R}{\partial x_1}\cos\varphi + (r_c + R)(-\sin\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \\ 0 = \dfrac{\partial R}{\partial x_1}\sin\varphi + (r_c + R)\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial R}{\partial x_2}\cos\varphi + (r_c + R)(-\sin\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \\ 1 = \dfrac{\partial R}{\partial x_2}\sin\varphi + (r_c + R)\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \end{cases}$$

откуда находим, что

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\frac{\sin\varphi}{r_c + R}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{\cos\varphi}{r_c + R} \quad (r_c + R > r_c - r_0 > 0). \tag{5}$$

Векторные поля вида $\mathbf{a}(\mathbf{X}(R, \varphi, x_3))$ и $\mathbf{b}(\mathbf{X}(R, \varphi, x_3), t)$ будем обозначать также через $\mathbf{a}(R, \varphi, x_3)$ и $\mathbf{b}(R, \varphi, x_3, t)$, аналогичное соглашение распространим и на скалярные поля. Из формул (2) легко выводится, что

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R(\varphi)}{\partial\varphi} = \mathbf{e}_\varphi(\varphi), \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{\partial\varphi} = -\mathbf{e}_R(\varphi), \quad \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial x_3} = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial R} = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial x_3} = 0, \tag{6}$$

а от тождественно постоянных в $\mathbb{R}^3$ векторных полей $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ все производные равны нулю. Отсюда и из формул (3)–(5) следует, что в отличие от базиса $\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ работы [1] свойства непрерывности и гладкости (непрерывной дифференцируемости) в области $D^4 = D \times \mathbb{R}_+$ векторных и скалярных полей $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3, t) =: \mathbf{a}(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3), t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(R, \varphi, x_3), t) =:$

$\mathbf{a}(R,\varphi,x_3,t)$ и $\sigma(x_1,x_2,x_3,t) =: \sigma(\mathbf{X}(x_1,x_2,x_3),t) = \sigma(\mathbf{X}(R,\varphi,x_3),t) =: \sigma(R,\varphi,x_3,t)$ в декартовых и введенных криволинейных координатах эквивалентны.

Из (3) вытекает, что в этих переменных упрощаются формулы для D и $\mathcal{L}_{R,x_3}$:

$$D = D_{r_c,r_0} = \{\mathbf{X}(R,\varphi,x_3)\colon R^2 + x_3^2 < r_0^2,\ \varphi \in [0,2\pi)\},$$

$$\mathcal{L}_{R,x_3} = \{X(R,\varphi,x_3)\colon R,\ x_3 \text{ фиксированы},\ \varphi \in [0,2\pi)\} \quad (R^2 + x_3^2 < r_0^2). \tag{7}$$

В частности, видно, что с каждой парой чисел $(|R|,|x_3|)$ связаны две пары равных параллелей, а именно, лежащие в двух параллельных плоскостях пары $\{\mathcal{L}_{|R|,|x_3|}; \mathcal{L}_{|R|,-|x_3|}$ и $\{\mathcal{L}_{-|R|,|x_3|}, \mathcal{L}_{-|R|,-|x_3|}\}$.

Также из (7) следует, что множество параллелей $\mathcal{L}_{R,x_3}$ $(R^2 + x_3 < r_0^2)$ является множеством линий векторного поля $\mathbf{e}_\varphi(\varphi(\mathbf{X}))$ в D, и поэтому сформулированное в начале работы геометрическое ограничение на векторные поля $V(\mathbf{X},t)$ на аналитическом языке означает, что

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}(R,\varphi,x_3),t) = \sigma(R,\varphi,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi), \tag{8}$$

где $\sigma(\mathbf{X},t)$ — гладкое в D^4 скалярное поле.

Из формул (2) и (5) вытекает, что дифференциальный оператор $\boldsymbol{\nabla}$ Гамильтона в новых координатах имеет вид

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r_c+R}\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{9}$$

Подставим $\mathbf{V}$ (8) во второе уравнение системы (1). Используя (9) и (6), получаем

$$0 = \operatorname{div}\mathbf{V} = (\boldsymbol{\nabla},\sigma\mathbf{e}_\varphi) = (\boldsymbol{\nabla}\sigma,\mathbf{e}_\varphi) + \sigma\Big[\Big(\mathbf{e}_R,\frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_\varphi\Big) + \frac{1}{r_c+R}\Big(\mathbf{e}_\varphi,\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\Big) + \Big(\mathbf{e}_3,\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_\varphi\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{r_c+R}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_\varphi), \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial\sigma(R,\varphi,x_3,t)}{\partial\varphi} = 0. \tag{10}$$

Таким образом, справедлива следующая

Лемма. *Векторное поле* (8) *соленоидально в торе* D, *если только скалярная величина* σ *скорости* $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$ *в каждый момент времени во всех точках каждой параллели* $\mathcal{L}_{R,x_3} \subset D$ *одинакова*:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \sigma(R,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi). \tag{11}$$

Чтобы перейти к первому уравнению системы (1), вычислим вначале производную $(\mathbf{V},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}$ вектор-функции (11) по пространственным переменным в направлении $\mathbf{V}$. Применяя формулы (9) и (6), получаем

$$(\mathbf{V},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} = \sigma\Big(\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r_c+R}\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\Big)\sigma(R,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

$$= \sigma\Big(\mathbf{e}_\varphi(\varphi),\mathbf{e}_R(\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial R} + \frac{\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{r_c+R}\frac{\partial\sigma(R,x_3,t)}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}\Big)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

$$+ \sigma^2\Big((\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_R)\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{\partial R} + \frac{1}{r_c+R}(\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_\varphi)\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{\partial\varphi} + (\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_3)\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial x_3}\Big)$$

$$= \frac{\sigma^2(R,x_3,t)}{r_c+R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi(\varphi) = -\frac{\sigma^2(R,x_3,t)}{r_c+R}\mathbf{e}_R(\varphi). \tag{12}$$

Для сравнения вихревых свойств решений рассматриваемой задачи с результатом работы [1] о вихревых свойствах векторного поля с меридианальными линиями в торе вычислим ротор векторного поля (11) на основании тех же формул (9) и (6). Имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = [\boldsymbol{\nabla},\sigma\mathbf{e}_\varphi] = [\boldsymbol{\nabla}\sigma,\mathbf{e}_\varphi] + \sigma[\boldsymbol{\nabla},\mathbf{e}_\varphi] = \frac{\partial\sigma}{\partial R}[\mathbf{e}_R,\mathbf{e}_\varphi] + \frac{1}{r_c+R}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}[\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_\varphi]$$

$$+\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_\varphi]+\sigma\Big(\Big[\mathbf{e}_R,\frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_\varphi\Big]+\frac{1}{r_c+R}\Big[\mathbf{e}_\varphi,\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\Big]+\Big[\mathbf{e}_3,\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_\varphi\Big]\Big)$$
$$=\frac{\partial\sigma}{\partial R}\mathbf{e}_3-\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}\mathbf{e}_R+\frac{\sigma}{r_c+R}\mathbf{e}_3,$$

т. е.

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=\mathbf{e}_R\Big(-\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}\Big)+\mathbf{e}_3(r_c+R)^{-1}\frac{\partial}{\partial R}((r_c+R)\sigma).$$

Отсюда видно, что $\operatorname{rot}\mathbf{V}\perp\mathbf{V}$, т. е., как и в [1], векторное поле $\mathbf{V}$ поперечно вихревое (там было $\mathbf{V}=\sigma(r,\vartheta,\varphi,t)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta,\varphi)$).

Вернемся к уравнению Эйлера. Для векторного поля (11) с помощью (12) оно записывается в виде

$$\frac{\partial\sigma(R,x_3,t)}{\partial t}\mathbf{e}_\varphi(\varphi)-\frac{\sigma^2(R,x_3,t)}{r_c+R}\mathbf{e}_R(\varphi)-\mathbf{f}(R,\varphi,x_3,t)=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p(R,\varphi,x_3,t). \tag{13}$$

Пусть пара (σ,p) при некотором $\mathbf{f}$ превращает (13) в тождество по $(R,\varphi,x_3)\in D$ и $t\in\mathbb{R}_+$. Тогда здесь правая часть (а значит, и левая) как градиент гладкого скалярного поля является потенциальным векторным полем. Класс непрерывных потенциальных при каждом $t\in\mathbb{R}$ в D векторных полей совпадает с множеством векторных полей $\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{X},t)$, где $\Phi(\mathbf{X},t)$ — гладкие по $\mathbf{X}$ в D непрерывные по $t\in R$ скалярные поля. Поэтому решение (σ,p) уравнения (13) является решением следующей системы уравнений относительно p и σ:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p(R,\varphi,x_3,t)=\boldsymbol{\nabla}\Phi(R,\varphi,x_3,t),\\ \mathbf{b}(R,\varphi,x_3,t;\sigma)=-\boldsymbol{\nabla}\Phi(R,\varphi,x_3,t),\end{cases} \tag{14}$$

где

$$\mathbf{b}=\mathbf{e}_\varphi(\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\mathbf{e}_R(\varphi)\frac{\sigma^2}{r_c+R}-\mathbf{f},$$

а Φ — некоторое гладкое по $\mathbf{X}$ непрерывное по t в D^4 скалярное поле.

Легко показать, что множество решений (σ,p) всех разрешимых уравнений (13) совпадает с классом решений систем (14) при всех Φ, для которых они разрешимы.

Действительно, пусть пара $(\sigma(R,x_3,t,\Phi),p(R,\varphi,x_3,t,\Phi))$ — решение системы (14), совместной при соответствующей функции $\Phi(R,\varphi,x_3,t)$. Тогда подстановка этого решения в (14) превращает эту систему уравнений в справедливые равенства

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p(R,\varphi,x_3,t;\Phi)=\boldsymbol{\nabla}\Phi(R,\varphi,x_3,t),\\ \mathbf{b}(R,\varphi,x_3,t;\sigma(...,\Phi))=-\boldsymbol{\nabla}\Phi(R,\varphi,x_3,t),\end{cases}$$

где

$$p(R,\varphi,x_3,t;\Phi)=\rho\Phi(R,\varphi,x_3,t)+\mathcal{P}(t), \tag{15}$$

а $\mathcal{P}(t)$ — любая непрерывная в R функция. А тогда замена функции $\boldsymbol{\nabla}\Phi$ во втором равенстве на тождественную ей (в силу первого равенства) функцию $(1/\rho)\boldsymbol{\nabla}p(R,\varphi,x_3,t;\Phi)$ превращает его (в силу определения поля $\mathbf{b}$) в равенство, которое получилось бы, если бы подстановка пары $(\sigma(R,\varphi,x_3,t;\Phi))$, $p(R,\varphi,x_3,t;\Phi)$ в уравнение (13) при том же $\mathbf{f}$ превращала его в тождество в D^4.

Учитывая отмеченный выше факт, что всякое решение (σ,p) уравнения (13) удовлетворяет при некоторой функции Φ системе уравнений (14), получаем, что класс совместных уравнений (13) эквивалентен классу совместных относительно σ и p систем (14).

Второе уравнение в (14) означает, что циркуляция векторного поля $\mathbf{b}$ по любому замкнутому контуру в торе D должна равняться нулю. Это для гладких $\mathbf{b}$ эквивалентно тому, что при любом $t\geq 0$ $\operatorname{rot}\mathbf{b}=0$ в D и для любой линии $\mathcal{L}_{R,x_3}$ циркуляция

$$C(\mathbf{b};\mathcal{L}_{R,x_3})=:\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{L}_{R,x_3}}(\mathbf{b}(R,\varphi,x_3,t),d\mathbf{X}(R,\varphi,x_3,t))=0\quad(R^2+x_3^2<r_0^2).$$

Действительно, равенство ротора векторного поля в D нулю эквивалентно равенству нулю циркуляции поля по любому стягиваемому в D в точку спрямляемому замкнутому контуру. И ясно, что соединение любого не стягиваемого в точку спрямляемого контура $\mathcal{L}$ с контуром $\mathcal{L}_{R,x_3}$ внутри D проходимой в двух противоположных направлениях спрямляемой дугой (разрезом), не меняя циркуляцию поля по $\mathcal{L}$, превращает $\mathcal{L}$ в контур, стягиваемый в точку.

На $\mathcal{L}_{R,x_3}$ параметры R и x_3 фиксированы, поэтому там (см. (3), (7) и (6)) $d\mathbf{X} = (d/d\varphi)\times (r_c\mathbf{e}_R(\varphi) + R\mathbf{e}_R(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3)d\varphi = (r_c + R)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)d\varphi$. Следовательно, $C(\mathbf{b};\mathcal{L}_{R,x_3}) = \partial\sigma/\partial t - 1/2\pi \times \int_0^{2\pi}(\mathbf{f},\mathbf{e}_\varphi)\,d\varphi = 0$, т. е.

$$\frac{\partial\sigma(R,x_3,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_\varphi(R,\varphi,x_3,t)\,d\varphi =: f_\varphi^0(R,x_3,t), \tag{16}$$

где f_φ — проекция $\mathbf{f}(R,\varphi,x,t)$ на $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ и выражается через скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$: $f_\varphi(R,\varphi,x_3,t) = (\mathbf{f},\mathbf{e}_\varphi(\varphi))$. Таким образом, производная $\partial\mathbf{V}/\partial t$ векторного поля скоростей (11) из пары $(\mathbf{V},p)$ — решения системы уравнений (1) — вполне определяется свободным членом f_φ^0 из разложения второй компоненты $f_\varphi := (\mathbf{f},\mathbf{e}_\varphi(\varphi))$ вектор-функции $\mathbf{f} = f_R\mathbf{e}_R + f_\varphi\mathbf{e}_\varphi + f_3\mathbf{e}_3$ в тригонометрический ряд по переменной φ

$$f_\varphi(R,\varphi,x_3,t) = f_\varphi^0(R,x_3,t) + \sum_{k\neq 0} f_\varphi^{[k]}(R,x_3,t)\mathbf{e}^{ik\varphi} \tag{17}$$

и зависит от φ только через $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$; $\partial\mathbf{V}/\partial t = f_\varphi^0(R,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$.

Выпишем второе уравнение из (14) в развернутой форме, используя определенный после (14) явный вид $\mathbf{b}(R,\varphi,x_3,t)$ и разрешив его относительно $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}_\varphi f_\varphi + \mathbf{e}_R f_R + \mathbf{e}_3 f_{x_3} = \mathbf{e}_\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \mathbf{e}_R\frac{\sigma^2}{r_c+R} + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r_c+R}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_R\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}, \tag{18}$$

где $f_\varphi,\ f_R,\ f_{x_3}$ — компоненты $\mathbf{f}$ относительно базиса $\mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_R,\ \mathbf{e}_3$. Эквивалентную скалярную форму этого соотношения между $\mathbf{f},\sigma$ и Φ удобно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi(R,\varphi,x_3,t)}{\partial\varphi} = \Big(f_\varphi(R,\varphi,x_3,t) - \dfrac{\partial\sigma(R,x_3,t)}{\partial t}\Big)(r_c+R), \\ \dfrac{\partial\Phi(R,\varphi,x_3,t)}{\partial R} = f_R(R,\varphi,x_3,t) + \dfrac{\sigma^2(R,x_3,t)}{r_c+R}, \\ \dfrac{\partial\Phi(R,\varphi,x_3,t)}{\partial x_3} = f_3(R,\varphi,x_3,t). \end{cases} \tag{19}$$

Из проведенного анализа следует, что если для той же функции Φ, что в (15), выполняется при некоторой функции $\sigma(R,x_3,t)$ соотношение (18) (или, что то же самое, соотношения (19)), то вместе с (15) это эквивалентно тому, что второе уравнение системы (14) превращается в справедливое равенство с $\boldsymbol{\nabla}\Phi = 1/\rho\,\boldsymbol{\nabla}p$. Таким образом, справедливость равенств (15), (18), (19) равносильна тому, что соответствующая пара функций $\sigma(R,x_3,t)$, $p(R,\varphi,x_3,t)$ удовлетворяет уравнению (13), а пара $\mathbf{V}$ (11) и p (15) удовлетворяет системе (1) и (см. лемму) ограничению (8).

Соотношения (18), (19) связывают между собой функции $\mathbf{f},\sigma$ и Φ, фактически накладывая в неявной форме ограничения на поле сил $\mathbf{f}$ в D^4, при которых система уравнений (1) в классе векторных полей (8) разрешима. Проще всего удовлетворить этим соотношениям, считая их определением класса векторных полей $\mathbf{f}(R,\varphi,x_3,t)$ через явно задаваемые гладкие функции $\Phi(R,\varphi,x_3,t)$ и $\sigma(R,x_3,t)$. Как итог проведенного анализа сформулируем следующее утверждение.

Теорема. *Система уравнений* (1) *разрешима в* $D^4 = D\times\mathbb{R}_+$ *в классе векторных полей* (8) *тогда и только тогда, когда поле* $\mathbf{f}(R,\varphi,x_3,t)$ *имеет в* D^4 *вид* (18) *с гладкой по* R,φ,x_3, 2π*-периодической по* φ *функцией* $\Phi(R,\varphi,x_3,t)$ *и гладкой по* t, *непрерывной по* R,x_3 *и не зависящей от* φ *функцией* σ. *При этом функции* σ *и* Φ *определяют всякое решение* $(\mathbf{V},p)$ *по формулам*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}(R,\varphi,x_3),t) = \sigma(R,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi), \quad p(R,\varphi,x_3,t) = \rho\Phi(R,\varphi,x_3,t) + P(t)$$

с точностью до произвольной непрерывной функции $P(t)$ *параметра* t.

Отметим, что интегрирование первого соотношения (19) по периоду $\varphi\in[0,2\pi)$ снова порождает (16) и, следовательно, равенство

$$\sigma(R,x_3,t) = \int\limits_0^t f_\varphi^0(R,x_3,\tau)\,d\tau + \sigma(R,x_3) \tag{20}$$

с произвольной непрерывной в D добавкой $\sigma(R,x_3)$. Поэтому функцию $\sigma(R,x_3,t)$ можно заменить в теореме на $\sigma(R,x_3)$ с помощью (20), исключив ее саму из условий, определяющих разрешимость системы дифференциальных уравнений (1) в D^4 в классе векторных полей $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$, линии которых совпадают с окружностями $\mathcal{L}_{R,x_3}$.

Вычитая из $f_\varphi(R,\varphi,x_3,t)$ функцию $f_\varphi^0(R,x_3,t)$ и обозначая разность через $f_\varphi^\perp(R,\varphi,x_3,t)$, которая ортогональна по φ в $L^2(0,2\pi)$ всем не зависящим от φ функциям (совпадает с рядом в правой части (17) для гладких по φ функций $f_\varphi(R,\varphi,x_3,t)$), можем переписать первое соотношение в (19) как

$$\frac{\partial\Phi(R,\varphi,x_3,t)}{\partial\varphi} = (r_c+R)f_\varphi^\perp(R,\varphi,x_3,t). \tag{21}$$

Таким образом, зависимость Φ от φ также определяется компонентой f_φ:

$$\frac{1}{r_c+R}\Phi(R,\varphi,x_3,t) = F_\varphi^\perp(R,\varphi,x_3,t) + B(R,x_3,t), \tag{22}$$

где B — произвольная гладкая в D^4 функция, а $F_\varphi^\perp$ — периодическая первообразная по φ функции $f_\varphi^\perp$. В силу (17)

$$F_\varphi^\perp(R,\varphi,x_3,t) = \sum_{k\neq 0}\frac{1}{ik}f_\varphi^{[k]}(R,x_3,t)(e^{ik\varphi}-1),$$

и этот ряд уже сходится всюду в D^4.

Следовательно, компоненты f_φ, f_R, f_{x_3} векторного поля $\mathbf{f}(R,\varphi,x_3,t)$ в теореме можно определять из условий

$$f_\varphi(R,\varphi,x_3,t) = f_\varphi^0(R,x_3,t) + f_\varphi^\perp(R,\varphi,x_3,t), \tag{23}$$

$$\begin{cases} f_R(R,\varphi,x_3,t) = \dfrac{\partial\Phi(R,\varphi,x_3,t)}{\partial R} - \dfrac{1}{r_c+R}\left(\displaystyle\int\limits_0^t f_\varphi^0(R,x_3,\tau)\,d\tau + \sigma(R,x_3)\right)^2, \\ f_3(R,\varphi,x_3,t) = \dfrac{\partial\Phi(R,\varphi,x_3,t)}{\partial x_3}, \end{cases} \tag{24}$$

считая $\sigma(R,x_3)$ произвольной непрерывной в круге $R^2+x_3^2<r_0^2$ функцией, а $(f_0(R,x_3,t), \Phi(R,\varphi,x_3,t))$ — гладкими в D^4 функциями.

Из этих рассуждений, формул (21)–(24) и теоремы вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть компонента* $f_\varphi(R,\varphi,x_3,t) = (\mathbf{f},\mathbf{e}_\varphi(\varphi))$ *векторного поля* $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$ *в* D^4 *представлена в виде* (23), *где* $f_\varphi^0(R,x_3,t) = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi} f_\varphi(R,\varphi,x_3,t)\,d\varphi$ *и* $f_\varphi^\perp(R,\varphi,x_3,t) =$

$f_\varphi(R,\varphi,x_3,t) - f^0_\varphi(R,x_3,t)$ *— непрерывные по* t *и гладкие по пространственным переменным в торе* D *функции. Тогда система уравнений* (1) *разрешима в* D^4 *в классе векторных полей* $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$ *с окружностями* $\mathcal{L}_{R,x_3} \subset D$ *в качестве их линий тогда и только тогда, когда компоненты* $f_R = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_R(\varphi))$ *и* $f_3 = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_3)$ *поля* $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$ *связаны с его компонентой* $f_\varphi(R,\varphi,x_3,t)$ *соотношениями* (24), *где функция* $\Phi(R,\varphi,x_3,t)$ *определяется через компоненту* f_φ *с помощью формул* (21), (22), *а* $B(R,x_3,t)$ *и* $\sigma(R,x_3)$, *не зависящие от* φ *— гладкие в* D^4 *функции с*

$$F^\perp_\varphi(R,\varphi,x_3,t) = \int\limits_0^\varphi f^\perp_\varphi(R,\widetilde{\varphi},x_3,t)\,d\widetilde{\varphi}.$$

При выполнении этих условий компоненты решения $(\mathbf{V},p)$ *системы* (1) *выражаются формулами* (*см.* (15))

$$\mathbf{V}(R,\varphi,x_3,t) = \left(\int\limits_0^t f^0_\varphi(R,x_3,\tau)\,d\tau + \sigma(R,x_3)\right)\mathbf{e}_\varphi(\varphi), \quad p(R,\varphi,x_3,t) = \rho\Phi(R,\varphi,x_3,t) + \mathcal{P}(t).$$

Интересно отметить, что скалярная величина $(\mathbf{V}(\mathbf{X},t), \mathbf{e}_\varphi(\varphi))$ векторного поля $\mathbf{V}$ вполне определяется компонентой f_φ поля $\mathbf{f}$, точнее, ее составляющей f^0_φ, а скалярное поле p — составляющей $f^\perp_\varphi$ компоненты f_φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 60–70.
2. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 120–134.
3. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Постановка и решение краевой задачи в классе плосковинтовых векторных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 123–138.
4. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Некоторые решения уравнений движения для несжимаемой вязкой сплошной среды // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 48–63.
5. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Класс всех гладких единичных аксиально симметричных векторных полей, продольно вихревых в R3 // Изв. Сарат. ун-та. Сер. “Математика. Механика. Информатика”. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 11–23.

Поступила 05.12.2014

Верещагин Владимир Пантелеевич

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru