ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.544

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГРУППАХ ФИНИТАРНЫХ ПОДСТАНОВОК

В. В. Беляев

В работе исследуются подстановочные свойства действий сопряжением группы финитарных подстановок на ее классах сопряженных элементов. С помощью найденных свойств показано, что классы сопряженных элементов в группах финитарных подстановок являются дискретными подмножествами относительно любой хаусдорфовой групповой топологии. Более того, доказано, что последнее свойство характеризует знакопеременные группы в классе счетных локально конечных простых групп.

Ключевые слова: группы финитарных подстановок, безусловно дискретные подмножества, минимальные групповые топологии.

V. V. Belyaev. Classes of conjugate elements in finitary permutation groups.

We study the permutation properties of the conjugacy actions of a finitary permutation group on its classes of conjugate elements. These properties are used to show that classes of conjugate elements in finitary permutation groups are discrete subsets with respect to any Hausdorff group topology. Moreover, it is proved that the above property characterizes alternating groups in the class of countable locally finite simple groups.

Keywords: finitary permutation groups, unconditionally discrete sets, minimal group topologies.

1. Введение

В данной работе продолжается начатое в [13] исследование подстановочных свойств действия сопряжением группы финитарных подстановок на ее любом классе сопряженных элементов.

Напомним, что подстановка g множества Ω называется *финитарной*, если ее носитель $\mathrm{supp}(g) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^g \neq \alpha\}$ конечен. Множество всех финитарных подстановок образует в $\mathrm{Sym}(\Omega)$ нормальную подгруппу $\mathrm{FSym}(\Omega)$, которая называется *финитарной симметрической группой*, а любая подгруппа из $\mathrm{FSym}(\Omega)$ называется *группой финитарных подстановок* множества Ω. Группа четных финитарных подстановок множества Ω называется *знакопеременной группой* и обозначается через $\mathrm{Alt}(\Omega)$.

Исследование, проведенное в [13], показало, что в некоторых случаях действие сопряжением группы финитарных подстановок на ее произвольном классе сопряженных элементов индуцирует группу финитарных подстановок этого класса. Но в общем случае действие на классе хотя и удовлетворяет некоторым условиям конечности, не является финитарным.

Настоящая работа посвящена рассмотрению одного условия конечности, названного нами D-условием, которому удовлетворяют действия сопряжением на классах в произвольной группе финитарных подстановок. Среди всех известных автору на сегодняшний день условий конечности, которым удовлетворяет это действие на классе, D-условие допускает несколько интерпретаций и поэтому вызывает наибольший интерес. D-условие определяется следующим образом.

Будем говорить, что *действие группы G на множестве Σ удовлетворяет* D-*условию*, если

(D) либо Σ — конечное множество, либо найдется конечное подмножество $F \subseteq G$ такое, что пересечение $\bigcap_{x\in F} \mathrm{supp}(x)$ является конечным непустым множеством.

Используя D-условие, мы можем дать определение DC-групп, являющихся основным объектом исследования данной работы.

Определение 1.1. Пусть G — произвольная группа и $g \in G$. Класс g^G мы будем называть D-классом, если действие сопряжением группы G на классе g^G удовлетворяет D-условию. Группу, все классы сопряженных элементов которой являются D-классами, мы будем называть DC-группой.

Замечание. Другими словами, класс g^G является D-классом, если либо $g \in \mathrm{Z}(G)$, либо найдется конечное подмножество $F \subseteq G$, состоящее из элементов, неперестановочных с g, такое, что лишь конечное число сопряженных с g элементов неперестановочны ни с одним элементом из F.

Из определения D-класса следует, что любая FC-группа, т. е. группа с конечными классами сопряженных элементов, является DC-группой. Более того, любой финитарный класс, т. е. класс сопряженных элементов, на котором группа индуцирует сопряжением группу финитарных подстановок, также является D-классом. Следовательно, группы с финитарными классами сопряженных элементов, названные в [13] ФC-группами, являются DC-группами.

Наш первый результат еще более расширяет семейство примеров DC-групп.

Теорема 1.1. *Любая группа финитарных подстановок является* DC-*группой.*

Перед формулировкой следствий теоремы 1.1 напомним читателю некоторые понятия, тесно связанные с D-условием. Эти понятия возникли в двух различных областях теории групп: в исследованиях решетки идеалов групповых алгебр и при изучении условий минимальности для групповых топологий.

А. Е. Залесский в [6] ввел следующее понятие группы подстановок конечного типа.

Группа $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Sigma)$ называется группой подстановок *конечного типа*, если выполнено условие

(D*) найдется конечное подмножество неединичных элементов $F \subseteq G$ такое, что

$$\bigcap_{x \in F} \mathrm{supp}(x) = \varnothing.$$

Очевидно, D*-условие равносильно тому, что стабилизатор G_α произвольной точки $\alpha \in \Sigma$ содержит по крайней мере один элемент из конечного множества F и, следовательно, любая подгруппа, сопряженная с G_α, также нетривиально пересекает множество F. Последнее мотивирует введение в [6] еще одного понятия.

Определение 1.2. Собственная подгруппа H в группе G называется *скованной* (confined), если найдется конечное множество неединичных элементов $F \subseteq G$ такое, что $H \cap g^{-1}Fg \neq \varnothing$ для любого $g \in G$.

Мы не будем в данной работе объяснять способ применения подстановочного действия конечного типа для построения идеалов в групповых алгебрах. Читатели, заинтересованные в этих приложениях, могут обратиться к работам [5; 6]. Здесь мы ограничимся лишь указанием связи между условиями (D) и (D*).

Пусть G — бесконечная группа подстановок множества Σ, удовлетворяющая D-условию, т. е. существует конечное подмножество $F \subset G$ такое, что $\Delta = \bigcap_{x \in F} \mathrm{supp}(x)$ — непустое конечное множество. В этом случае множество F состоит, очевидно, из неединичных элементов и, добавив к F произвольные неединичные представители стабилизаторов G_α для каждого $\alpha \in \Delta$, мы получим требуемое в D*-условии конечное множество неединичных элементов с пустым пересечением их носителей. Казалось бы, проведению этих рассуждений может помешать отсутствие неединичного элемента в стабилизаторе G_α для некоторой точки $\alpha \in \Delta$. Но допустим, что нашлась точка $\alpha \in \Delta$ такая, что $G_\alpha = 1$. В этом случае G-орбита точки α содержится в Δ и поэтому является конечной, из чего, в свою очередь, следует конечность группы G, противоречащая нашему предположению. Таким образом, любая бесконечная группа подстановок, удовлетворяющая D-условию, является группой подстановок конечного типа, и поэтому справедливо

Следствие 1.1. *Пусть G — произвольная группа финитарных подстановок и $g \in G$. Если класс g^G бесконечен, то действие сопряжением группы G индуцирует на этом классе группу подстановок конечного типа.*

Подобно тому как в [6] условие (D*) было интерпретировано в терминах скованности стабилизатора точки, условие (D) также может быть описано с помощью некоторых ограничений, накладываемых на эти стабилизаторы точек. С этой целью мы вводим новое понятие.

Определение 1.3. Подгруппу H группы G будем называть *сильно скованной*, если найдется конечное, возможно пустое, подмножество $F \subseteq G$ такое, что множество $L = \{x \in G \mid H \cap xFx^{-1} = \varnothing\}$ совпадает с объединением конечного множества правых смежных классов H в G.

Согласно определению 1.3 любая подгруппа конечного индекса группы G является сильно скованной в G, так как в этом случае достаточно положить $F = \varnothing$. В том случае, когда индекс сильно скованной подгруппы H в группе G бесконечен, множество F, очевидно, непусто, а множество L состоит из всех элементов правых смежных классов H, которые сдвигаются элементами из F, т. е. $L = \{x \in G \mid Hxf \neq Hx$ для любого $f \in F\}$. Таким образом, действие группы G правым умножением на множестве правых смежных классов ее сильно скованной подгруппы удовлетворяет условию (D). Обратно, если транзитивное действие группы G удовлетворяет условию (D), то, очевидно, стабилизатор любой точки является сильно скованной в G подгруппой. Так как централизатор $\mathrm{C}_G(g)$ является стабилизатором точки $g \in g^G$ относительно действия сопряжением G на классе g^G, то из теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.2. *Централизатор любого элемента в группе финитарных подстановок является сильно скованной подгруппой.*

Говоря о связи между условиями (D) и (D*), необходимо также отметить, что D-условие является гораздо более сильным ограничением на группу подстановок, чем условие (D*), и следствие 1.1 легко доказать непосредственно без использования теоремы 1.1.

Перейдем теперь к рассмотрению D-условия с другой, топологической, точки зрения. Топологические следствия D-условия являются особенно важными для нас, так как они будут играть главную роль при изучении локально конечных простых DC-групп.

Теперь мы предположим, что действие группы G на бесконечном множестве Σ является транзитивным и удовлетворяет D-условию, т. е. нашлось конечное подмножество $F \subseteq G$ такое, что $\Delta := \bigcap_{x\in F} \mathrm{supp}(x)$ есть непустое конечное множество точек. Пусть также на множестве Σ определена G-инвариантная хаусдорфова топология, т. е. любой элемент $g \in G$ индуцирует непрерывную подстановку хаусдорфова пространства Σ. Так как множество неподвижных точек $\mathrm{fix}(g) := \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha^g = \alpha\}$ непрерывной подстановки хаусдорфова пространства замкнуто, то $\mathrm{supp}(g) := \Sigma \setminus \mathrm{fix}(g)$ является открытым для любого $g \in G$. Значит, конечное непустое множество Δ является открытым как пересечение конечного семейства открытых множеств. Отсюда, очевидно, следует, что любое одноточечное подмножество из Δ является открытым, а из транзитивного действия G на Σ вытекает, что любое одноточечное подмножество из Σ также открыто, т. е. топология, определенная на Σ, является дискретной.

Так как любая хаусдорфова топология на конечном множестве также является дискретной, то справедлива

Теорема 1.2. *Пусть действие группы G на множестве Σ является транзитивным и удовлетворяет D-условию. Тогда любая G-инвариантная хаусдорфова топология на множестве Σ является дискретной.*

Из теорем 1.1 и 1.2 непосредственно вытекает

Следствие 1.3. *Любая G-инвариантная хаусдорфова топология на любом классе сопряженных элементов в DC-группе G, и в частности в группе финитарных подстановок, является дискретной.*

С помощью следствия 1.3 легко получить сильные ограничения на хаусдорфовы групповые топологии, которые можно определить на DC-группе. Действительно, пусть G — хаусдорфова топологическая группа. Тогда ограничение групповой топологии на класс g^G определяет на этом классе G-инвариантную хаусдорфову топологию. Если определенное таким образом топологическое пространство g^G дискретно, то $\mathrm{C}_G(g)$ есть открытая подгруппа в топологической группе G, и поэтому в DC-группе G централизатор любого элемента является открытой подгруппой относительно любой хаусдорфовой групповой топологии на G.

Напомним, что А. А. Марков [14] назвал подмножество S группы G *безусловно замкнутым*, если S — замкнутое множество в любой хаусдорфовой групповой топологии на G. Мы несколько расширим использование термина "безусловно", вводя следующее определение.

Определение 1.4. Подмножество S из группы G будем называть *безусловно открытым* (*безусловно дискретным*), если S — открытое (дискретное) множество в любой хаусдорфовой групповой топологии на G.

Таким образом, справедливо

Следствие 1.4. *Каждый класс сопряженных элементов в* DC*-группе, и в частности в группе финитарных подстановок, является безусловно дискретным, а централизатор любого элемента — безусловно открытым множеством.*

Так как пересечение конечного семейства открытых множеств является открытым множеством, то пересечение конечного семейства безусловно открытых множеств в группе также является безусловно открытым. Значит, в DC-группе G централизатор $\mathrm{C}_G(F)$ любого конечного подмножества $F \subseteq G$ является безусловно открытым. Беря в качестве базы окрестностей единицы централизаторы конечных подмножеств группы G, мы задаем на G групповую топологию, которая называется *централизаторной*. Используя понятие централизаторной топологии, мы можем несколько по-иному представить указанное свойство централизаторов конечных подмножеств в DC-группе.

Следствие 1.5. *Централизаторная топология на* DC*-группе G, и в частности на группе финитарных подстановок, слабее любой хаусдорфовой групповой топологии на G.*

Централизаторная топология является хаусдорфовой в том и только том случае, когда пересечение централизаторов всех конечных подмножеств равно 1, т. е. $\mathrm{Z}(G) = 1$. Поэтому из следствия 1.5 вытекает

Следствие 1.6. *Централизаторная топология на* DC*-группе G и, в частности, на группе финитарных подстановок, с тривиальным центром* $\mathrm{Z}(G)$ *является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.*

Группы, допускающие наислабейшую хаусдорфову групповую топологию, были названы Д. Дикраняном и М. Мегрелишвили [3] *a-минимальными группами*. Пользуясь этим термином, мы можем сказать, что любая DC-группа с тривиальным центром является a-минимальной.

Необходимо также отметить, что в частном случае $G = \mathrm{FSym}(\Omega)$ топологические свойства группы G, представленные в следствиях 1.4–1.6, вытекают из результатов Т. Банаха, И. Гурана и И. Протасова [1]. Теорема 1.2 из [1] утверждает, что для любой подгруппы $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$, содержащей $\mathrm{FSym}(\Omega)$, топология поточечной сходимости является наислабейшей хаусдорфовой топологией на G и, значит, G — a-минимальная группа. Теорема 1.2 из [1] не противоречит следствию 1.6, так как централизаторная топология на $\mathrm{FSym}(\Omega)$ совпадает с топологией поточечной сходимости.

В общем случае централизаторная топология на $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ может быть строго слабее топологии поточечной сходимости. Например, пусть G — вполне импримитивная p-группа финитарных подстановок множества Ω. Так как нормальное замыкание произвольного конечного подмножества $F \subseteq G$ является нильпотентной группой, то $\mathrm{C}_G(F)$ содержит неединичную нормальную в G подгруппу. Отсюда, очевидно, следует, что стабилизатор G_α точки $\alpha \in \Omega$ не содержит $\mathrm{C}_G(F)$ ни для какого конечного подмножества $F \subseteq G$. Значит, стабилизатор G_α, являющийся окрестностью единицы в топологии поточечной сходимости, не содержит никаких окрестностей единицы в централизаторной топологии. С другой стороны, для произвольного конечного подмножества $F \subseteq G$ поточечный стабилизатор $G_{(\Delta)}$, где $\Delta = \mathrm{supp}(F)$, содержится в $\mathrm{C}_G(F)$, т. е. централизаторная топология слабее топологии поточечной сходимости. Таким образом, централизаторная топология на группе G строго слабее топологии поточечной сходимости. Заметим, что $\mathrm{Z}(G) = 1$. Значит, мы можем воспользоваться следствием 1.6, в силу которого G есть a-минимальная группа подстановок, но топология поточечной сходимости на G не является наислабейшей. Читателей, заинтересованных в более детальном сравнении топологии поточечной сходимости и централизаторной топологии на группе финитарных подстановок, мы отсылаем к работе [12].

Построение новых примеров a-минимальных групп вызывает интерес у специалистов в области топологических групп (см., например, [3, вопросы 2.2 и 3.3]). Поэтому мы в данной работе даем еще один способ построения a-минимальных групп с помощью групп финитарных подстановок.

Теорема 1.3. *Пусть $H \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$, $\overline{H}$ — замыкание H в $\mathrm{Sym}(\Omega)$ относительно топологии поточечной сходимости и $\mathrm{Z}(\overline{H}) = 1$. Тогда любая подгруппа из $\overline{H}$, содержащая H, является a-минимальной группой.*

Понятно, что теорема 1.2 из [1] есть частный случай теоремы 1.3 для $H = \mathrm{FSym}(\Omega)$.

Теорема 1.3 завершает рассмотрение основных следствий теоремы 1.1, полученных в работе, и мы переходим к другому вопросу, естественно возникающему в связи с теоремой 1.1. Насколько широк класс DC-групп? В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением поставленного вопроса в классе локально конечных простых групп.

Теорема 1.4. *Для бесконечной локально конечной простой группы G следующие условия равносильны*:

1. *G — знакопеременная группа.*
2. *G — DC-группа.*

Полученный результат позволяет надеяться на положительный ответ на следующий вопрос:

Верно ли, что *полупростая* локально конечная DC-группа имеет точное финитарное подстановочное представление?

Топологические следствия D-условия сыграли большую роль при доказательстве теоремы 1.4. Более того, оказалось, что счетные знакопеременные группы полностью характеризуются этими топологическими свойствами. Точнее, справедлива

Теорема 1.5. *Для счетной локально конечной простой группы G следующие условия равносильны*:

1. *G — знакопеременная группа.*
2. *Любой класс сопряженных элементов в G является безусловно дискретным.*
3. *Централизатор любого элемента в G является безусловно открытым.*
4. *Централизаторная топология на G является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.*

Заметим также, что теоремы 1.4 и 1.5 представляют здесь несколько ослабленные варианты результатов исследований, проведенных в разд. 5. Для характеризации знакопеременных групп в классе локально конечных простых групп достаточно наложить указанные в этих теоремах ограничения лишь на один неединичный класс сопряженных элементов или на централизатор одного неединичного элемента.

Кроме перечисленных в теореме 1.5 топологических ограничений есть еще одно топологическое свойство групп финитарных подстановок, которое вызывает большой интерес. Из теоремы 1.5 следует, что счетная знакопеременная группа a-минимальна, т. е. допускает наислабейшую хаусдорфову групповую топологию. Более того, счетная локально конечная простая a-минимальная группа обязана быть знакопеременной, если ее наислабейшая хаусдорфова групповая топология является централизаторной. Но, может быть, в теореме 1.5 достаточно ограничиться требованием лишь a-минимальности группы? К сожалению, нам не удалось получить ответ на этот вопрос; а мы смогли лишь свести проблему к исследованию узкого класса простых групп, достаточно хорошо изученных на сегодняшний день (см., например, [4]).

Теорема 1.6. *Любая a-минимальная счетная локально конечная простая группа имеет точное финитарное линейное представление.*

Завершая рассмотрение полученных результатов, поясним содержание других разделов работы. В разд. 2 приведены результаты по структурной теории групп финитарных подстановок, которые используются в разд. 3 при доказательстве теоремы 1.1. Доказательства теорем 1.3 и 1.6, касающихся a-минимальных групп, даются в разд. 4, а топологические свойства знакопеременных групп (теоремы 1.4 и 1.5) рассматриваются в разд. 5. Отметим также, что ранее были даны все необходимые пояснения к топологическим следствиям D-условия, представленным в теореме 1.2, и поэтому отдельное доказательство теоремы 1.2 не требуется.

2. Строение замкнутых подгрупп в $\mathrm{FSym}(\Omega)$

В этом разделе мы приводим все необходимые нам в работе результаты из [10; 11], касающиеся строения групп финитарных подстановок, замкнутых в симметрической группе финитарных подстановок относительно топологии поточечной сходимости. В дальнейшем, говоря о замкнутых подгруппах в $\mathrm{FSym}(\Omega)$, мы всегда будем иметь в виду именно топологию поточечной сходимости. Как и в работах [10; 11], для любой подгруппы G из $\mathrm{FSym}(\Omega)$ через G^* мы будем обозначать замыкание G в $\mathrm{FSym}(\Omega)$ относительно топологии поточечной сходимости и называть группу G^* *финитарным замыканием* группы G. Напомним также, что подстановка $h \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ называется *G-предельной*, если для любого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Omega$ найдется подстановка $g \in G$ такая, что $h|_\Delta = g|_\Delta$, т. е. $\alpha^h = \alpha^g$ для любой точки $\alpha \in \Delta$. Таким образом, группа G^*, являющаяся финитарным замыканием группы G, состоит из всех G-предельных финитарных подстановок.

В общем случае группа подстановок представима в виде поддекартова произведения своих транзитивных конституент (см., например, [2]). Но в случае группы финитарных подстановок любой ее элемент действует нетождественно лишь на конечном множестве орбит группы, и поэтому справедлива

Теорема 2.1. *Пусть $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$. Тогда G есть подпрямое произведение своих транзитивных конституент.*

Более того, в [10] показано, что если G — замкнутая подгруппа в $\mathrm{FSym}(\Omega)$, то, взяв вместо групповых орбит "обобщенные" орбиты, можно заменить в теореме 2.1 слово "подпрямое" на слово "прямое". Эти прямые разложения замкнутых подгрупп из $\mathrm{FSym}(\Omega)$ уже использовались нами ранее (см., например, [13]) и будут также применяться в данной работе. Полученный нами опыт использования результатов работы [10] показывает, что для формулировки некоторых следствий из основной теоремы в [10] желательно ввести несколько дополнительных терминов, с помощью которых удобнее описывать и вышеупомянутые "обобщенные" орбиты группы, и прямые разложения замкнутых подгрупп из $\mathrm{FSym}(\Omega)$.

Сначала напомним исходные понятия и термины, которые использовались в [10].

Пусть G — произвольная группа. Подгруппы A и B из G мы называем *соизмеримыми*, если их пересечение $A \cap B$ является подгруппой конечного индекса как в A, так и в B.

Очевидно, что соизмеримость есть отношение эквивалентности на множестве всех подгрупп из G. Кроме того, соизмеримость есть G-инвариантное отношение, т. е. соизмеримость инвариантна относительно действия сопряжением группы G на множестве ее подгрупп.

Пусть теперь Ω — произвольное G-пространство. Точки $\alpha, \beta \in \Omega$ мы называем *соизмеримыми* (или, точнее, G-соизмеримыми), если их стабилизаторы G_α и G_β — соизмеримые подгруппы в G. Так как соизмеримость подгрупп есть G-инвариантное отношение эквивалентности, то соизмеримость точек также является G-инвариантным отношением эквивалентности на Ω.

Введем несколько терминов, которые не использовались нами ранее в [10; 11].

Определение 2.1. Классы G-соизмеримых точек мы будем называть *кластерами* G-пространства Ω или, короче, G-кластерами.

В силу G-инвариантности отношения соизмеримости точек действие G на Ω индуцирует действие G на множестве кластеров.

Определение 2.2. Пусть Δ — произвольный G-кластер. Множество точек $\Delta^G := \bigcup_{g\in G} \Delta^g$ будем называть *кластерной G-орбитой* пространства Ω. G-пространство, совпадающее с кластерной G-орбитой, назовем *кластерно транзитивным.*

Заметим, что под кластерной G-орбитой Δ^G понимается не орбита кластера Δ в G-пространстве кластеров, а множество точек из Ω, содержащихся в орбите кластера. Отметим также, что под "обобщенными" орбитами, упоминавшимися в начале этого раздела, имелись в виду именно кластерные орбиты.

С помощью понятия кластерной орбиты мы можем переформулировать основную теорему из [10] следующим образом.

Теорема 2.2. *Пусть G — замкнутая подгруппа в $\mathrm{FSym}(\Omega)$ и $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ — множество всех кластерных G-орбит. Для каждого $i \in I$ положим $G_i := \{g \in G \mid \mathrm{supp}(g) \subseteq \Omega_i\}$. Тогда*
1. *G_i — замкнутая нормальная подгруппа в G для любого $i \in I$.*
2. *G_i действует кластерно транзитивно на Ω_i для любого $i \in I$.*
3. *G есть прямое произведение подгрупп G_i, $i \in I$.*

Доказательство. Очевидно, первое утверждение теоремы 2.2 следует из определения подгрупп G_i, а второе утверждение следует из третьего. Поэтому только третье утверждение теоремы нуждается в доказательстве, но оно вытекает из [10, основная теорема]. □

Заметим также, что теорема 2.2, строго говоря, не является равносильной переформулировкой основной теоремы из [10] в новых терминах. Теорема 2.2 немного слабее ее, так как компоненты прямого разложения, предложенного в [10], определялись через понятие неразложимости и поэтому FC-компонента прямого разложения группы G в теореме 2.2 может содержать несколько компонент прямого разложения G из [10].

Итак, согласно теореме 2.2 любая финитарно замкнутая группа G финитарных подстановок представима в виде прямого произведения финитарно замкнутых кластерно транзитивных групп G_i, $i \in I$. Полученное прямое разложение группы G вызывает естественный вопрос: *что можно сказать о строении кластерно транзитивных компонент*? При рассмотрении этого вопроса удобно разбить класс всех кластерно транзитивных групповых пространств на два подкласса.

Определение 2.3. Пусть G — произвольная группа. G-пространство Ω мы будем называть *монокластерным*, если Ω есть G-кластер, т. е. все точки из Ω G-соизмеримы. Кластерно транзитивные G-пространства, содержащие по крайней мере два различных G-кластера, мы будем называть *поликластерными.*

Таким образом, любая кластерно транзитивная группа подстановок является либо поликластерной, либо монокластерной. Например, группа автоморфизмов любого связного локально конечного графа является монокластерной группой подстановок вершин этого графа, а любая бесконечная локально конечная примитивная группа подстановок дает нам пример транзитивного группового пространства с одноточечными кластерами. Из приведенных примеров видно, что в общем случае классы монокластерных и поликластерных групп подстановок необъятны, но в случае групп финитарных подстановок ситуация иная.

Теорема 2.3 [11, основная теорема]. *Пусть G — замкнутая поликластерная подгруппа из* $\mathrm{FSym}(\Omega)$*, т. е.* Ω *содержит несоизмеримые точки и* G *действует транзитивно на множестве* G*-кластеров. Тогда* G *представима в виде ограниченного сплетения конечной группы подстановок и группы* $\mathrm{FSym}(\Sigma)$ *для некоторого бесконечного множества* Σ*. В частности, множество* G*-кластеров бесконечно, и для любых двух различных* G*-кластеров* Δ *и* Γ *найдется подстановка* $t \in G$ *такая, что* $\Delta^t = \Gamma$, $\Gamma^t = \Delta$ *и* $\mathrm{supp}(t) = \Gamma \cup \Delta$.

Что касается монокластерных групп финитарных подстановок, то, в отличие от поликластерного случая, здесь, во-первых, дополнительное ограничение финитарной замкнутости не играет существенной роли при изучении их строения и, во-вторых, конструктивное описание таких групп вряд ли возможно. В работе [13], посвященной исследованию монокластерных групп финитарных подстановок, был получен ряд общих свойств таких групп, одно из которых используется в данной работе. Перед формулировкой этого свойства напомним одно определение из [13].

Пусть G — произвольная группа и $g \in G$. Класс сопряженных с g элементов называется *финитарным*, если группа подстановок, индуцируемая действием сопряжением G на классе g^G, является финитарной. Очевидно, финитарность класса g^G равносильна тому, что любой элемент из G перестановочен почти с каждым элементом, сопряженным с g.

Теорема 2.4 [13, предложение 2.4]. *В монокластерной группе финитарных подстановок все классы сопряженных элементов являются финитарными.*

3. Доказательство теоремы 1.1

Свойства финитарно замкнутых групп финитарных подстановок, изложенные в предыдущем разделе, подсказывают нам следующий план доказательства теоремы 1.1: сначала редуцировать общую ситуацию к случаю замкнутых подгрупп из $\mathrm{FSym}(\Omega)$, а затем показать, что монокластерные и поликластерные группы, а также их прямые произведения являются DC-группами. Этот план действительно удается реализовать в виде последовательности лемм.

Лемма 3.1. *Пусть* $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ *и* G^* *— замыкание* G *в* $\mathrm{FSym}(\Omega)$ *относительно топологии поточечной сходимости. Тогда для любых неперестановочных элементов* a *и* b *из* G^* *найдется такое конечное подмножество* $F(a,b) \subseteq G$*, что*

1. *Любой элемент из* $F(a,b)$ *неперестановочен с* a*.*
2. *Любой элемент из класса* a^{G^*}*, перестановочный с* b*, перестановочен также с некоторым элементом из* $F(a,b)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = |\mathrm{supp}(a)| + 1$. Используя определение G-предельной подстановки, последовательно выберем из G конечное множество элементов $F = F(a,b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $b_1|_{\mathrm{supp}(a,b)} = b|_{\mathrm{supp}(a,b)}$.
2. $b_{i+1}|_{\mathrm{supp}(a,b,b_1,\ldots,b_i)} = b|_{\mathrm{supp}(a,b,b_1,\ldots,b_i)}$.

Согласно выбору $b_i|_{\mathrm{supp}(a)} = b|_{\mathrm{supp}(a)}$ для любого $b_i \in F$. Следовательно, $[a, b_i b^{-1}] = 1$, и поэтому $[b_i, a] = [b, a]$. Так как по условию леммы $[b, a] \neq 1$, то и все элементы из F неперестановочны с a.

Пусть теперь x — произвольный элемент из класса a^{G^*}. Заметим, что $b_i|_{\mathrm{supp}(b,b_j)} = b|_{\mathrm{supp}(b,b_j)}$ для любых $i > j$. Отсюда следует, что $\mathrm{supp}(b_i b^{-1}) \cap \mathrm{supp}(b_j b^{-1}) = \varnothing$. Если $\mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(b_i b^{-1}) \neq \varnothing$ для любого $b_i \in F$, то $|\mathrm{supp}(x)| \geqslant n$, что противоречит неравенству $|\mathrm{supp}(x)| =$

$|\mathrm{supp}(a)| < n$. Значит, $\mathrm{supp}(b_k b^{-1}) \cap \mathrm{supp}(x) = \varnothing$ для некоторого $b_k \in F$, откуда следует равенство $[b_k b^{-1}, x] = 1$, равносильное равенству $[b_k, x] = [b, x]$. Следовательно, если x перестановочен с b, то x перестановочен также с b_k. Таким образом, множество F удовлетворяет требуемым условиям.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$. *Если* G^* *является* DC-*группой, то* G *также является* DC-*группой.*

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент из G. Согласно условию леммы класс a^{G^*} является D-классом в группе G^*, т. е. найдется конечное подмножество $B \subseteq G^*$, состоящее из элементов, неперестановочных с a, такое, что почти любой элемент из a^{G^*} перестановочен с некоторым элементом из B.

Воспользуемся леммой 3.1 и для каждого $b \in B$ выберем конечное подмножество $F(a, b) \subseteq G$, удовлетворяющее заключению леммы 3.1. Согласно выбору конечное множество $F = \bigcup_{b \in B} F(a, b)$, во-первых, содержится в G, во-вторых, состоит из элементов неперестановочных с a, и, в-третьих, почти каждый элемент из a^{G^*} перестановочен с некоторым элементом из F. Очевидно, из включения $G \leqslant G^*$ следует включение $a^G \subseteq a^{G^*}$, и поэтому почти каждый элемент из a^G перестановочен с некоторым элементом из F. Последнее означает, что a^G — D-класс в группе G и в силу произвольного выбора элемента a группа G является DC-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Монокластерная группа финитарных подстановок является* DC-*группой.*

Доказательство. Пусть G — монокластерная группа финитарных подстановок. Согласно теореме 2.4 все классы сопряженных элементов в G являются финитарными. Легко понять, что любой финитарный класс является D-классом. Действительно, если a^G — бесконечный класс, то a — нецентральный элемент в группе G и, взяв множество F, состоящее из одного элемента, неперестановочного с a, мы получим конечное подмножество $F \subseteq G$, требуемое в определении D-класса. Таким образом, G является DC-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Поликластерная группа финитарных подстановок является* DC-*группой.*

Доказательство. Пусть G — поликластерная группа финитарных подстановок, т. е. найдутся по крайней мере два различных G-кластера, и G действует транзитивно на множестве всех кластеров.

Так как единичный класс в любой группе является D-классом, то достаточно проверить D-условие только для неединичных классов сопряженных элементов.

Пусть g — произвольный неединичный элемент из G и $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — все кластеры, содержащие хотя бы одну точку из $\mathrm{supp}(g)$. В силу бесконечности множества всех кластеров среди кластеров, непересекающихся с $\mathrm{supp}(g)$, можно выбрать n различных кластеров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$.

Согласно теореме 2.3 для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдется подстановка $t_i \in G$, переставляющая кластеры Δ_i и Γ_i, причем $\mathrm{supp}(t_i) = \Delta_i \cup \Gamma_i$. Так как $\mathrm{supp}(g^{t_i})$ содержит точку из $\Gamma_i = \Delta_i^{t_i}$, то $[g, t_i] \neq 1$ для произвольного $i = 1, \ldots, n$.

Покажем теперь, что множество $S = \left\{h \in g^G \mid [h, t_j] \neq 1 \text{ для } i = 1, \ldots, n\right\}$ конечно. Действительно, возьмем произвольную подстановку $h \in S$. Так как h неперестановочна с t_i, то $\mathrm{supp}(h) \cap \mathrm{supp}(t_i) \neq \varnothing$ и поэтому $\mathrm{supp}(h)$ содержит хотя бы одну точку из Δ_i или из Γ_i для каждого i. Заметим, что число кластеров, пересекающихся с $\mathrm{supp}(h)$, не зависит от выбора h в классе g^G и равно n. Значит, $\mathrm{supp}(h) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{supp}(t_i)$, откуда следует конечность множества S.

Таким образом, D-условие для класса g^G выполнено и в силу произвольного выбора неединичного элемента g группа G является DC-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Прямое произведение любого семейства* DC-*групп является* DC-*группой.*

Доказательство леммы мы будем проводить, используя внутреннюю версию прямого произведения, т. е. считать, что группа G разложима в прямое произведение своих DC-подгрупп G_i, $i \in I$.

Возьмем произвольный элемент $g \in G$ и покажем, что класс $C := g^G$ удовлетворяет D-условию. Будем сразу предполагать, что класс C бесконечен, так как любой конечный класс удовлетворяет D-условию.

Из прямого разложения $G = \prod_{i \in I} G_i$ следует, что элемент g представим в виде произведения $g = \prod_{i \in J} g_i$ элементов $g_i \in G_i$ для некоторого конечного подмножества $J \subseteq I$. Положим $C_i = g_i^{G_i}$ для каждого $i \in J$. Понятно, что $C = \prod_{i \in J} C_i$ и поэтому класс C конечен тогда и только тогда, когда все классы C_i для $i \in J$ конечны. Так как C — бесконечный класс, то некоторые из классов C_i бесконечны. Пусть K — множество всех $i \in J$, для которых классы C_i, $i \in J$, бесконечны. Согласно D-условию для каждого $i \in K$ найдется конечное непустое подмножество $F_i \subseteq G_i$ такое, что множество L_i, состоящее из всех элементов из C_i, неперестановочных ни с одним элементом из F_i, конечно и непусто.

Заметим, что для любых $x \in G$, $i \in K$ и $f \in F_i$ справедливы равенства $[g^x, f] = [\prod_{i \in J} g_i^x, f] = [g_i^x, f]$. Поэтому элемент g^x неперестановочен ни с одним элементом из $F = \bigcup_{i \in K} F_i$ тогда и только тогда, когда $g_i^x \in L_i$ для любого $i \in K$. Следовательно, множество всех элементов из класса g^G, неперестановочных ни с одним элементом из F, конечно и непусто.

Лемма доказана.

Лемма 3.5 завершает доказательство теоремы 1.1. Действительно, из лемм 3.3–3.5 следует, что прямые произведения монокластерных и поликластерных групп финитарных подстановок являются DC-группами. Отсюда согласно теореме 2.2 вытекает, что любая финитарно замкнутая группа финитарных подстановок является DC-группой. Наконец, воспользовавшись леммой 3.2, мы получаем требуемое заключение для произвольных групп финитарных подстановок.

4. Наислабейшие хаусдорфовы групповые топологии

Согласно следствию 1.6 централизаторная топология на группе G финитарных подстановок с тривиальным центром является наислабейшей хаусдорфовой топологией, и поэтому G есть a-минимальная группа. Насколько широк класс a-минимальных групп — основной вопрос, который будет рассматриваться в данном разделе работы.

Нетрудно понять, что изучение a-минимальных групп тесно связано с исследованием способов построения групповых топологий. Один из самых простых способов состоит в задании на группе подстановок $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$ топологии поточечной сходимости, в которой поточечные стабилизаторы $G_{(\Delta)}$ конечных подмножеств $\Delta \subseteq \Omega$ образуют базис окрестностей единицы. Конечно, эта групповая топология может быть определена и без обращения к подстановочным представлениям группы G. Для этого достаточно взять в G произвольное семейство подгрупп $\mathcal{L}$, замкнутое относительно сопряжения, и объявить базой окрестностей единицы пересечения всех конечных подмножеств из $\mathcal{L}$. Если пересечение всех подгрупп из $\mathcal{L}$ есть единица, то определенная таким способом групповая топология на G является хаусдорфовой.

Указанный способ построения групповых топологий позволяет получить следующее свойство a-минимальных простых групп.

Лемма 4.1. *Если G — a-минимальная простая группа, то для любых собственных подгрупп H_1 и H_2 из G найдется конечное подмножество $F \subseteq G$ такое, что $G \neq \left(\bigcap_{x \in F} H_1^x\right) \cdot \left(\bigcap_{x \in F} H_2^x\right)$.*

Доказательство. Взяв качестве базы окрестностей 1 пересечения всех конечных семейств подгрупп, сопряженных с H_1 и H_2, определим на G две групповые топологии τ_1

и τ_2 соответственно. Так как G — простая группа, то $\bigcap_{x\in G} H_i^x = 1$, $i = 1, 2$, и, значит, τ_1 и τ_2 — хаусдорфовы топологии. Согласно нашему предположению G имеет наислабейшую хаусдорфову групповую топологию $\tau \subseteq \tau_1 \cap \tau_2$. В топологии τ выберем окрестность единицы W такую, что $W \cdot W \neq G$. Так как топология τ слабее τ_1 и τ_2, окрестность W содержит некоторые окрестности единицы в топологиях τ_1 и τ_2. Следовательно, найдутся конечные подмножества F_1 и F_2, такие, что $\bigcap_{x\in F_i} H_i^x \subseteq W$ для $i = 1, 2$. Полагая $F = F_1 \cup F_2$, мы получаем требуемое конечное множество F.

Лемма доказана.

Полученное свойство простых a-минимальных групп позволяет применить к исследованию a-минимальных групп некоторые результаты из [7].

Напомним, что подгруппа H из G называется *инертной*, если индекс $|H : H \cap H^g|$ конечен для любого $g \in G$. Также будем говорить, что G *инертно факторизуется* подгруппами H_1 и H_2, если H_1 и H_2 — финитно аппроксимируемые подгруппы в G и для любого конечного подмножества $F \subseteq G$ имеем $G = \left(\bigcap_{x\in F} H_1^x\right) \cdot \left(\bigcap_{x\in F} H_2^x\right)$.

Лемма 4.2 [7, следствие 1.9]. *Если счетная локально конечная простая группа G не допускает инертной факторизации, то G имеет точное финитарное линейное представление.*

Доказательство теоремы 1.6. Очевидно, из леммы 4.1 следует, что неабелева a-минимальная простая группа не допускает инертной факторизации. Поэтому теорема 1.6 есть непосредственное следствие лемм 4.1 и 4.2.

Лемма доказана.

Известно [4, теорема 1.3], что бесконечные простые локально конечные группы финитарных линейных преобразований исчерпываются конечномерными группами лиева типа, бесконечномерными группами классического типа и знакопеременными группами финитарных подстановок. Так как знакопеременные группы согласно следствию 1.6 являются a-минимальными, то для окончательного решения вопроса о строении счетных локально конечных простых a-минимальных групп осталось рассмотреть лишь конечномерные группы лиева типа и бесконечномерные группы классического типа, определенные над локально конечными полями.

Обратимся теперь к теореме 1.3. Основой ее доказательства является следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть H — DC-группа с тривиальным центром и $\mathrm{Inn}(H) \leqslant G \leqslant \overline{\mathrm{Inn}}(H)$. Тогда G — a-минимальная группа. (Здесь, $\mathrm{Inn}(H)$ — группа внутренних автоморфизмов группы H, а $\overline{\mathrm{Inn}}(H)$ — группа локально внутренних автоморфизмов группы H).*

Доказательство. Так как $\mathrm{Z}(H) = 1$, то H изоморфна $\mathrm{Inn}(H)$ и ввиду следствия 1.4 каждый класс сопряженных элементов в $\mathrm{Inn}(H)$ является безусловно дискретным. Из включения $G \leqslant \overline{\mathrm{Inn}}(H)$ следует, что любой класс сопряженных элементов g^G в группе G для $g \in \mathrm{Inn}(H)$ является классом сопряженных элементов в $\mathrm{Inn}(H)$, а так как свойство безусловной дискретности сохраняется при переходе к надгруппам, то g^G является безусловно дискретным классом в G для любого $g \in \mathrm{Inn}(H)$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\mathrm{C}_G(g)$ — безусловно открытая подгруппа для любого $g \in \mathrm{Inn}(H)$. Заметим, наконец, что $\mathrm{C}_G(\mathrm{Inn}(H)) = 1$. Значит, семейство централизаторов $\mathrm{C}_G(F)$, где F пробегает все конечные подмножества из $\mathrm{Inn}(H)$, образует базис окрестностей единицы хаусдорфовой групповой топологии и в силу безусловной открытости централизаторов $\mathrm{C}_G(F)$ эта топология является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $H \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$, $\overline{H}$ — замыкание группы H в $\mathrm{Sym}(\Omega)$ относительно топологии поточечной сходимости, $\mathrm{Z}(\overline{H}) = 1$ и $H \leqslant G \leqslant \overline{H}$.

Сначала заметим, что согласно [12, утверждение 3.8] $\mathrm{Z}(\overline{H}) = \mathrm{C}_{\overline{H}}(H)$, а так как $\mathrm{Z}(\overline{H}) = 1$, то $\mathrm{C}_G(H) = 1$. Воспользуемся теперь утверждением 5.1 из [12], из которого следует, что $H \lhd G$ и любой элемент из G сопряжением индуцирует локально внутренний автоморфизм H. Значит, группа G вложима в $\overline{\mathrm{Inn}}(H)$, и применение леммы 4.3 завершает доказательство.

Теорема доказана.

5. Топологические характеризации бесконечных знакопеременных групп

Из теоремы 1.1 и топологических следствий D-условия, приведенных в первом разделе, вытекают различные свойства групп финитарных подстановок, и в частности знакопеременных групп. В какой степени эти свойства характеризуют знакопеременные группы в классе всех локально конечных простых групп? При исследовании этого вопроса мы будем пользоваться другими характеризациями бесконечных знакопеременных групп, полученными нами ранее в [8].

Лемма 5.1 [8, теорема 1.4]. *Для бесконечной локально конечной простой группы G следующие условия эквивалентны*:

1. *G — знакопеременная группа.*

2. *Любая счетная финитно аппроксимируемая подгруппа из G является локально нормальной.*

Лемма 5.2 [8, теорема 1.6]. *Для счетной локально конечной простой группы G следующие условия эквивалентны*:

1. *G — знакопеременная группа или группа лиева типа.*

2. *Любая собственная инертная подгруппа из G локально нормальна.*

Конечно, условие 2 из леммы 5.2 не позволяет выделить знакопеременные группы в классе счетных локально конечных простых групп. Применяя лемму 5.2, приходится использовать дополнительные средства для исключения возможности для G быть группой лиева типа. В нашем случае таким дополнительным средством является результат, казалось бы, совсем не подходящий для этой роли, так как в нем утверждается существование недискретной хаусдорфовой групповой топологии на любой счетной локально конечной группе. Но дело в том, что бесконечные знакопеременные группы могут быть снабжены недискретными неархимедовыми топологиями, т. е. топологиями, у которых базис окрестностей единицы состоит из подгрупп, в то время как на группах лиева типа нельзя определить недискретную неархимедову хаусдорфову групповую топологию, что и позволяет исключать случай групп лиева типа с помощью следующего утверждения.

Лемма 5.3 [9, теорема 1]. *Любая счетная локально конечная группа допускает недискретную хаусдорфову групповую топологию.*

Помимо лемм 5.1–5.3 нам потребуется еще один вспомогательный результат общего характера.

Лемма 5.4. *Любая счетная подгруппа простой группы G содержится в счетной простой подгруппе из G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как G — простая группа, то нормальное замыкание любого неединичного элемента из G совпадает с G, и поэтому для любой пары (x, y) неединичных элементов из G найдется конечное подмножество $S(x, y) \subseteq G$ такое, что $y \in \langle s^{-1}xs \mid s \in S(x, y)\rangle$.

Пусть H — произвольная счетная подгруппа из G. Индуктивно определим возрастающую последовательность счетных подгрупп $H = H_1 \leqslant H_2 \leqslant \ldots$, полагая

$$H_{n+1} = \left\langle H_n, S(x, y) \mid x, y \in H_n^{\#} \right\rangle,$$

и рассмотрим ее объединение $H^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Подгруппа H^* является, очевидно, счетной подгруппой, содержащей H. Допустим, что H^* — непростая группа. В этом случае найдется пара (a, b) неединичных элементов из H^* такая, что нормальное замыкание элемента a в H^* не содержит элемент b. Согласно построению подгруппы H^* в ней найдется подгруппа H_n, содержащая элементы a и b. Следовательно, $S(a, b) \subseteq H_{n+1} \leqslant H^*$ и $b \in \langle s^{-1}as \mid s \in S(a, b) \rangle$, т. е. элемент b содержится в нормальном замыкании элемента a в подгруппе H_{n+1} и тем более в нормальном замыкании элемента a в подгруппе H^*. Полученное противоречие показывает, что H^* — простая группа.

Лемма доказана.

Первую характеризацию знакопеременных групп нам удалось получить лишь при наложении дополнительных ограничений на мощность группы. Мы посчитали уместным собрать в этой характеризационной теореме такие свойства знакопеременных групп, которые, несмотря на внешнее различие, имеют одинаковую природу. В результате мы получили весьма большой список характеристических свойств, который в урезанном виде был дан ранее в теореме 1.5.

Теорема 5.1. *Для счетной локально конечной простой группы G следующие условия равносильны*:

(1) *G — знакопеременная группа.*

(2) *G — DC-группа.*

(3) *G содержит хотя бы один неединичный D-класс.*

(4) *Все классы сопряженных элементов в G безусловно дискретны.*

(5) *G содержит хотя бы один неединичный безусловно дискретный класс сопряженных элементов.*

(6) *Централизаторы всех элементов из G безусловно открыты.*

(7) *Централизатор хотя бы одного неединичного элемента из G безусловно открыт.*

(8) *Централизаторная топология на G является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.*

(9) *Централизаторы всех элементов сильно скованы в G.*

(10) *Централизатор хотя бы одного неединичного элемента сильно скован.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала мы укажем те связи между перечисленными десятью условиями, которые непосредственно следуют из их формулировок.

Во-первых, напомним, что класс g^G является D-классом тогда и только тогда, когда $\mathrm{C}_G(g)$ есть сильно скованная подгруппа в G. Поэтому условия (9) и (10) являются переформулировками условий (2) и (3) соответственно в терминах сильно скованных подгрупп.

Во-вторых, условия (3), (5) и (7) являются частными случаями условий (2), (4) и (6) соответственно.

В-третьих, импликации (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6) и (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (7), представляющие собой последовательный переход от D-условия к безусловной дискретности классов и, далее, к безусловной открытости централизаторов, пояснялись в первом разделе (см. следствие 1.4).

Обратимся теперь к условиям (6), (7) и (8). Заметим, что для групп с тривиальным центром условия (6) и (8) эквивалентны. Более того, эти три условия равносильны для любой простой неабелевой группы G. Действительно, пусть $g \in G^{\#}$ и $\mathrm{C}_G(g)$ — безусловно открытая в G подгруппа. В этом случае $\mathrm{C}_G(x)$ для любого $x \in g^G$ также является безусловно открытой подгруппой и, значит, $\bigcap_{x \in S} \mathrm{C}_G(x)$ — безусловно открытая подгруппа для любого конечного подмножества $S \subseteq g^G$. Так как G — простая группа, то $\langle g^G \rangle = G$, и поэтому для любого конечного подмножества $F \subseteq G$ найдется конечное подмножество $S \subseteq g^G$ такое, что $F \subseteq \langle S \rangle$. Следовательно, $\mathrm{C}_G(F)$ содержит $\mathrm{C}_G(S)$ и, значит, $\mathrm{C}_G(F)$ также является безусловно открытой подгруппой. Последнее для групп с тривиальным центром означает, что централизаторная топология является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нам достаточно установить справедливость двух импликаций: (1) $\Rightarrow$ (2) и (6) $\Rightarrow$ (1). Первая из этих двух импликаций вытекает из теоремы 1.1. Обратимся к импликации (6) $\Rightarrow$ (1). Заметим, что ранее мы нигде не предполагали счетность группы G. Только сейчас мы будем использовать это ограничение.

Итак, пусть G — счетная простая локально конечная группа и централизаторы всех элементов из G безусловно открыты. Также пусть H — произвольная собственная инертная подгруппа в G. Определим на G групповую топологию с базисом окрестностей единицы, состоящим из пересечений $\bigcap_{x\in F} H^x$, где F пробегает все конечные подмножества из G. Так как $\bigcap_{x\in G} H^x = 1$, то эта топология является хаусдорфовой и в силу того что централизаторы элементов из G безусловно открыты, для любого $g \in G$ найдется конечное подмножество $F \subseteq G$ такое, что $\bigcap_{x\in F} H^x \leqslant \mathrm{C}_G(g)$. Согласно определению инертной подгруппы пересечение $\bigcap_{x\in F} H^x$ соизмеримо с H, и поэтому индекс $|H : \mathrm{C}_H(g)|$ конечен. Значит, H — локально нормальная группа и мы можем воспользоваться леммой 5.2, в силу которой G есть либо знакопеременная группа, либо группа лиева типа.

Если G — группа лиева типа, то $\mathrm{C}_G(F) = 1$ для некоторого конечного подмножества $F \subseteq G$ и, так как централизаторы конечных подмножеств безусловно открыты, единичная подгруппа является безусловно открытой в G. Последнее означает, что единственной хаусдорфовой групповой топологией на G является дискретная топология, а это противоречит лемме 5.3. Следовательно, случай группы лиева типа невозможен и G — знакопеременная группа.

Теорема доказана.

К сожалению, полностью доказать аналог теоремы 5.1 для бесконечных групп произвольной мощности нам не удалось, но некоторые из свойств, указанных в теореме 5.1, остаются характеристическими для бесконечных знакопеременных групп любой мощности.

Теорема 5.2. *Для бесконечной локально конечной простой группы G следующие условия равносильны*:

(1) G — *знакопеременная группа.*

(2) G — DC-*группа.*

(3) G *содержит хотя бы один неединичный* D-*класс.*

(4) *Централизаторы всех элементов сильно скованы в* G.

(5) *Централизатор хотя бы одного неединичного элемента сильно скован.*

Доказательство. Очевидно, нам достаточно доказать лишь одну импликацию (3) $\Rightarrow$ (1), так как импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (5) обсуждались в теореме 5.1.

Итак, пусть G — бесконечная простая локально конечная группа и g^G — неединичный D-класс, т. е. нашлось конечное подмножество $F \subseteq G$, состоящее из элементов неперестановочных с g, такое, что почти каждый элемент из g^G перестановочен хотя бы с одним элементом из F.

Для доказательства условия (1) мы используем характеризацию знакопеременных групп, данную в лемме 5.1. Пусть R — произвольная счетная финитно аппроксимируемая подгруппа из G и $H = \langle R, g, F\rangle$. Счетная подгруппа H согласно лемме 5.4 содержится в счетной простой подгруппе $K \leqslant G$. Так как $F \subseteq K$, то класс g^K удовлетворяет D-условию, т. е. является неединичным D-классом в счетной простой группе K. Воспользовавшись теоремой 5.1, получаем, что K — знакопеременная группа и, в силу леммы 5.1, подгруппа R из K должна быть локально нормальной группой. Таким образом, любая счетная финитно аппроксимируемая подгруппа из G локально нормальна. Снова воспользовавшись леммой 5.1, получаем требуемое заключение: G — знакопеременная группа.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Banakh T., Guran I., Protasov I.** Algebraically determined topologies on permutation groups // Topology Appl. 2012. Vol. 159, no. 9. P. 2258–2268.
2. **Cameron P.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts № 45.)

3. **Dikranjan D., Megrelishvili M.** Minimality conditions in topological groups // Recent Progress in General Topology III/ eds. K. P. Hart, Jan Mill van, P. Simon. Berlin: Springer Verlag, 2013. P. 229–329.
4. **Hall J.I.** Locally finite simple groups of finitary linear transformations // Proc. NATO Advanced Study Institute on Finite and Locally Finite Groups. Istanbul, 1994. P. 147–188.
5. **Hartley B., Zalesskii A.E.** Confined subgroups of simple locally finite groups and ideals of their group rings // J. London Math. Soc. 1997. Vol. 55, no. 2. P. 210–230.
6. **Zalesskii A.E.** Group rings of simple locally finite groups // Proc. NATO Advanced Study Institute on Finite and Locally Finite Groups. Istanbul, 1994. P. 219–246.
7. **Беляев В.В.** Локально конечные простые группы, представимые в виде произведения двух инертных подгрупп // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 4. С. 360–368.
8. **Беляев В.В.** Локальные характеризации бесконечных знакопеременных групп и групп лиевского типа // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 4. С. 369–390.
9. **Беляев В.В.** Топологизация счетных локально конечных групп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 6. С. 613–618.
10. **Беляев В.В.** Прямые суммы финитарных групп подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 45–49.
11. **Беляев В.В.** Сплетения групп финитарных подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 38–43.
12. **Беляев В.В.** Группы финитарных подстановок и топология поточечной сходимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 47–55.
13. **Беляев В.В.** Группы с финитарными классами сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 45–61.
14. **Марков А.А.** О безусловно замкнутых множествах // Мат. сб. 1946. Т. 18, № 1. С. 3–26.

Беляев Виссарион Викторович
Поступила 1.04.2014
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: v.v.belyaev@list.ru