ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.16 + 519.85

# АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ ПОДХОД К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПОКРЫТИЯ ГРАФА НЕСМЕЖНЫМИ ЦИКЛАМИ[1]

**Э. Х. Гимади, И. А. Рыков**

Рассматривается задача $m$-CYCLES COVER о покрытии полного неориентированного графа $m$ вершинно-несмежными циклами экстремального суммарного веса ребер. Представлен общий так называемый TSP-подход к построению приближенного алгоритма решения задачи с использованием решения задачи коммивояжера (TSP). Проведен анализ модификаций алгоритма для задачи Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER на детерминированных входах (весах ребер) в многомерном евклидовом пространстве и для задачи Random MIN $m$-CYCLES COVER на случайных входах UNI$(0,1)$. Показано, что оба алгоритма имеют временную сложность $O(n^3)$ и являются асимптотически точными при числе покрывающих циклов $m = o(n)$ и $m \le n^{1/3}/\ln n$ соответственно.

Ключевые слова: покрытие графа циклами, задача коммивояжера, приближенные алгоритмы, вычислительная сложность, точность аппроксимации, асимптотическая оптимальность, случайные входы, вероятностный анализ.

E. Kh. Gimadi, I. A. Rykov. Asymptotically optimal approach to the approximate solution of several problems of covering a graph by nonadjacent cycles.

We consider the $m$-Cycle Cover Problem, which consists in covering a complete undirected graph by $m$ vertex-nonadjacent cycles with extremal total edge weight. The so-called TSP approach to the construction of an approximate algorithm for this problem with the use of a solution of the traveling salesman problem (TSP) is presented. Modifications of the algorithm for the problems Euclidean Max $m$-Cycle Cover with deterministic instances (edge weights) in a multidimensional Euclidean space and Random Min $m$-Cycle Cover with random instances $UNI(0,1)$ are analyzed. It is shown that both algorithms have time complexity $\mathcal{O}(n^3)$ and are asymptotically optimal for the number of covering cycles $m = o(n)$ and $m \le \frac{n^{1/3}}{\ln n}$, respectively.

Keywords: cycle cover of a graph, Traveling Salesman Problem, approximation algorithms, time complexity, approximation ratio, asymptotic optimality, random instances, probabilistic analysis.

## Введение

Заданы полный неориентированный граф $G(V,E,w)$ на $n$ вершинах и натуральное число $m \le n/3$, где $w\colon E \to \mathbb{R}$ — весовая функция на множестве ребер графа. Далее для веса подграфа $G' \subset G$ введем обозначение $W(G') = \sum\limits_{e\in E(G')} w_e$.

В задаче покрытия графа $m$ циклами (далее $m$-CYCLES COVER) требуется найти такое семейство $\mathcal{C} = \{C_1,\dots,C_m\}$ из $m$ вершинно-несмежных циклов, что покрыты все вершины графа и суммарный вес ребер в покрытии экстремален. Формально задача $m$-CYCLES COVER на минимум (на максимум) записывается следуюшим образом:

$$W(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{m} W(C_k) \to \min\ (\max)$$

при выполнении условий

$$\bigcup_{k=1}^{m} C_k = V, \quad V(C_{k'}) \bigcap V(C_k) = \varnothing \text{ для любых } 1 \le k' < k \le m.$$

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 15-01-00976, 15-01-00462 и 13-07-00070).

По-видимому, впервые такая постановка задачи была рассмотрена в работах М. Ю. Хачая и Е. Д. Незнахиной [4; 5], в которых показано, что задача на минимум $NP$-трудна в сильном смысле как в общем, так и в частных случаях (Metric и Euclidean). Для метрической задачи предложен эффективный 2-приближенный алгоритм, а для задачи покрытия графа в евклидовой плоскости двумя циклами обоснована приближенная полиномиальная схема, находящая приближенное решение с произвольной относительной погрешностью $\varepsilon$ за время $O(n^3(\ln n)^{O(1/\varepsilon)})$.

В настоящей статье представлен общий так называемый TSP-подход к построению приближенного алгоритма решения задачи с использованием решения задачи коммивояжера (TSP). Проведен анализ модификаций алгоритма для задачи Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER на детерминированных входах (весах ребер) в многомерном евклидовом пространстве и для задачи Random MIN $m$-CYCLES COVER на случайных входах UNI$(0,1)$. Показано, что оба алгоритма имеют временную сложность $O(n^3)$ и являются асимптотически точными при числе покрывающих циклов $m = o(n)$ и $m \le n^{1/3}/\ln n$ соответственно.

## 1. TSP-подход к построению приближенного алгоритма $\widetilde{A}$ решения задачи $m$-CYCLES COVER

TSP-подход к приближенному решению задачи $m$-CYCLES COVER заключается в перестроении одноциклической остовной конфигурации решения задачи TSP (если таковую конфигурацию удалось найти) в остовный подграф задачи $m$-CYCLES COVER. Приближенный алгоритм $\widetilde{A}$ решения задачи $m$-CYCLES COVER представим в виде трех последовательных этапов.

**Алгоритм $\widetilde{A}$**

Этап 1. Пусть имеется алгоритм решения задачи TSP на минимум (максимум). На начальном этапе посредством этого алгоритма находим гамильтонов цикл $\widetilde{H}$. Представим этот цикл в виде последовательности вершин $\widetilde{H} = (1, \dots, n)$.

Назовем *допустимым* такое разбиение $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ цикла $\widetilde{H}$ на семейство $\mathcal{S}$, состоящее из несмежных сегментов (цепей) $S_k = (u_{k-1}, u_k]$, $k = 1, \dots, m$, что

$$1 \le u_1 < u_2 < \ldots < u_m \le n \tag{1.1}$$

и каждый сегмент $S_k$ содержит не менее двух ребер; $u_0 = u_m$. Множество всех допустимых наборов $u$ обозначим через $\widehat{U}$.

Ребра $(u_k, u_k{+}1)$ между соседними сегментами разбиения цикла $\widetilde{H}$ назовем *разделяющими.*

Ребра (хорды цикла $\widetilde{H}$) вида $(u_{k-1}+1, u_k)$, $k = 1, \dots, m$, назовем *замыкающми.* Их добавление преобразует семейство сегментов $\mathcal{S}$ в цикловое покрытие графа

$$\mathcal{C} = \bigl\{C_k = (u_{k-1}+1, \dots, u_k),\ k = 1, \dots, m\bigr\}.$$

Этап 2. Решаем вспомогательную задачу

$$f(u) = \sum_{k=1}^{m} \bigl(w(u_{k-1}+1, u_k) - w(u_k, u_k+1)\bigr) \to \min_{u \in \widehat{U}} (\max_{u \in \widehat{U}}) \tag{1.2}$$

по всем допустимым разбиениям (1.1).

Содержательно вспомогательная задача состоит в выборе наилучшего из вариантов отбрасывания $m$ разделяющих ребер цикла и замыкания полученных $m$ цепей соответствующими хордами, поскольку по любому допустимому набору $u = (u_1, \dots, u_m)$ из гамильтонова цикла $\widetilde{H}$ можно получить допустимое цикловое покрытие $\mathcal{C}(\widetilde{H}, u) = \{C_k,\ k = 1, \dots, m\}$ задачи $m$-CYCLES COVER, удалив разделяющие ребра и замкнув получившиеся цепи в циклы

$$C_k = (u_{k-1}+1, \dots, u_k), \quad k = 1, \dots, m. \tag{1.3}$$

Э т а п 3. В качестве приближенного решения основной задачи MIN (MAX) $m$-CYCLES COVER можно принять семейство $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\widetilde{H}, u^*)$ — множество циклов вида (1.3), получаемое по оптимальному решению $u^*$ вспомогательной задачи.

Описание общей схемы алгоритма $\widetilde{A}$ закончено.

З а м е ч а н и е. Точное решение вспомогательной задачи на этапе 2 алгоритма $\widetilde{A}$ может быть найдено стандартным методом динамического программирования за время $O(mn^3)$ при требуемой памяти $O(mn)$. Однако (см. далее) для нас оказалось достаточным использование более быстрых, хотя и приближенных алгоритмов решения этой задачи.

## 2. Определение приближенного алгоритма с оценками и асимптотически точного алгоритма

Пусть $\mathcal{K}_n$ — класс всех примеров массовой задачи дискретной оптимизации, имеющих размерность $n$.

Говорим, что приближенный алгоритм $\mathcal{A}$ на классе $\{\mathcal{K}_n\}$ имеет оценку относительной погрешности $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$, если для каждого входа $I \in \mathcal{K}_n$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{F_{\mathcal{A}}(I) - OPT(I)}{OPT(I)}\right| \leq \varepsilon_{\mathcal{A}}(n).$$

Следуя [1], говорим, что приближенный алгоритм $\mathcal{A}$ на классе $\{\mathcal{K}_n\}$ с заданной на нем вероятностной мерой $\mathbf{Pr}$ имеет оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$ и $\delta_{\mathcal{A}}(n)$, если для произвольного входа $I$ имеет место неравенство

$$\mathbf{Pr}\Big\{\Big|\frac{F_{\mathcal{A}}(I) - OPT(I)}{OPT(I)}\Big| > \varepsilon_{\mathcal{A}}(n)\Big\} \leq \delta_{\mathcal{A}}(n),$$

где $\mathbf{Pr}\{\cdot\}$ — вероятность соответствующего события; $OPT(I)$ $\big(F_{\mathcal{A}}(I)\big)$ — оптимальное (приближенное) значение целевой функции на входе $I$; $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$ — верхняя оценка *относительной погрешности*; $\delta_A(n)$ — верхняя оценка *вероятности несрабатывания* (доля случаев, когда алгоритм $\mathcal{A}$ не гарантирует решения с анонсированной погрешностью).

Ясно, что алгоритм тем лучше, чем меньше оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$ и $\delta_{\mathcal{A}}(n)$. Но особо "хорошими" представляются асимптотически точные (asymptotically optimal) алгоритмы.

Алгоритм $\mathcal{A}$ на классе рассматриваемых задач с детерминированными входами называем *асимптотически точным*, если $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Алгоритм $\mathcal{A}$ на классе рассматриваемых задач со случайными входами называем *асимптотически точным*, если существуют оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) \to 0$ и $\delta_A(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

## 3. Приближенный алгоритм $A_1$ решения задачи Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER

В 1987 г. А. И. Сердюковым в работе [3] представлен асимптотически точный алгоритм решения задачи коммивояжера на максимум в $d$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ (Euclidean MAX TSP). Временная сложность алгоритма — $O(n^3)$, где $n$ — число вершин. В [2] предложена более простая версия с аналогичными оценками.

Естественным обобщением задачи Euclidean MAX TSP является рассматриваемая в работе задача Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER для нахождения остовного подграфа, состоящего ровно из $m$ циклов максимального суммарного веса. При этом можно допустить, что размеры $L_i$ циклов (по числу входящих в них вершин) могут быть как заданными, так и переменными. Задача коммивояжера является частным случаем этой задачи при $m = 1$.

В соответствии с общей схемой, описанной выше, приближенный алгоритм решения задачи MAX $m$-CYCLES COVER основан на построении гамильтонова цикла алгоритмом решения задачи Euclidean MAX TSP [2].

### 3.1. Алгоритм $A_g$ решения задачи Euclidean MAX TSP [2]

Построение гамильтонова цикла алгоритмом $A_g$ отталкивается от максимального взвешенного паросочетания $\mathcal{M}^*$ (мощности $\mu = [n/2]$) и основывается на следующих двух содержательных фактах, верных в любом евклидовом пространстве:

1) среди достаточно большого количества отрезков найдутся два "почти параллельных";

2) два почти параллельных отрезка можно заменить на пару других отрезков с тем же набором концевых точек (крест-накрест), лишь незначительно потеряв в суммарной длине.

Формально эти факты выражаются следующими леммами.

**Лемма 1** [3]. *Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ с фиксированной размерностью $d$ задано произвольное множество из $t$ прямолинейных отрезков. Тогда наименьший угол между двумя отрезками из этого множества ограничен сверху константой $\alpha(d,t)$ такой, что $\alpha(d,t) \to 0$ при $t \to \infty$. При этом*

$$\sin^2 \frac{\alpha(d,t)}{2} \le \frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}, \tag{3.1}$$

*где константа $\gamma_d$ не зависит от числа отрезков.*

**Лемма 2** [2]. *Пусть даны два отрезка (ребра) $I_j = (x_j, y_j)$, $I_i = (x_i, y_i)$ в $\mathbb{R}^d$ и $\alpha \le \pi/2$ — угол между ними. Тогда справедливо неравенство*

$$\max\Big\{w(x_j,x_i)+w(y_j,y_i), w(x_j,y_i)+w(y_j,x_i)\Big\} \ge \max\Big\{w(I_j), w(I_i), \cos\frac{\alpha}{2}\big(w(I_j)+w(I_i)\big)\Big\}. \tag{3.2}$$

После упорядочения ребер паросочетания по убыванию весов последние $t-2$ ребер объявляются легкими, остальные — тяжелыми (число $t$ выбирается специальным образом). Опираясь на первую из приведенных лемм, тяжелые ребра объединяются в $t-1$ цепочек таких, что внутри цепочки каждые два ребра "почти параллельны".

О п р е д е л е н и е. Назовем $\alpha$-набором такую последовательность тяжелых ребер, в которой угол между любыми двумя соседними ребрами не превышает числа $\alpha$.

**Лемма 3.** *Множество $\{I_1, \ldots, I_\mu\}$ ребер можно представить в виде совокупности $(t-1)$ $\alpha(d,t)$-наборов, перемежаемых $(t-2)$ легкими ребрами (угол $\alpha(d,t)$ определен соотношением 3.1). Временная сложность такого представления не превышает $O(\mu t^2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы основано на том, что до тех пор, пока имеется не менее $t$ $\alpha(d,t)$-наборов тяжелых ребер, их первые ребра попадают под действие леммы 1, а значит среди них найдется пара с углом, не превосходящим $\alpha(d,t)$. Тогда эти два набора очевидным образом объединяются в $\alpha(d,t)$-набор и число наборов уменьшается на единицу.

Итак, приведем описание алгоритма $A_g$.

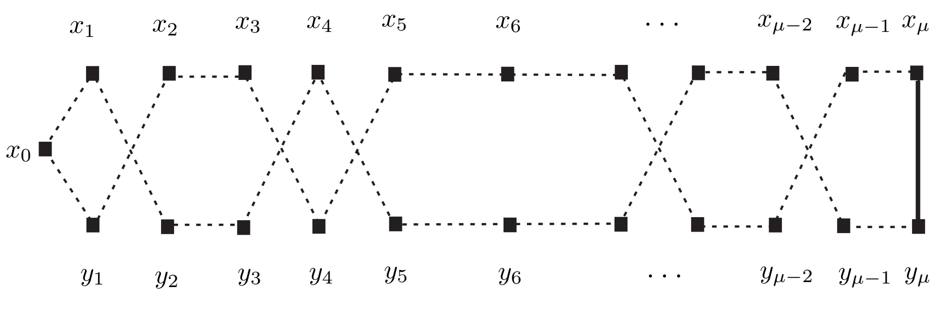


Рис. 1

**Алгоритм $A_g$**

Э т а п 1. Находим паросочетание $M = \{I_1, \ldots, I_\mu\}$ максимального веса, выделяем $(t-2)$ самых легких по весу ребра в $M$. Остальные ребра называем *тяжелыми*.

Э т а п 2. Согласно лемме 2 множество $\{I_1, \ldots, I_\mu\}$ ребер представляем в виде совокупности $(t-1)$ $\alpha(d,t)$-наборов, составленных из тяжелых ребер и перемежаемых $(t-2)$ легкими ребрами.

Э т а п 3. Для каждой пары соседних ребер выбираем один из двух способов замены их на пару ребер с теми же концами — тот, что дает пару с большим суммарным весом. Включаем полученную пару ребер в итоговый цикл $H(A_g)$. При четном $n$ также включаем крайние ребра паросочетания, а при нечетном — одно из них. Скажем $e = (x_1, y_1) \in E$, заменяем на пару ребер $(x_1, x_0), (x_0, y_1)$, где $x_0$ — вершина, не попавшая в паросочетание $M$ (на рис. 1 предлагаемый обход $H(A_g)$ изображен для случая нечетного $n$).

Алгоритм $A_g$ описан полностью.

**Теорема 1** [2]. *Алгоритм* $A_g$ *при* $t^* = \lceil n^{\frac{d-1}{d+1}} \rceil$ *находит асимптотически точное решение задачи* Euclidean MAX TSP.

### 3.2. Алгоритм $A_1$

Итак, выше описан алгоритм построения гамильтонова цикла для задачи Euclidean MAX TSP. В соответствии с общей схемой, решая задачи оптимальной замены $m$ ребер этого цикла на соответствующие хорды, мы получаем алгоритм решения задачи Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER.

Заметим, однако, что для доказательства асимптотической точности алгоритма нам не потребуется выбор оптимального варианта замены ребер на хорды. Достаточно фиксировать некоторый произвольный вариант (т. е. набор индексов вершин $u_k$ с разностью не менее 3), а затем получить еще $n-1$ вариантов последовательным “сдвигом” множества выбрасываемых ребер цикла, т. е. увеличением чисел $u_k$ на одинаковое число $j$, значения которого пробегают от 1 до $n-1$.

В силу этого указанный алгоритм решает не только задачу Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER, но и более общую задачу, в которой длины произвольного подмножества циклов заданы.

Приведем описание алгоритма $A_1$.

**Алгоритм $A_1$**

Э т а п 1. Используя алгоритм $A_g$, построить гамильтонов цикл $\widetilde{H}_1 = H(A_g) = \{e_1, \ldots e_n\}$.

Э т а п 2. Выбрать произвольные $u_i$ с разностью $L_k = u_{k+1} - u_k \geq 3$. Если заданы некоторые из длин циклов $L_i$, выбрать $u_{k+1} = u_k + L_k$.

Э т а п 3. Для каждого $j$ от 0 до $n-1$:

– удалить из $\widetilde{H}_1$ ребра $e_{L_1+j}, e_{L_1+L_2+j}, \ldots, e_{L_1+\cdots+L_m+j}$, получив $m$ цепей;

– замкнуть каждую из полученных цепей в цикл, получив $m$ циклов, имеющих длины $L_1, \ldots, L_m$ соответственно.

Полученное допустимое решение обозначается через $\widetilde{Q}_j$.

Э т а п 4. Выбрать финальное решение $\widetilde{C}_1$ такое, что $w(\widetilde{C}_1) = \max\limits_{0 \leq j < n} w(\widetilde{Q}_j)$.

Алгоритм $A_1$ описан полностью.

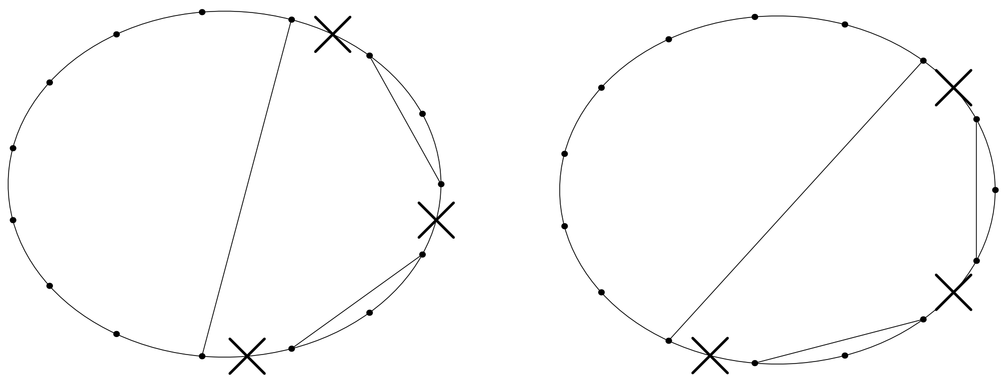

Рис. 2

На рис. 2 представлены 2 из $n$ различных решений $\widetilde{Q}_j$, получающихся циклическим сдвигом удаляемых ребер.

### 3.3. Анализ качества работы алгоритма $A_1$

В ходе анализа будем использовать обозначения алгоритма $A_g$, а именно, $M$ — паросочетание максимального веса, $(t-2)$ — количество легких ребер.

Пусть $W_1(M)$ — вес тяжелых ребер паросочетания. Очевидна справедливость оценки

$$W_1(M) \geq W(M)\Big(1 - \frac{t-2}{\mu}\Big). \tag{3.3}$$

**Лемма 4.** *Вес построенного циклового покрытия $\widetilde{C}_1$ удовлетворяет неравенству*

$$W(\widetilde{C}_1) \geq 2W(M)\Big(1 - \frac{m}{n}\Big)\Big(1 - \frac{t-2}{\mu}\Big)\cos\frac{\alpha(d,t)}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{t-2}$ — номера легких ребер и $K_1, \ldots, K_{t-1}$ — совокупность $\alpha(d,t)$-наборов. При этом $K_i = \{I_j \mid \nu_{i-1} < j < \nu_i\}$, $1 \leq i < t$; $\nu_0 = 0$.

Запишем вес гамильтонова обхода $\widetilde{H}_1$, построенного на этапе 1, в виде $W(H_1) = W(E_1) + W(E_2)$, где $E_1$ — множество ребер обхода $\widetilde{H}_1$ с концевыми вершинами, принадлежащими тяжелым ребрам, $E_2$ — множество ребер обхода $\widetilde{H}_1$, смежных легким ребрам.

С учетом неравенства (3.2) имеем

$$W(E_1) = \sum_{i=1}^{t-1}\sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i-2}\max\Big\{w(x_j,x_{j+1}) + w(y_j,y_{j+1}), w(x_j,y_{j+1}) + w(y_j,x_{j+1})\Big\} + w(I_1) + w(I_m)$$

$$\geq \cos\frac{\alpha(d,t)}{2}\sum_{i=1}^{t-1}\sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i-2}\big(w(I_j) + w(I_{j+1})\big) + w(I_1) + w(I_m)$$

$$\geq \cos\frac{\alpha(d,t)}{2}\Big(2W_1(M) - \sum_{i=1}^{t-2}\big(w(I_{\nu_i-1}) + w(I_{\nu_i+1})\big)\Big),$$

$$W(E_2) = \sum_{i=1}^{t-2}\max\Big\{w(x_{\nu_i-1},x_{\nu_i}) + w(y_{\nu_i-1},y_{\nu_i}), w(x_{\nu_i-1},y_{\nu_i}) + w(y_{\nu_i-1},x_{\nu_i})\Big\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{t-2}\max\Big\{w(x_{\nu_i},x_{\nu_i+1}) + w(y_{\nu_i},y_{\nu_i+1}), w(x_{\nu_i},y_{\nu_i+1}) + w(y_{\nu_i},x_{\nu_i+1})\Big\}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{t-2} \max\{w(I_{\nu_i-1}), w(I_{\nu_i})\} + \sum_{i=1}^{t-2} \max\{w(I_{\nu_i}), w(I_{\nu_i+1})\} \geq \sum_{i=1}^{t-2} \big(w(I_{\nu_i-1}) + w(I_{\nu_i+1})\big).$$

Суммируя $W(E_1)$ и $W(E_2)$, с учетом (3.3) получим

$$W(\widetilde{H}_1) \geq 2W(M)\Big(1 - \frac{t-2}{\mu}\Big)\cos\frac{\alpha(d,t)}{2}.$$

Далее, поскольку в качестве решения $\widetilde{C}_1$ выбирается лучшее из $n$ построенных решений, имеем

$$nW(\widetilde{C}_1) \geq \sum_{j=0}^{n-1} W(\widetilde{Q}_j).$$

Так как решения $\widetilde{Q}_j$ получены циклическим сдвигом оставляемых ребер цикла, соединенных хордами, имеем, что каждое ребро цикла выбрасывается суммарно $m$ раз и $n-m$ раз входит в решение. Таким образом, игнорируя вес хорд, мы получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} W(\widetilde{Q}_j) \geq (n-m)W(\widetilde{H}_1),$$

а значит,

$$W(\widetilde{C}_1) \geq \Big(1 - \frac{m}{n}\Big)W(\widetilde{H}_1).$$

Лемма доказана.

Пусть $C^*$ — оптимальное цикловое покрытие задачи Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER.

**Лемма 5.** $2W(M) \geq \Big(1 - \dfrac{m}{n}\Big)W(C^*)$.

Доказательство. Покажем, что $C^*$ можно перестроить в гамильтонов цикл, потеряв вес не более, чем вес $(m-1)$ самых легких ребер.

Выберем наиболее легкое ребро $e_1 = (x, y)$ из множества ребер $C^*$ и наиболее тяжелое ребро $e_2 = (u, v)$ среди ребер всех циклов, не содержащих $e_1$. Циклы, содержащие $e_1$ и $e_2$, можно объединить в один, заменив ребра $e_1, e_2$ либо на пару ребер $a = (x, u),\ b = (y, v)$, либо на пару ребер $c = (x, v),\ d = (y, u)$. Выберем вариант замены с большей суммой ребер.

В силу неравенства треугольника $w(e_2) \leq w(a) + w(c)$ и $w(e_2) \leq w(b) + w(d)$. Сложив эти неравенства, получим $2w(e_2) \leq w(a) + w(b) + w(c) + w(d)$ и, следовательно, $w(e_2) \leq \max(w(a) + w(b), w(c) + w(d))$. Значит, при замене на лучший из вариантов добавляемые ребра компенсируют вес $e_2$ и потеря веса не превышает $w(e_1)$.

Повторим процедуру объединения пар циклов $m-1$ раз, каждый раз выбирая наиболее легкое ребро и наиболее тяжелое ребро из отличного цикла. Наконец, получив гамильтонов цикл, в случае нечетного $n$ удалим из него самое легкое ребро. Разобьем оставшиеся ребра на два паросочетания $M_1$ и $M_2$.

Поскольку удаляется ребро минимального веса, а также максимального веса из другого цикла, нетрудно видеть, что на каждом $j$-м шаге процедуры объединения среди ребер циклового покрытия сохраняются все ребра, имеющие с $j$-го по $m$-й минимальные веса в $C^*$. Значит, суммарный потерянный вес не превышает веса $m$ наиболее легких ребер $C^*$, следовательно, оценивается сверху величиной $(m/n)\,W(C^*)$. Имеем

$$W(C^*) \leq \frac{m}{n}W(C^*) + W(M_1) + W(M_2) \leq \frac{m}{n}W(C^*) + 2W(M).$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Для веса циклового покрытия* $\widetilde{C}_1$ *справедлива оценка точности*

$$\rho_{\mathcal{A}} = \frac{W(\widetilde{C}_1)}{W(C^*)} \geq 1 - 2\ \frac{m+t-1}{n} - \frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}.$$

Доказательство. С учетом лемм 1, 4 и 5, а также очевидного соотношения $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ имеем

$$\rho_{\mathcal{A}} = \frac{W(\widetilde{C}_1)}{W(C^*)} \geq \Big(1 - \frac{m}{n}\Big)^2\Big(1 - \frac{t-2}{\mu}\Big)\cos\frac{\alpha(d,t)}{2}$$

$$\geq \Big(1 - \frac{m}{n} - \frac{m}{n} - \frac{t-2}{\mu}\Big)\Big(1 - 2\sin^2\frac{\alpha(d,t)}{4}\Big) \geq \Big(1 - 2\frac{m+t-1}{n}\Big)\Big(1 - 2\sin^2\frac{\alpha(d,t)}{4}\Big)$$

$$\geq 1 - 2\frac{m+t-1}{n} - 2\sin^2\frac{\alpha(d,t)}{4} \geq 1 - 2\frac{m+t-1}{n} - \sin^2\frac{\alpha(d,t)}{2} \geq 1 - 2\frac{m+t-1}{n} - \frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}.$$

Предпоследнее неравенство в цепочке следует из $2\sin^2(\varphi/2) = 1 - \cos\varphi \leq 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$, верного для всех $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Лемма доказана.

**Теорема 2.** *В случае* $m = o(n)$ *алгоритм* $A_1$ *при величине параметра* $t^* = \left\lceil n^{\frac{d-1}{d+1}}\right\rceil$ *за время* $O(n^3)$ *находит асимптотически точное решение задачи* Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER.

Доказательство. Подставив величину $t^*$ в оценку точности алгоритма, получим

$$\rho_{\mathcal{A}} \geq 1 - 2\frac{m+t^*-1}{n} - \frac{\gamma_d}{(t^*)^{2/(d-1)}} \geq 1 - 2\frac{m}{n} - 2\ \frac{n^{\frac{d-1}{d+1}}}{n} - \frac{\gamma_d}{n^{2/(d+1)}} = 1 - (2m)n^{-1} - \beta_d n^{-2/(d+1)} \to 1$$

при $n \to \infty$ и $m = o(n)$. При этом константа $\beta_d$ зависит только от размерности пространства.

Временная сложность алгоритма определяется трудоемкостью алгоритма $A_g$ и имеет оценку $O(n^3)$.

Теорема доказана.

## 4. Приближенный алгоритм решения задачи Random MIN $m$-CYCLES COVER на случайных входах UNI$(0,1)$

Предполагаем, что веса ребер полного графа на $n$-вершинном множестве $V$ определены на классе UNI$(0,1)$ случайных входов, состоящих из независимых случайных величин с одинаковой функцией равномерного распределения на отрезке $[0,1]$.

### 4.1. Алгоритм $A_2$

Алгоритм $A_2$ представляет модификацию общего алгоритма $\widetilde{A}$ на минимум применительно к решению задачи Random MIN $m$-CYCLES COVER на случайных входах UNI$(0,1)$. На этапе 1 находим гамильтонов цикл $\widetilde{H}_2$ посредством приближенного асимптотически точного алгоритма решения TSP из работы А. Фриза [6]. На этапе 2 для решения вспомогательной задачи (1.2) используется специальная процедура (алгоритм $A_{p,m}$) на случайном графе.

В качестве отправной конструкции (остовного подграфа полного графа $K_n$), из которой строится гамильтонов цикл $\widetilde{H}_2$, в работе [6] используется 2-фактор минимального веса. Напомним, что 2-фактор — это остовный подграф графа $K_n$, в котором каждая вершина имеет степень 2. Другими словами, это есть семейство вершинно несмежных циклов, покрывающих все вершины графа. Известно, что 2-фактор минимального веса строится за время $O(n^3)$ [8].

Пусть $z_{TSP}$, $z_{2FAC}$, $z_{MST}$ означают веса минимального гамильтонова цикла, минимального 2-фактора и минимального остовного дерева соответственно, а аббревиатура **whp** ("с высокой вероятностью"), используемая в англоязычной литературе, означает, что случайное событие $B_n$ в последовательности $\{B_n\}$ происходит с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$.

Главным результатом работы [6] является

**Теорема 3** [6, теорема 1].

$$z_{TSP} - z_{2FAC} = o(1) \quad \textbf{whp}. \tag{4.1}$$

*Более того, за время* $O(n^3)$ **whp** *строится тур (гамильтонов цикл* $\widetilde{H}_2$*) длиной*

$$W(\widetilde{H}_2) = z_{2FAC} + o(1).$$

Еще ранее А. Фризом [7] было доказано, что **whp** $z_{MST} \geq 1.202$, откуда с учетом очевидных неравенств $z_{TSP} \geq z_{2FAC}$, $z_{TSP} \geq z_{MST}$ и формулы (4.1) имеем

$$\frac{W(\widetilde{H}_2)}{z_{TSP}} = \frac{z_{2FAC} + o(1)}{z_{TSP}} \leq 1 + \frac{o(1)}{z_{TSP}} \leq 1 + \frac{o(1)}{z_{MST}} \leq 1 + \frac{o(1)}{1.202} = 1 + o(1) \quad \textbf{whp}, \tag{4.2}$$

т. е. алгоритм, представленный в работе [6], за время $O(n^3)$ строит асимптотически точное решение задачи MIN TSP.

## 4.2. Приближенный алгоритм решения вспомогательной задачи (1.2) на случайном графе

Пусть $p$ — параметр, $0 \leq p \leq 1$. Обозначим через $G'_p = (V, E', w')$ подграф графа $G = (V, E, w)$, где $E' = \{e \in E \setminus E(\widetilde{H}_2) \mid w'(e) = w(e) \leq p\}$. Ясно, что в случайном графе $G'_p$ на входах $\mathrm{UNI}(0,1)$ произвольное ребро $e$ принадлежит множеству $E'$ с вероятностью $p$.

Вспомогательную задачу (1.2) решаем (вообще говоря, приближенно) посредством процедуры $A_{p,m}$ с параметрами

$$p = \frac{1}{n^{1/3}}, \quad m \leq \frac{n^{1/3}}{\ln n}. \tag{4.3}$$

Обозначим через $q = \lfloor n/m \rfloor$, $\nu = n - qm$, $\{S_1, \ldots, S_m\}$ — семейство несмежных сегментов (цепей) $(u_{k-1}, u_k]$ в гамильтоновом цикле $\widetilde{H}_2$, где

$$u_k = \begin{cases} kq, & \text{если } 1 \leq k < m - \nu, \\ (k+1)q, & \text{если } m - \nu \leq k \leq m, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Внутреннее ребро $e_k = (i, i+1)$ в сегменте $S_k$ назовем *хорошим*, если случайный граф $G'_p$ содержит пару ребер $(u_{k-1}+1, i+1)$ и $(i, u_k)$.

Процедура $A_{p,m}$ состоит в выборе $m$ хороших ребер (по одному в каждом сегменте). Если такие внутренние ребра не нашлись, то имеет место несрабатывание алгоритма $A_2$. В противном случае использование соответствующих ребер-хорд цикла $\widetilde{H}_2$ дает покрытие графа $m$ циклами.

## 4.3. Анализ работы процедуры $A_{p,m}$

Нетрудно видеть, что процедура $A_{p,m}$ выполняется за линейное время.

**Лемма 7.** *В каждом из* $m$ *сегментов* $S_k$, $k = 1, \ldots, m$, **whp** *имеется хорошее ребро.*

Доказательство. Очевидно, что внутреннее ребро сегмента $S_k$ является хорошим с вероятностью $p^2$ и плохим с вероятностью $1-p^2$. Число внутренних ребер в сегменте не менее $q-3$. Поэтому вероятность отсутствия хорошего ребра в фиксированном сегменте — не более $(1-p^2)^{q-3}$, а вероятность найти хорошее ребро в каждом из $m$ сегментов — не менее $\big(1-(1-p^2)^{q-3}\big)^m \geq 1-m(1-p^2)^{q-3}$. Отсюда для оценки вероятности отсутствия хороших ребер в каждом из $m$ сегментов имеем

$$m\,(1-p^2)^{q-3} \leq m\,\exp\big(-(q-3)p^2\big) \leq m\exp\Big(-\Big(\frac{n}{m}-3\Big)p^2\Big) = m\,\exp\Big(-\frac{np^2}{m}\big(1-o(1)\big)\Big)$$

$$\leq \frac{n^{1/3}}{\ln n}\,\exp\Big(-\frac{n\ln n}{n^{1/3}n^{2/3}}\big(1-o(1)\big)\Big) = \frac{n^{1/3}}{\ln n}\,\frac{1}{n^{1-o(1)}} = \frac{1}{\ln n}\,\frac{1}{n^{2/3-o(1)}} \to 0$$

при $n\to\infty$.

Лемма доказана.

**Лемма 8.** *Вес добавленных (замыкающих) ребер имеет величину* $o(1)$.

Доказательство. Поскольку добавляются ребра-хорды из случайного графа $G'_p$, а их вес по определению не превышает $p$, то суммарный вес добавленных ребер — не более

$$mp \leq \frac{n^{1/3}}{\ln n}\,\frac{1}{n^{1/3}} = \frac{1}{\ln n} \to 0$$

при $n\to\infty$.

Лемма доказана.

### 4.4. Основной результат о качестве работы алгоритма $A_2$

**Теорема 4.** *Алгоритм* $A_2$ *с использованием вспомогательной процедуры* $A_{p,m}$ *с параметрами* (4.3) *решает задачу* Random MIN $m$-CYCLES COVER *асимптотически точно за время* $O(n^3)$.

Доказательство. Поскольку вспомогательный алгоритм реализуется за линейное время, то временная сложность алгоритма $A_2$ предопределена временем решения задачи отыскания гамильтонова цикла в работе [6], а именно величиной $O(n^3)$.

Найденное цикловое покрытие $\widetilde{C}$ состоит, во-первых, из семейства сегментов $S_1,\ldots,S_m$ гамильтонова цикла $\widetilde{H}_2$ без $m$ “хороших ребер”, выявленных посредством процедуры $A_{p,m}$. Во-вторых, это покрытие включает в себя $2m$ добавленных (замыкающих) ребер-хорд вида $(u_{k-1}+1, i+i)$ и $(i,u_k)$, $k=1,\ldots,m$.

С вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, с учетом лемм 7 и 8, а также соображений, упомянутых в обосновании цепочки соотношений (4.2), имеем

$$\frac{W(\widetilde{C})}{W(C^*)} \leq \frac{W(\widetilde{H}_2)+mp}{z_{2FAC}} \leq \frac{z_{2FAC}+o(1)+mp}{z_{2FAC}}$$

$$= 1+\frac{o(1)}{z_{2FAC}} \leq 1+\frac{o(1)}{z_{MST}} \leq 1+\frac{o(1)}{1.202} = 1+o(1) \quad \textbf{whp}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что результаты работы алгоритма $A_{p,m}$ могут быть улучшены посредством использования операции “циклического сдвига”, описанной в подразд. 3.2.

## 5. Заключение

В настоящей статье рассматривалась задача $m$-CYCLES COVER — покрытие полного неориентированного графа $m$ вершинно-несмежными циклами экстремального суммарного веса ребер. На основе так называемого TSP-подхода к решению задачи $m$-CYCLES COVER представлены два приближенных алгоритма с полиномиальной временной сложностью. Алгоритм $A_1$ решает задачу Euclidean MAX $m$-CYCLES COVER на детерминированных входах (весах ребер) в многомерном евклидовом пространстве. Показано, что этот алгоритм имеет временную сложность $O(n^3)$ и является асимптотически точным при числе покрывающих циклов $m = o(n)$. Алгоритм $A_2$ для задачи Random MIN $m$-CYCLES COVER на случайных входах UNI$(0, 1)$ реализуется за время $O(n^3)$ и при $m \leq n^{1/3}/\ln n$ строит асимтотически точное решение.

Для дальнейших исследований представляет интерес получение аналогичных результатов решения задач $m$-CYCLES COVER как на минимум, так и на максимум на классах входных данных, отличных от представленных в данной статье.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 31. С. 35–42.
2. **Гимади Э.Х.** Новая версия асимптотически точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера // Методы оптимизации и их приложения: тр. XII Байкал. междунар. конф. Т. 1. Иркутск, 2001. С. 117–124.
3. **Сердюков А.И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Управляемые системы. Новосибирск, 1987. Вып. 27. С. 79–87.
4. **Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д.** Полиномиальная приближенная схема для евклидовой задачи о цикловом покрытии графа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 297–311.
5. **Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д.** Аппроксимируемость задачи о минимальном по весу цикловом покрытии графа // Докл. РАН. 2015. Т. 461, № 6. С. 644–649.
6. **Frieze A.M.** On random symmetric travelling salesman problems // Math. Oper. Res. 2004. Vol. 29, № 4. P. 878–890.
7. **Frieze A.M.** On the value of a random minimum spanning tree problem // Discrete Appl. Math. 1985. Vol. 10, № 1. P. 47–56.
8. **Gabow H.N.** An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th Annual ACM Simposium on Theory of Computing. N.Y., 1983. P. 448–456.

Поступила 10.05.2015

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. научн. сотрудник
Институт математики СО РАН
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Рыков Иван Александрович
канд. физ.-мат. наук
научн. сотрудник
Институт математики СО РАН
e-mail: rykov@ngs.ru