ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.556

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ХЬЮИТТОВСКИХ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕТКАМИ ПОДАЛГЕБР ПОЛУПОЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С MAX-СЛОЖЕНИЕМ[1]

Е. М. Вечтомов, В. В. Сидоров

Рассматривается решетка $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ подалгебр полуполя $U^{\vee}(X)$ всех непрерывных положительных функций на топологическом пространстве X. Топологическое пространство называется хьюиттовским, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени числовой прямой $\mathbb{R}$. Основным результатом работы является доказательство определяемости любого хьюиттовского пространства X решеткой $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$.

Ключевые слова: полуполе непрерывных функций, подалгебра, решетка подалгебр, изоморфизм, хьюиттовское пространство, max-сложение.

E. M. Vechtomov, V. V. Sidorov. Definability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras of semifields of continuous positive functions with max-plus.

The lattice $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ of subalgebras of the semifield $U^{\vee}(X)$ of all continuous positive functions defined on a topological space X is considered. A topological space is said to be a Hewitt space if it is homeomorphic to a closed subspace of a Tychonoff power of the real line $\mathbb{R}$. The main result of the paper is the proof of the fact that any Hewitt space X is determined by the lattice $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$.

Keywords: semifield of continuous functions, subalgebra, lattice of subalgebras, isomorphism, Hewitt space, max-addition.

Введение

Прежде чем сформулировать основной результат работы и перейти к его доказательству, введем ряд определений и обозначений.

Под *полукольцом* мы понимаем алгебраическую систему $\langle S,+,\cdot,0\rangle$, в которой $\langle S,+,0\rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения и $0\cdot s=s\cdot 0=0$ для всех $s\in S$. Коммутативное полукольцо, отличное от кольца, каждый ненулевой элемент которого обратим, называется *полуполем с нулем.* Легко показать, что в любом полуполе S с нулем сумма ненулевых элементов отлична от 0, поэтому множество $S\backslash\{0\}$ с теми же операциями сложения и умножения образует алгебру, которую будем называть *полуполем.*

Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\mathbb{R},\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{P}$ — множества всех действительных, неотрицательных действительных и положительных действительных чисел соответственно. Множество всех непрерывных положительных действительнозначных функций на X с поточечными операциями max-*сложения* $\vee$, где

$$(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}\ \text{для всех}\ x\in X,$$

и умножения функций образует полуполе, обозначаемое через $U^{\vee}(X)$.

Подалгеброй полуполя $U^{\vee}(X)$ назовем произвольное его подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и выдерживающее умножение на константы из $\mathbb{P}$. Множество всех подалгебр полуполя $U^{\vee}(X)$ с добавленным пустым множеством относительно включения $\subseteq$ (символ $\subset$ означает у нас строгое включение) образует решетку $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект 1.1375.2014/K).

Под *окрестностью точки* топологического пространства X будем понимать любое содержащее ее открытое множество. Через $\overline{F}$ будем обозначать замыкание множества $F \subseteq X$, а через F° — его внутренность. Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \in X \backslash F$ найдется непрерывная действительнозначная функция λ или, что равносильно, $\lambda \in U^{\vee}(X)$, такая, что $\lambda(F) = \{a\}$ и $\lambda(x) = b$, где $a \neq b$. Тихоновские пространства — это, с точностью до гомеоморфизма, подпространства тихоновских степеней пространства $\mathbb{R}$. Топологическое пространство X называется *хьюиттовским* (или *вещественно полным*, или *функционально замкнутым*), если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$.

Целью статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Любое хьюиттовское пространство X определяется решеткой* $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$.

Уточним, что значит "топологическое пространство определяется ассоциированной с ним алгебраической системой". Говорят, что пространство X из класса K топологических пространств определяется алгебраической системой $A(X)$, если для любого пространства $Y \in K$ изоморфизм систем $A(X)$ и $A(Y)$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y.

Одной из первых теорем определяемости служит результат И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [8] об определяемости компактов X кольцом $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций, заданных на X. Этот результат послужил источником и образцом для многочисленных обобщений и углублений как в сторону расширения класса определяемых пространств с класса компактов, так и в сторону ослабления структуры кольца $C(X)$ и привлечения новых функционально-алгебраических объектов $A(X)$, связанных с X (см. обзоры [2; 3]).

В 1997 г. Е. М. Вечтомовым [4] была доказана определяемость любого хьюиттовского пространства X решеткой $\mathbb{A}(C(X))$ подалгебр кольца $C(X)$, а в 2010 г. он и В. В. Сидоров [5] перенесли этот результат для решеток подалгебр $\mathbb{A}(C^{+}(X))$ и $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ полуколец $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$ непрерывных неотрицательных функций с обычным сложением $+$ и max-сложением $\vee$ соответственно.

Тесным образом с полукольцами $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$ связаны полуполя $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$, образованные подмножествами положительных функций. В связи с развитием их теории возникла гипотеза о том, что всякое хьюиттовское пространство X определяется каждой из решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$. Таким образом, этой работой мы продолжаем исследование [5] и доказываем гипотезу для решеток $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$. Случай $\mathbb{A}(U(X))$ пока открыт.

Отметим, что ограничение хьюиттовскими пространствами при решении задач определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций совершенно естественно и мотивируется тем, что для любого топологического пространства X найдутся [11, теоремы 3.9 и 8.7] тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца и полуполя (как с обычным сложением, так и с max-сложением).

Приступим к д о к а з а т е л ь с т в у теоремы. Вначале разберем случай компактов, после чего сведем к нему общий случай хьюиттовских пространств. Ключевую роль в рассуждениях будут играть однопорожденные подалгебры.

Все рассматриваемые далее пространства считаем тихоновскими.

1. Однопорожденные подалгебры

Наименьшую подалгебру A полуполя $U^{\vee}(X)$, содержащую функцию f, назовем *однопорожденной* и обозначим через $\langle f \rangle$. Она состоит из всевозможных ненулевых многочленов из $\mathbb{R}^{+}[f]$ без свободного члена (с операциями мах-сложения и умножения). Через $[f]$ обозначим подалгебру $\langle f \rangle \vee \mathbb{P}$, которая образована ненулевыми многочленами из $\mathbb{R}^{+}[f]$. Для обозначения коэффициентов многочленов будем использовать (возможно) индексированные буквы a, b и c.

Лемма 1. *Для произвольной функции $f \in U^{\vee}(X)$, для которой $1 \in \operatorname{Im} f$, имеем*

$$f = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n \Longrightarrow a_1 = 1 \text{ или } f = 1.$$

Доказательство. Поскольку $1 \in \operatorname{Im} f$, $a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1$. Значит, если $a_1 < 1$, то $(a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n)(x) = f(x)$ равносильно $f(x) = 1$. □

Будем говорить, что в решетке имеется *решеточная характеризация* некоторого свойства, если данное свойство можно описать в терминах этой решетки.

Докажем, что в $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ имеется решеточная характеризация подалгебры $\mathbb{P}$.

Предложение 1. *Подалгебра $\mathbb{P}$ служит единственным атомом решетки $\mathbb{A}(U^{\vee}(X)$.*

Доказательство. Очевидно, в подалгебре $\mathbb{P}$ нет собственных подалгебр. Поэтому она является атомом решетки $\mathbb{A}(U^{\vee}(X)$. Далее, если A — минимальная подалгебра и $f \in A$, то $\langle f \rangle = A = \langle f^2 \rangle$. Поэтому функция f имеет вид $a_2 f^2 \vee \ldots \vee a_{2n} f^{2n}$ (можно считать, что $1 \in \operatorname{Im} f$). Тогда $f = 1$ по лемме 1. Значит, $A = \mathbb{P}$. □

Элемент A решетки называется $\vee$-*неразложимым*, если из $A = B \vee C$ следует $A = B$ или $A = C$. Решетка называется *полной*, если любое непустое подмножество ее элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Элемент A полной решетки называется *компактным*, если для любого непустого семейства $(A_i)_{i \in J}$ ее элементов $A \leqslant \bigvee_{j \in J} A_j$ влечет $A \leqslant \bigvee_{i \in I} A_i$ для некоторого конечного подмножества $I \subseteq J$.

Поскольку в решетке $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ есть наибольший элемент (полуполе $U^{\vee}(X)$) и всякое непустое ее подмножество имеет точную нижнюю грань (пересечение любого числа подалгебр полуполя $U^{\vee}(X)$ будет подалгеброй или пусто), согласно [9, теорема 19] она является полной.

Дадим решеточную характеризацию однопорожденных подалгебр.

Предложение 2. *Однопорожденные подалгебры полуполя $U^{\vee}(X)$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решетки $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$.*

Доказательство. Установим $\vee$-неразложимость однопорожденных подалгебр.

Допустим, это не так и нашлась подалгебра $\langle f \rangle$ такая, что $\langle f \rangle = A \vee B$ для некоторых подалгебр $A, B \subset \langle f \rangle$. Ясно, что $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$. Поэтому можно считать, что $|\operatorname{Im} f| \geqslant 2$ и $1 \in \operatorname{Im} f$.

Функция f как элемент подалгебры $A \vee B$ имеет вид

$$f = P_0(f) \vee Q_0(f) \vee P_1(f) Q_1(f) \vee \ldots \vee P_m(f) Q_m(f) = a_1 f \vee a_2 f^2 \vee \ldots, \tag{1.1}$$

где $P_i \in A$ и $Q_i \in B$ — многочлены от f без свободного члена. Произведение двух многочленов без свободного члена является нулевым многочленом или многочленом, младшая степень которого не меньше второй. Следовательно, $P_1(f)Q_1(f) \vee \ldots \vee P_m(f)Q_m(f) = b_2 f^2 \vee b_3 f^3 \vee \ldots$. Кроме того, по лемме 1 в равенстве (1.1) $a_1 = 1$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$P_0 = f \vee c_2 f^2 \vee \ldots \vee c_n f^n.$$

Далее, поскольку $P_0 \in A$ и $A \subset \langle f \rangle$, то $P_0 \neq f$. Отсюда $P_0(f(x)) > f(x)$ в некоторой точке $x \in X$, что противоречит (1.1). Значит, однопорожденные подалгебры $\vee$-неразложимы. Докажем их компактность.

Пусть $\langle f \rangle \subseteq \bigvee_{j \in J} A_j$ для некоторого семейства подалгебр $\{A_j\}_{j \in J}$. Тогда $f \in A_{j_0}$ для некоторой подалгебры $A_{j_0}, j_0 \in J$. Отсюда $\langle f \rangle \subseteq A_{j_0}$, т. е. подалгебра $\langle f \rangle$ компактна.

Обратно, пусть подалгебра A — $\vee$-неразложимый компактный элемент решетки $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$. Поскольку $A = \bigvee_{f \in A} \langle f \rangle$, в силу компактности A

$$A = \langle f_1 \rangle \vee \ldots \vee \langle f_n \rangle$$

для некоторых $f_1, \dots, f_n \in A$. Без ограничения общности можно считать, что $n \in \mathbb{N}$ принимает наименьшее возможное значение. Тогда в предположении $n \geqslant 2$ получаем

$$A = \langle f_1 \rangle \vee (\langle f_2 \rangle \vee \dots \vee \langle f_n \rangle).$$

Отсюда $A = \langle f_1 \rangle$ или $A = \langle f_2 \rangle \vee \dots \vee \langle f_n \rangle$ в силу $\vee$-неразложимости A, что противоречит минимальности n. Значит, $n = 1$, т. е. подалгебра A однопорожденная. □

Поскольку $[f] = \langle f \rangle \vee \mathbb{P}$, из предложений 1 и 2 получаем

Следствие 1. *Имеется решеточная характеризация подалгебр $[f]$, где $f \in U^\vee(X)$.*

2. Доказательство теоремы для компактов

В этом разделе все пространства считаем компактами.

Для произвольной функции $f \in U^\vee(X)$ через $\operatorname{Max} f$ и $\operatorname{Min} f$ обозначим замкнутые подмножества компакта X, на которых функция $f \in U^\vee(X)$ принимает свое наибольшее $\max f$ и наименьшее $\min f$ значения соответственно. Функцию f будем называть *нормированной*, если $\max f = 1$. Ясно, что если функции f и $g \in [f]$ отличны от констант, то $\operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g$, поскольку функция g имеет вид $a_0 \vee a_1 f \vee \dots \vee a_n f^n$ и $\operatorname{Max} a_i f^i = \operatorname{Max} f$ при $a_i > 0, i \geqslant 1$.

Следующая лемма служит основой всех дальнейших рассуждений.

Лемма 2. *Для произвольных подалгебр $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$, отличных от $\mathbb{P}$, имеется решеточная характеризация равенства* $\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} g = X$, *а именно*

$$\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} g = X \iff \mathbb{P} \subseteq \langle u \rangle \vee \langle v \rangle$$

для всех $\langle u \rangle \subseteq [f]$, $\langle v \rangle \subseteq [g]$.

Доказательство. Функции f, g, u и v будем считать нормированными.

Пусть $\langle u \rangle \subseteq [f]$, $\langle v \rangle \subseteq [g]$ и $\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} g = X$. Если $u = 1$ или $v = 1$, то $1 = u \vee v$. Иначе $\operatorname{Max} u = \operatorname{Max} f$ и $\operatorname{Max} v = \operatorname{Max} g$, а потому $1 = u \vee v$. В любом случае $\mathbb{P} \subseteq \langle u \rangle \vee \langle v \rangle$.

Обратно, рассуждая от противного, выберем точку $x \in X \backslash (\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} g)$ и положим $u = f \vee r$ и $v = g \vee r$, где $r = f(x) \vee g(x)$. Ясно, что функции $u \in [f]$ и $v \in [g]$ нормированы и отличны от констант. По условию $1 \in \langle f \vee r \rangle \vee \langle g \vee r \rangle$, т. е. 1 представима в виде

$$1 = a_{10}(f \vee r) \vee a_{01}(g \vee r) \vee \dots \vee a_{mn}(f \vee r)^m (g \vee r)^n. \tag{2.2}$$

В точке x равенство (2.2) принимает вид $1 = a_{ij} r^{i+j}$ для некоторых i, j, где, для определенности, $i \geqslant 1$. Тогда для любой точки $y \in \operatorname{Max} f$ имеем

$$a_{ij}(1 \vee r)^i (g(y) \vee r)^j \geqslant a_{ij} r^j = 1/r^i > 1,$$

что противоречит (2.2). Значит, такую точку x выбрать нельзя, т. е. $\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} g = X$. □

Отметим, что в лемме 2 существенным образом используется наличие решеточной характеризации подалгебры $\mathbb{P}$ и подалгебр вида $\langle f \rangle$ или $[f]$ (см. предложения 1 и 2 и следствие 1). Вообще, ситуация, когда для решеточной характеризации какого-либо свойства используются свойства, решеточная характеризация которых была получена ранее, будет встречаться неоднократно.

Лемма 3. *Для произвольных подалгебр $\langle f_1 \rangle, \dots, \langle f_n \rangle$, отличных от $\mathbb{P}$, имеем*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Max}^\circ f_i \neq \varnothing \iff \operatorname{Max} f_i \cup \operatorname{Max} g = X$$

для некоторой подалгебры $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$ и всех $i = 1, \dots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Max}^{\circ} f_i \neq \varnothing$, где $\mathrm{Max}^{\circ} f_i$ — внутренность множества $\mathrm{Max}\, f_i$. Зафиксируем точку $x \in V$. После чего воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем функцию $g \in U^{\vee}(X)$ такую, что $g = 1$ на $X \backslash V$ и $g(x) = 1/2$. Тогда $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$ и $\mathrm{Max}\, f_i \cup \mathrm{Max}\, g = X$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Обратно, поскольку $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$ и $\mathrm{Max}\, f_i \cup \mathrm{Max}\, g = X$ для всех $i = 1, \ldots, n$, открытое множество $X \backslash \mathrm{Max}\, g$ не пусто и включено в $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Max}^{\circ} f_i$. □

Согласно лемме 2 условие $\mathrm{Max}\, f_i \cup \mathrm{Max}\, g = X$ леммы 3 является чисто решеточным. Поэтому из леммы 3 получаем

Следствие 2. *Для произвольной системы $\{\langle f_i \rangle\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от $\mathbb{P}$, имеется решеточная характеризация следующего условия: множества $\mathrm{Max}^{\circ} f_i$ не пусты и образуют центрированное семейство $\{\mathrm{Max}^{\circ} f_i\}_{i \in I}$.*

Перейдем к финальной стадии доказательства теоремы. Для этого с каждой точкой компакта свяжем некоторую систему подалгебр решетки. Затем покажем, что все такие системы подалгебр имеют решеточную характеризацию, причем факт принадлежности двух таких систем одной и той же точке также чисто решеточный.

Предложение 3. 1) *Для любой точки $x \in X$, где $|X| \geqslant 2$, найдется максимальная система $S = \{\langle f_i \rangle\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от $\mathbb{P}$, такая, что семество $\{\mathrm{Max}^{\circ} f_i\}_{i \in I}$ центрировано, причем $\bigcap_{i \in I} \mathrm{Max}\, f_i = \{x\}$.*

2) *Для любой максимальной системы $S = \{\langle f_i \rangle\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от $\mathbb{P}$, с центрированным семейством $\{\mathrm{Max}^{\circ} f_i\}_{i \in I}$ выполняются следующие свойства:*

2.1) *$\bigcap_{i \in I} \mathrm{Max}\, f_i = \{x\}$ для некоторой точки $x \in X$;*

2.2) *$x \in \overline{\mathrm{Max}^{\circ} f_i}$ для всех $i \in I$;*

2.3) *если $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$ и $x \in \mathrm{Max}^{\circ} f$, то $\langle f \rangle \in S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и с каждой точкой $y \in X$, отличной от x, свяжем некоторую подалгебру $\langle f_y \rangle$ такую, что $x \in \mathrm{Max}^{\circ} f_y$, но $y \notin \mathrm{Max}\, f_y$. После чего рассмотрим множество M всевозможных систем $\{\langle f_j \rangle\}_{j \in J}$ подалгебр, отличных от $\mathbb{P}$, каждая из которых обладает свойством центрированности семейства $\{\mathrm{Max}^{\circ} f_j\}_{j \in J}$ и включает систему $\{\langle f_y \rangle\}_{y \in X,\, y \neq x}$. Множество M не пусто (содержит $\{\langle f_y \rangle\}_{y \in X,\, y \neq x}$) и, будучи упорядочено по включению, индуктивно, так как мажорантой любой цепи систем подалгебр из M будет их объединение, очевидно, обладающее свойством центрированности и включающее $\{\langle f_y \rangle\}_{y \in X,\, y \neq x}$. По принципу Куратовского — Цорна это означает существование в M максимальной системы подалгебр $S = \{\langle f_i \rangle\}_{i \in I}$.

Далее, семейство замкнутых множеств $\{\mathrm{Max} f_i\}_{i \in I}$ компакта X центрировано (в силу центрированности $\{\mathrm{Max}^{\circ} f_i\}_{i \in I}$), а потому имеет непустое пересечение. Кроме того,

$$\bigcap_{i \in I} \mathrm{Max}\, f_i \subseteq \bigcap_{y \in X,\, y \neq x} \mathrm{Max}\, f_y = \{x\}. \tag{2.3}$$

Значит, $\bigcap_{i \in I} \mathrm{Max}\, f_i = \{x\}$.

2) Поскольку семейство $\{\mathrm{Max}^{\circ} f_i\}_{i \in I}$ центрировано, то центрированным будет и семейство замкнутых множеств $\{\mathrm{Max} f_i\}_{i \in I}$ компакта X. Следовательно, пересечение $\bigcap_{i \in I} \mathrm{Max}\, f_i$ не пусто. Выберем произвольную точку x из пересечения и докажем, что произвольная ее окрестность $U_x \neq X$ пересекается с каждым множеством $\mathrm{Max}^{\circ} f_i, i \in I$. Отсюда, в частности, получим утверждения пп. 2.2) и 2.3) ($\mathrm{Max}^{\circ} f \cap \mathrm{Max}^{\circ} f_i \neq \varnothing$ для всех $i \in I$, а потому $\langle f \rangle \in S$ в силу максимальности S).

Предположим обратное, т. е. $U_x \cap \mathrm{Max}^{\circ} f_i = \varnothing$ для некоторой подалгебры $\langle f_i \rangle \in S$. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем нормированную функцию $f \in U^{\vee}(X)$ такую, что $f = 1$ на $X \backslash U_x$ и $f(x) = 1/2$. Тогда $\mathrm{Max}^{\circ} f_i \subseteq \mathrm{Max}^{\circ} f$, а потому добавление к S

подалгебры $\langle f\rangle \neq \mathbb{P}$ не нарушает свойство центрированности. Отсюда $\langle f\rangle \in S$ в силу максимальности S. Кроме того, $x \notin \bigcap_{i\in I} \operatorname{Max} f_i$, так как $x \notin \operatorname{Max} f$; противоречие. Значит, любая окрестность точки x пересекается с каждым множеством $\operatorname{Max}^\circ f_i, i \in I$.

Наконец, заметим, что в силу п. 2.3) для любой точки $y \neq x$ подалгебра $\langle f_y\rangle$ (в обозначениях п. 1)) лежит в S, т. е. верно соотношение (2.3). Пункт 2.1) доказан. □

Следствие 2 показывает, что множество всевозможных систем подалгебр (см. предложение 3) имеет решеточную характеризацию. Объявим две такие системы S и S' *эквивалентными,* если они отвечают одной и той же точке:

$$S \sim S' \Longleftrightarrow \bigcap_{\langle f\rangle\in S} \operatorname{Max} f = \bigcap_{\langle f\rangle\in S'} \operatorname{Max} f.$$

Наша ближайшая цель — доказать, что отношение $\sim$ имеет решеточную характеризацию.

Для произвольного множества $A \subseteq X$ через M_A обозначим подалгебру

$$M_A = \{f \in U^\vee(X)\colon A \subseteq \operatorname{Max} f\}.$$

Лемма 4. *Пусть $|X| \geqslant 2$. Тогда для любых замкнутых множеств A и B имеем*

$$A \cap B = \varnothing \Longleftrightarrow M_A \vee M_B = U^\vee(X).$$

Доказательство. Пусть $M_A \vee M_B = U^\vee(X)$. Тогда $A \cap B \subseteq \operatorname{Max} f$ для любой функции $f \in U^\vee(X)$, что при $|X| \geqslant 2$ возможно лишь в случае $A \cap B = \varnothing$.

Обратно, пусть $A \cap B = \varnothing$. Докажем, что любую функцию $f \in U^\vee(X)$ можно представить в виде gh, где $g \in M_A$ и $h \in M_B$. Отсюда, в частности, будет следовать, что $M_A \vee M_B = U^\vee(X)$.

Функцию f будем считать нормированной. Воспользуемся тем, что компакт X является нормальным пространством, и выберем нормированную функцию $\lambda \in U^\vee(X)$ такую, что $\lambda = 1$ на A и $\lambda = \min f$ на B. Положим $g = f \vee \lambda$ и $h = f/(f \vee \lambda)$. Тогда $g \in M_A, h \in M_B$ и $f = gh$. □

Следующая лемма использует результат леммы 2 и содержит решеточную характеризацию подалгебр $M_{\overline{\operatorname{Max}^\circ f}}, \operatorname{Max}^\circ f \neq \varnothing$ (условие $\operatorname{Max}^\circ f \neq \varnothing$ является решеточным по следствию 2).

Лемма 5. *Для произвольных подалгебр $\langle f\rangle \neq \mathbb{P}, \operatorname{Max}^\circ f \neq \varnothing$ и $\langle g\rangle$ имеем*

$$g \in M_{\overline{\operatorname{Max}^\circ f}} \Longleftrightarrow \operatorname{Max} g \cup \operatorname{Max} h = X$$

для всех подалгебр $\langle h\rangle$ таких, что $\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} h = X$.

Доказательство. Функции f, g и h будем считать нормированными.

Пусть подалгебра $\langle g\rangle$ такова, что $\overline{\operatorname{Max}^\circ f} \subseteq \operatorname{Max} g$. Докажем, что $\operatorname{Max} g \cup \operatorname{Max} h = X$ для любой подалгебры $\langle h\rangle$ со свойством $\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} h = X$. Рассуждая от противного, выберем точку $x \in \operatorname{Max} f \backslash (\operatorname{Max} g \cup \operatorname{Max} h)$. Тогда $f(x) = 1$, $g(x) < 1$ и $h(x) < 1$. Выберем произвольную окрестность U_x точки x, на которой значения h меньше 1. Поскольку $\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} h = X$, $f = 1$ на U_x, в частности $x \in \operatorname{Max}^\circ f$. Но $\overline{\operatorname{Max}^\circ f} \subseteq \operatorname{Max} g$, поэтому $g(x) = 1$; противоречие. Значит, $\operatorname{Max} g \cup \operatorname{Max} h = X$.

Обратно, предположим, существует нормированная функция g такая, что $g(x) < 1$ в некоторой точке $x \in \overline{\operatorname{Max}^\circ f}$, хотя $\operatorname{Max} g \cup \operatorname{Max} h = X$ для любой подалгебры $\langle h\rangle$ такой, что $\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} h = X$. Рассмотрим произвольную окрестность U_x точки x, на которой значения g меньше 1. Зафиксируем точку $y \in U_x \cap \operatorname{Max}^\circ f$, воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем нормированную функцию $h \in U^\vee(X)$ такую, что $h = 1$ на $X \backslash (U_x \cap \operatorname{Max}^\circ f)$ и $h(y) = 1/2$. Ясно, что $\operatorname{Max} f \cup \operatorname{Max} h = X$, хотя $\operatorname{Max} g \cup \operatorname{Max} h \subset X$, так как $g(y) < 1$ и $h(y) < 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Предложение 4. *Для любых систем подалгебр S и S' (см. предложение 3) имеем*

$$S \sim S' \iff M_{\overline{\mathrm{Max}^\circ f}} \vee M_{\overline{\mathrm{Max}^\circ g}} \neq U^\vee(X)$$

для всех $\langle f\rangle \in S$, $\langle g\rangle \in S'$.

Доказательство. Пусть системы S и S' соответствуют точке x. Тогда согласно п. 2.2) предложения 3 $x \in \overline{\mathrm{Max}^\circ f} \cap \overline{\mathrm{Max}^\circ g}$ для любых $\langle f\rangle \in S, \langle g\rangle \in S'$. Значит, по лемме 4 $M_{\overline{\mathrm{Max}^\circ f}} \vee M_{\overline{\mathrm{Max}^\circ g}} \neq U^\vee(X)$.

Обратно, пусть условие выполняется, но системы S и S' соответствуют различным точкам x и y. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем функции $f, g \in U^\vee(X)$ такие, что $x \in \mathrm{Max}^\circ f$ и $y \in \mathrm{Max}^\circ g$, причем $\mathrm{Max}\, f \cap \mathrm{Max}\, g = \varnothing$. Тогда согласно п. 2.3) предложения 3 имеем $\langle f\rangle \in S, \langle g\rangle \in S'$. Кроме того, $M_{\overline{\mathrm{Max}^\circ f}} \vee M_{\overline{\mathrm{Max}^\circ g}} = U^\vee(X)$ по лемме 4; противоречие. Значит, $S \sim S'$. □

Обозначим через S_x класс эквивалентности, образованный системами S, которые соответствуют точке x. Из предложения 4 следует, что классы S_x имеют решеточную характеризацию.

Предложение 5. *Для произвольных подалгебры $\langle f\rangle \neq \mathbb{P}, \mathrm{Max}^\circ f \neq \varnothing$, и класса S_x имеем*

$$x \in \mathrm{Max}^\circ f \iff \mathrm{Max}\, f \cup \mathrm{Max}\, g = X$$

для некоторой подалгебры $\langle g\rangle \neq \mathbb{P}$ такой, что $\langle g\rangle \notin S$ для всех $S \in S_x$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{Max}^\circ f$. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем нормированную функцию $g \in U^\vee(X)$ такую, что $g = 1$ на $X \backslash \mathrm{Max}^\circ f$ и $g(x) = 1/2$. Тогда $\langle g\rangle \neq \mathbb{P}$, $\mathrm{Max}\, f \cup \mathrm{Max}\, g = X$ и $\langle g\rangle \notin S$ для всех $S \in S_x$, так как $x \notin \mathrm{Max}\, g$.

Обратно, поскольку $\langle f\rangle \neq \mathbb{P}$ и $\mathrm{Max}\, f \cup \mathrm{Max}\, g = X$, множество $\mathrm{Max}^\circ g$ не пусто и включает $X \backslash \mathrm{Max}\, f$. Следовательно, если $x \notin \mathrm{Max}^\circ f$, то $\mathrm{Max}^\circ f_i \cap \mathrm{Max}^\circ g \neq \varnothing$ для любой подалгебры $\langle f_i\rangle$, где $x \in \mathrm{Max}^\circ f_i$. Таким образом, семейство множеств, состоящее из $\mathrm{Max}^\circ g$ и всевозможных $\mathrm{Max}^\circ f_i, x \in \mathrm{Max}^\circ f_i$, центрировано. Поэтому, как и при доказательстве п. 1) предложения 3, найдется система подалгебр S, содержащая подалгебры $\langle g\rangle$ и $\langle f_i\rangle$, где $x \in \mathrm{Max}^\circ f_i$, причем $S \in S_x$. С другой стороны, $\langle g\rangle \notin S$, так как $S \in S_x$; противоречие. Значит, $x \in \mathrm{Max}^\circ f$. □

Доказательство теоремы для компактов. Случай $|X| = 1$ очевиден, поскольку

$$|X| = 1 \iff \text{ решетка } \mathbb{A}(U^\vee(X)) \text{— двухэлементная цепь } \varnothing \subset \mathbb{P}.$$

Пусть $|X| \geqslant 2$ и $\alpha\colon \mathbb{A}(U^\vee(X)) \to \mathbb{A}(U^\vee(Y))$ — изоморфизм решеток. Тогда в силу предложений 3–5 соответствие $\varphi\colon X \to Y$, заданное правилом $\varphi(x) = y \iff \alpha(S_x) = S_y$, будет биекцией компактов X и Y, причем если $\alpha(\langle f\rangle) = \langle g\rangle$, то $\varphi(\mathrm{Max}^\circ f) = \mathrm{Max}^\circ g$. Множества вида $\mathrm{Max}^\circ f$ образуют базу открытых множеств любого тихоновского пространства, в том числе и компакта. Значит, φ — гомеоморфизм. □

3. Доказательство теоремы для хьюиттовских пространств

Сведем доказательство теоремы для хьюиттовских пространств к случаю компактов. Для этого предварительно введем два класса подалгебр специального вида.

Подалгебру A полуполя $U^\vee(X)$ назовем $\mathfrak{b}$-*подалгеброй*, если все функции из A ограничены сверху, и sp-*подалгеброй*, если любая функция $f \in A$ строго положительна, т. е. $\inf f > 0$. Ясно, что в случае компакта X все подалгебры будут sp- и $\mathfrak{b}$-подалгебрами. Заметим также, что подалгебра A обладает свойством P (быть sp- или $\mathfrak{b}$-подалгеброй) тогда и только тогда, когда любая подалгебра $\langle f\rangle \subseteq A$ обладает свойством P. Подалгебра констант $\mathbb{P}$ является sp-, $\mathfrak{b}$-подалгеброй. Поэтому для решеточной характеризации sp- и $\mathfrak{b}$-подалгебр можно ограничиться однопорожденными подалгебрами, отличными от $\mathbb{P}$.

Дадим решеточную характеризацию sp-подалгебр. Пространство X считаем тихоновским.

Лемма 6. *$\langle f\rangle \neq \mathbb{P}$ — sp-подалгебра тогда и только тогда, когда $\langle f\rangle \subseteq \langle g'\rangle \vee \langle h'\rangle$ и*

$$\langle g'\rangle \subseteq [g],\ \langle g'\rangle \nsubseteq \langle g\rangle, \quad \langle h'\rangle \subseteq [h],\ \langle h'\rangle \nsubseteq \langle h\rangle \tag{3.4}$$

для некоторых подалгебр $\langle g'\rangle$, $\langle h'\rangle$, $\langle g\rangle$, $\langle h\rangle$.

Доказательство. Пусть $\langle f\rangle$ — sp-подалгебра, отличная от $\mathbb{P}$. Можно считать, что $f > 1$. Выберем точки $x_0, y_0 \in X$ и числа $a, b, c \in \mathbb{P}$ такие, что $a < f(x_0) < b < f(y_0) < c$. Тогда множества

$$A = \{x \in X\colon f(x) \notin (a, b)\}, \quad B = \{x \in X\colon f(x) \notin (b, c)\}$$

не пусты ($y_0 \in A$, $x_0 \in B$) и замкнуты. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем пару нормированных функций $\lambda_A, \lambda_B \in U^{\vee}(X)$ таких, что

$$\lambda_A(A) = \{1\},\ \lambda_A(x_0) = 1/(2f(x_0)), \quad \lambda_B(B) = \{1\},\ \lambda_B(y_0) = 1/(2f(y_0)).$$

Положим

$$g = f\lambda_B, \quad g' = f\lambda_B \vee 1, \quad h = f\lambda_A, \quad h' = f\lambda_A \vee 1.$$

Тогда $\langle g'\rangle \subseteq [g]$, $\langle h'\rangle \subseteq [h]$ и $\langle f\rangle \subseteq \langle g'\rangle \vee \langle h'\rangle$, так как

$$g' \vee h' = (f\lambda_B \vee 1) \vee (f\lambda_A \vee 1) = f(\lambda_A \vee \lambda_B) \vee 1 = f \cdot 1 \vee 1 = f$$

($\lambda_A \vee \lambda_B = 1$, поскольку $A \cup B = X$). Докажем, что $\langle g'\rangle \nsubseteq \langle g\rangle$ ($\langle h'\rangle \nsubseteq \langle h\rangle$ получается аналогично).

Рассуждая от противного, получаем, что $f\lambda_B \vee 1 \in \langle f\lambda_B\rangle$, т. е.

$$f\lambda_B \vee 1 = a_1(f\lambda_B) \vee a_2(f\lambda_B)^2 \vee \ldots \vee a_n(f\lambda_B)^n;$$

это равенство в точках x_0 и y_0 равносильно системе

$$\begin{cases} f(x_0) = a_1 f(x_0) \vee a_2 f^2(x_0) \vee \ldots \vee a_n f^n(x_0), \\ 1 = a_1 \cdot 1/2 \vee a_2 \cdot 1/2^2 \vee \ldots \vee a_n \cdot 1/2^n, \end{cases}$$

которая несовместна, так как

$$1 = a_1 \vee a_2 f(x_0) \vee \ldots \vee a_n f^{n-1}(x_0) > a_1 \cdot 1/2 \vee a_2 \cdot 1/2^2 \vee \ldots \vee a_n \cdot 1/2^n = 1.$$

Обратно, пусть $\langle f\rangle \subseteq \langle g'\rangle \vee \langle h'\rangle$. Включения (3.4) показывают, что $\langle g'\rangle$ и $\langle h'\rangle$ — sp-подалгебры. Поэтому любая функция из подалгебры $\langle g'\rangle \vee \langle h'\rangle$, включая f, строго положительна. □

Опираясь на лемму 6, получим следующую решеточную характеризацию однопорожденных b-подалгебр.

Лемма 7. *$\langle f\rangle \neq \mathbb{P}$ — b-подалгебра тогда и только тогда, когда для любой sp-подалгебры $\langle g\rangle \subseteq [f]$ найдется sp-подалгебра $\langle h\rangle \neq \mathbb{P}$ такая, что $\mathbb{P} \subseteq \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\langle f\rangle$ — b-подалгебра и $\langle g\rangle \subseteq [f]$ — sp-подалгебра. Если $\langle g\rangle = \mathbb{P}$, то $\mathbb{P} \subseteq \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$ для любой sp-подалгебры $\langle h\rangle \neq \mathbb{P}$ (такая, очевидно, в $U^{\vee}(X)$ найдется).

Если $\langle g\rangle \neq \mathbb{P}$, то положим $h = g^{-1}$. Тогда функция $h \notin \mathbb{P}$ строго положительна в силу ограниченности сверху функции $g \in [f]$. Кроме того, $\mathbb{P} \subseteq \langle g\rangle \vee \langle g^{-1}\rangle$, так как $1 = g \cdot g^{-1}$.

Обратно, включение $\mathbb{P} \subseteq \langle g\rangle \vee \langle h\rangle$ означает, что

$$1 = P_0(g) \vee Q_0(h) \vee P_1(g)Q_1(h) \vee \ldots \vee P_m(g)Q_m(h)$$

для некоторых многочленов $P_i \in \mathbb{R}^+[g], Q_i \in \mathbb{R}^+[h]$ без свободных членов.

Допустим, что $\langle g\rangle$ — не b-подалгебра. Тогда, поскольку $\langle h\rangle$ — sp-подалгебра, функция

$$P_0(g) \vee P_1(g)Q_1(h) \vee \ldots \vee P_m(g)Q_m(h)$$

будет нулевой, так как иначе она не ограничена сверху. Следовательно, $1 = Q_0(h)$, что противоречит $\langle h\rangle \neq \mathbb{P}$.

Итак, подалгебра $\langle g\rangle$ является b-подалгеброй. Значит, $\langle f\rangle$ — также b-подалгебра. □

Лемма 8. *Пусть X — компакт. Тогда для произвольных подалгебр $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$, отличных от $\mathbb{P}$, имеем*

$$\mathbb{P} \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle \Longrightarrow \operatorname{Min} g \subseteq \operatorname{Max} f.$$

Доказательство. Выберем точку $x \in \operatorname{Min} g$ и докажем, что $x \in \operatorname{Max} f$.

Пусть $\mathbb{P} \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$. Тогда 1 можно записать как

$$1 = a_{10}f \vee a_{01}g \vee \ldots \vee a_{mn}f^m g^n.$$

Отсюда $1 = a_{ij}f^i(x)g^j(x)$ для некоторых i, j.

Если $i = 0$, то $j \geqslant 1$, а потому $a_{0j}g^j(y) > 1$ для любой точки $y \in \operatorname{Max} g$ ($g(y) > g(x)$, так как $\langle g\rangle \neq \mathbb{P}$); противоречие. Следовательно, $i \geqslant 1$. Теперь, если $f(x) < \max f$, то для любой точки $z \in \operatorname{Max} f$ имеем $a_{ij}f^i(z)g^j(z) > a_{ij}f^i(x)g^j(x) = 1$, что невозможно. Значит, $x \in \operatorname{Max} f$. □

С этого момента считаем тихоновское пространство X хьюиттовским. Пусть βX — стоун-чеховская компактификация пространства X. Множество всех ограниченных строго положительных функций полуполя $U^\vee(X)$ образует подалгебру, которую обозначим через $spbU^\vee(X)$. Она канонически изоморфна полуполю $U^\vee(\beta X)$. Соответствующие канонические изоморфизмы полуполей и их решеток подалгебр обозначим через φ_X и α_X соответственно.

Лемма 9. *Для любого класса S_x систем подалгебр полуполя $U^\vee(\beta X)$ равносильны следующие условия:*

1) $x \in \beta X \backslash X$;

2) *найдется не sp-, b-подалгебра $\langle f\rangle$ полуполя $U^\vee(X)$ такая, что для любой sp-подалгебры $\langle g\rangle \subseteq [f]$ подалгебра $\langle h\rangle \neq \mathbb{P}$ полуполя $U^\vee(\beta X)$, для которой $\mathbb{P} \subseteq \langle h\rangle \vee \alpha_X(\langle g\rangle)$, лежит в S для всех $S \in S_x$.*

Доказательство. Пусть $x \in \beta X \backslash X$. Согласно [10, теорема 3.11.10] найдется функция $f' \in C(\beta X), 0 \leqslant f' \leqslant 1$, такая, что $f'(x) = 0$ и $f' > 0$ на X. Положим $f = f'|_X$. Тогда $\langle f\rangle$ — не sp, b-подалгебра полуполя $U^\vee(X)$. Очевидно, $x \in \operatorname{Min}^\circ \varphi_X(g)$ для любой sp-подалгебры $\langle g\rangle \subseteq [f]$. Далее, рассмотрим произвольную подалгебру $\langle h\rangle \neq \mathbb{P}$ полуполя $U^\vee(\beta X)$, для которой $\mathbb{P} \subseteq \langle h\rangle \vee \alpha_X(\langle g\rangle)$. По лемме 8 $\operatorname{Min} \varphi_X(g) \subseteq \operatorname{Max} h$, т. е. $x \in \operatorname{Max}^\circ h$. Значит, согласно п. 2.3) предложения 3 $\langle h\rangle \in S$ для всех $S \in S_x$.

Обратно, пусть условия п. 2) выполнены, но $x \in X$. Поскольку $f(x) > 0$ и $\langle f\rangle$ — не sp-подалгебра, то $f(y) < f(x)$ для некоторой точки $y \in X$. Положим $g = f \vee f(y)$ и $h = 1/\varphi_X(f \vee f(y))$. Тогда $\langle g\rangle$ — sp-подалгебра, включенная в $[f]$, $\langle h\rangle \neq \mathbb{P}$ и $\mathbb{P} \subseteq \langle h\rangle \vee \alpha_X(\langle g\rangle)$, так как $h \cdot \varphi_X(g) = 1$. Кроме того, $x \notin \operatorname{Max} h$, поскольку $\operatorname{Max} h = \operatorname{Min} \varphi_X(g)$ и $x \notin \operatorname{Min} \varphi_X(g)$. Значит, $\langle h\rangle \notin S$ для всех $S \in S_x$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Доказательство теоремы для хьюиттовских пространств. Пусть для произвольных хьюиттовских пространств X и Y имеется изоморфизм α решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ на решетку $\mathbb{A}(U^\vee(Y))$. В силу лемм 6 и 7 b- и sp-подалгебры полуполей $U^\vee(X)$ и $U^\vee(Y)$ имеют решеточные характеризации. Поэтому отображение $\gamma = \alpha_Y \circ \alpha \circ \alpha_X^{-1}$ будет изоморфизмом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(\beta X))$ на решетку $\mathbb{A}(U^\vee(\beta Y))$. Тогда, как было показано ранее для компактов, соответствие

$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \gamma(S_x) = S_y \text{ для любых } x \in \beta X \text{ и } y \in \beta Y$$

будет гомеоморфизмом компактов βX и βY. Кроме того, $\varphi(X) = Y$ в силу леммы 9. Значит, $\varphi|_X$ — гомеоморфизм хьюиттовских пространств X и Y. Теорема доказана. □

4. Заключение

Если в полуполе $U^{\vee}(X)$ max-сложение заменить обычным сложением, то получим аддитивно-сократимое полуполе $U(X)$.

Приведем несколько результатов, касающихся определяемости хьюиттовских пространств, применительно к полуполям $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$. Аналогичные результаты для колец и полуколец непрерывных функций можно найти в работах [1, предложение 2.2; 7].

Предложение 6. *Для любых топологических пространств X и Y равносильны условия:*
1) $\nu\tau X \approx \nu\tau Y$;
2) *аддитивные редукты полуполей $U(X)$ и $U(Y)$ изоморфны;*
3) *аддитивные редукты полуполей $U^{\vee}(X)$ и $U^{\vee}(Y)$ изоморфны;*
4) *решетки подалгебр $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}(U^{\vee}(Y))$ изоморфны.*

Доказательство. Согласно [11, теоремы 3.9 и 8.7] для произвольных топологических пространств X и Y существуют хьюиттовские пространства $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$, для которых канонически изоморфны кольца функций $C(X)$ и $C(\nu\tau X)$, $C(Y)$ и $C(\nu\tau Y)$. Поэтому условие 1) влечет остальные. Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) — теорема данной статьи. Далее, неравенство $f \leqslant g$ равносильно равенству $f \vee g = g$ для любых $f, g \in C(X)$. Кроме того, если $f, g \in U(X)$, то неравенство $f \leqslant g$ равносильно следующему условию: для любой функции $h \in U(X)$ такой, что $h = g + u$ для некоторой $u \in U(X)$, найдется функция $v \in U(X)$ такая, что $h = f + v$. Таким образом, как из условия 2), так и из условия 3) следует изоморфизм решеток функций $\langle U(X), \leqslant\rangle$ и $\langle U(Y), \leqslant\rangle$. В [1, предложение 2.2] показано, что этот изоморфизм равносилен изоморфизму колец $C(X)$ и $C(Y)$, который влечет условие 1) согласно известному результату Хьюитта [12]. □

Замечание. Изоморфизм мультипликативных редуктов $U(X)$ и $U(Y)$ или, что равносильно, аддитивных полугрупп $C(X)$ и $C(Y)$, не влечет изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$, поскольку мультипликативный редукт $U(X)$, будучи делимой абелевой группой без кручения, определяет лишь мощность кольца $C(X)$.

Следующий пример показывает, что при изоморфизме полуполей $U^{\vee}(X)$ и $U^{\vee}(Y)$ образ подалгебры не обязан быть подалгеброй (в отличие от полуполей $U(X)$). Поэтому импликация

$$U^{\vee}(X) \cong U^{\vee}(Y) \Rightarrow \mathbb{A}(U^{\vee}(X)) \cong \mathbb{A}(U^{\vee}(Y)),$$

хотя и следует из импликации 3) $\Rightarrow$ 4) предложения 6, не может быть установлена напрямую.

Пример. Пусть $X = \{x, y\}$ — двухточечное дискретное пространство. Тогда $U^{\vee}(X) = \mathbb{P} \times \mathbb{P}$. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon U^{\vee}(X) \to U^{\vee}(X),\ \varphi\colon (a, b) \mapsto (a, b^2).$$

Легко видеть, что φ — автоморфизмом полуполя $U^{\vee}(X)$. Если $\varphi(\mathbb{P})$ — подалгебра, то вместе с функцией $(2, 4) = \varphi((2, 2))$ подалгебра $\varphi(\mathbb{P})$ обязана содержать функцию $2 \cdot (2, 4) = (4, 8)$, что невозможно, так как $\varphi\colon (r, r) \mapsto (r, r^2) \neq (4, 8)$ для всех $r \in \mathbb{P}$. Значит, образ $\varphi(\mathbb{P})$ не будет подалгеброй.

Естественным продолжением расмотренного примера служит

Предложение 7. *Изоморфизм φ полуполей $U^{\vee}(X)$ и $U^{\vee}(Y)$ переводит подалгебры в подалгебры тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$.*

Доказательство. Пусть изоморфизм φ переводит подалгебры в подалгебры. Поскольку $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(\mathbb{P})$, $\varphi^{-1}(\mathbb{P})$ — подалгебры, то $\mathbb{P} \subseteq \varphi(\mathbb{P})$ и $\mathbb{P} \subseteq \varphi^{-1}(\mathbb{P})$. Отсюда $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$.

Обратно, пусть $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$. Тогда образ $\varphi(A)$ подалгебры A замкнут относительно сложения и умножения функций. Остается показать, что $rf \in \varphi(A)$ для любых $f \in \varphi(A)$, $r \in \mathbb{P}$, или, что то же самое, $\varphi^{-1}(rf) = \varphi^{-1}(r)\varphi^{-1}(f) \in A$. Последнее верно, так как $\varphi^{-1}(r) \in \mathbb{P}, \varphi^{-1}(f) \in A$ и A— подалгебра. $\square$

В заключение сформулируем две открытые проблемы.

Проблема 1. *Доказать (предположительно) определяемость любого хьюиттовского пространства X решеткой $\mathbb{A}(U(X))$.*

Вслед за проблемой определяемости пространств X некоторой алгебраической структурой $A(X)$ в случае ее положительного решения естественно перейти к описанию изоморфизмов структур $A(X)$. Произвольный изоморфизм решеток всех подалгебр однотипных алгебр называется *решеточным изоморфизмом* данных алгебр.

Нами описаны решеточные изоморфизмы полуколец $C^+(X)$ (см. [6]) и $C^\vee(X)$ (в печати).

Проблема 2. *Описать решеточные изоморфизмы полуполей $U(X)$ и $U^\vee(X)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, вып. 2. С. 493–510.
2. **Вечтомов Е.М.** Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 3–46.
3. **Вечтомов Е.М.** Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 29. С. 119–191.
4. **Вечтомов Е.М.** Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 5. С. 687–693.
5. **Вечтомов Е.М., Сидоров В.В.** Определяемость полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер.1: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 11. С. 112–125.
6. **Вечтомов Е.М., Сидоров В.В.** Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Фундамент. и прикл. математика. 2010. Т. 16, вып. 3. С. 63–103.
7. **Вечтомов Е.М., Сидоров В.В., Чупраков Д.В.** Полукольца непрерывных функций. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. 312 с.
8. **Гельфанд И.М., Колмогоров А.Н.** О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22, № 1. С. 11–15.
9. **Салий В.Н.** Решетки с единственными дополнениями. М.: Наука, 1984. 128 с.
10. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
11. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. N.J.: Springer-Verlag, 1976. 303 p.
12. **Hewitt E.** Rings of real-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64, no. 1. P. 45–99.

Вечтомов Евгений Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: vecht@mail.ru

Поступила 20.04.2015

Сидоров Вадим Вениаминович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: sedoy_vadim@mail.ru