ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 517.977

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$[1]

И. Н. Белоусов

В работе найдены возможные автоморфизмы простых порядков и подграфы их неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$. Показано, что графы с массивами пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ и $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ не являются вершинно симметричными

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

I. N. Belousov. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$.

Possible prime-order automorphisms and fixed-point subgraphs are found for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$. It is shown that graphs with intersection arrays $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$, and $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ are not vertex-symmetric.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность ее вершины, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (соответственно $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (соответственно смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (соответственно *λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через $\Gamma_{i_1, i_2, \ldots, i_t}$, где $i_j \le d$ для всех $j = 1, \ldots, t$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$ в Γ.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит ровно v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит ровно в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит ровно μ вершин для любых двух вершин a и b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (соответственно $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно через $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u и w, находящихся на расстоянии i в Γ, для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно*

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 14-11-00061 (теорема), при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006) (следствие).

транзитивным, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x и y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются через p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000.

Предложение 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2, *на* $v \le 1000$ *вершинах. Если* $\lambda = 2$ *и* $\mu > 1$, *то верно одно из утверждений*:

(1) Γ *— примитивный граф с массивом пересечений* $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ *или* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$;

(2) Γ *— антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений* $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \in \{3, 4, \dots, 21\} \setminus \{10, 16\}$ *и* $v = 2r(r + 1)$;

(3) Γ *— антиподальный граф с* $\mu \ge 3$ *и массивом пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$ *или* $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

В статье продолжено исследование реберно симметричных графов с массивами пересечений из п. (2) предложения 1. Если $2r+1$ — степень простого числа, то граф существует. Более того, существует единственный реберно симметричный граф, полученный из схемы Р. Мэтона. Заметим, что $2r + 1$ — не степень простого числа для $r = 7, 17, 19$. Случаи $r = 7$ и $r = 17$ рассмотрены в [2; 4]. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$.

Граф Γ с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ имеет $v = 1 + 39 + 702 + 18 = 760$ вершин и спектр $39^1, \sqrt{39}^{360}, -1^{39}, -\sqrt{39}^{360}$.

Теорема. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф и либо*

(i) $p = 19$, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 38$ *и* $\alpha_2(g) = 684$ *или* $\alpha_3(g) = 760$, *либо*

(ii) $p \in \{2, 5\}$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 40$ *и* $\alpha_2(g) = 720$;

(2) Ω *лежит в антиподальном классе* Γ *и либо*

(i) $p = 13$, $|\Omega| = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 39(2r + 1)$, *где* $r \le 9$, *либо*

(ii) $p = 3$, $|\Omega| \in \{1, 7, 13, 19\}$ *и* $\alpha_1(g) = 39$;

(3) $p = 17$, Ω *— граф икосаэдра*, $\alpha_1(g) = 34$ *и* $\alpha_3(g) = 102$;

(4) $p = 3$, Ω *является* 4*-кликой и* $\alpha_1(g) = 36$;

(5) $p = 2$ *и либо*

(i) Ω *— объединение двух антиподальных классов*, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 38$, *либо*

(ii) Ω *— объединение семи изолированных* 4*-клик*, $\alpha_3(g) = 48$, $\alpha_1(g) = 36$.

Следствие. *Графы с массивами пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ *и* $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ *не являются вершинно симметричными.*

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Лемма 1 [3, лемма 1]. *Пусть* O_K *— кольцо целых алгебраических чисел поля* K. *Если* d *— целое число, не делящееся на квадрат простого числа*, $K = \mathbf{Q}(d^{1/2})$ *— соответствующее* *квадратичное поле, то один из целочисленных базисов кольца* O_K *равен* $(1,(1+d^{1/2})/2)$, *если* $d\equiv 1 \pmod 4$ *и равен* $(1,d^{1/2})$, *если* $d\equiv 2,3 \pmod 4$. *В случае* $d=39$ *один из целочисленных базисов кольца* O_K *равен* $(1,\sqrt{39})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i\geq 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w)=i$. Для $u\in\Gamma$ положим $k_i=|\Gamma_i(u)|$ и $v=|\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u,w смежны, если $(u,w)\in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i>0$ и $A_0=I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j=\sum p_{ij}^l A_k$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0),\dots,p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0=1,\dots,m_d$ соответственно. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1, поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i)=m_jp_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенствами $PQ=QP=vI$.

Предложение 2 [5, теорема 17.12]. *Пусть* u_j *и* w_j *— левый и правый собственные векторы матрицы* P_1, *отвечающие собственному значению* $p_1(j)$ *и имеющие первую координату* 1. *Тогда кратность* m_j *собственного значения* $p_1(j)$ *равна* $v/\langle u_j,w_j\rangle$.

Фактически из доказательства теоремы 17.12 из [5] следует, что w_j являются столбцами матрицы P и m_ju_j являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v,\mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0,\dots,W_d$ матрицы смежности $A=A_1$ графа Γ. Для любого $g\in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [3, § 3.7]) для $g\in G$ получим

$$\chi_i(g)=v^{-1}\sum_{j=0}^{d}Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x,x^g)=j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами и, если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{39,36,1;1,2,39\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g\in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 360 (*отвечающее собственному значению* θ_1) *и* χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 39, *то*

$$\chi_1(g)=(18\alpha_0(g)-\alpha_3(g)+(18\alpha_1(g)-\alpha_2(g))\sqrt{39}/39)/38,$$

$$\chi_2(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/19-1.$$

Если $|g|=p$ *— простое число, то* $\chi_2(g)-39$ *делится на* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\39&2&2&0\\0&36&36&39\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, $p_1(1)=\sqrt{39}$. Тогда

$$P_1-\sqrt{39}I=\begin{pmatrix} -\sqrt{39} & 1 & 0 & 0\\ 39 & 2-\sqrt{39} & 2 & 0\\ 0 & 36 & 36-\sqrt{39} & 39\\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{39}\end{pmatrix}.$$

Если $(1,x_2,x_3,x_4)$ — вектор-строка из ядра матрицы $P_1-\sqrt{39}I$, то $x_2=1/\sqrt{39}$, $x_3=-1/(18\sqrt{39})$ и $x_4=-1/18$. Отсюда

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 360 & 360/\sqrt{39} & -20/\sqrt{39} & -20\\ 39 & -1 & -1 & 39\\ 360 & -360/\sqrt{39} & 20/\sqrt{39} & -20\end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g)=(18\alpha_0(g)+18\alpha_1(g)/\sqrt{39}-\alpha_2(g)/\sqrt{39}-\alpha_3(g))/38$.

Аналогично $\chi_2(g)=(39\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_2(g)+39\alpha_3(g))/760$. Подставляя $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=760-\alpha_0(g)-\alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/19-1$.

Остальные утверждения леммы следуют из [6, лемма 2]. Лемма доказана.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{39,36,1;1,2,39\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39,36,1;1,2,39\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ и $\alpha_i(g)=pw_i$ для $i>0$.

Заметим, что Γ содержит ровно 40 антиподальных классов, в каждом из которых 19 вершин.

З а м е ч а н и е. Если Ω пересекает антиподальные классы K и L, то $|K\cap\Omega|=|L\cap\Omega|$.

В самом деле, вершина из $L\cap\Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K\cap\Omega$, поэтому $|K\cap\Omega|\le|L\cap\Omega|$. Симметрично $|L\cap\Omega|\le|K\cap\Omega|$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *если* g — *автоморфизм* Γ *порядка* $2,3$ *или* 5, *то* $18w_1=w_2$;
(2) *если* Ω — *пустой граф, то либо*
  (i) $p=19$ *и* $(\alpha_1(g),\alpha_2(g),\alpha_3(g))\in\{(38,684,38),(0,0,760)\}$, *либо*
  (ii) $p\in\{2,5\}$ *и* $(\alpha_1(g),\alpha_2(g),\alpha_3(g))=(40,720,0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если g — элемент группы G, то значение характера для g является суммой n корней из единицы степени $|\psi(g)|$, где n — размерность представления ψ.

Заметим, что корни из единицы степени 2, 3 имеют рациональные вещественные части. Если $|g|=2,3$, то значение характера – вещественное число, поэтому оно является целым. В случае $|g|=5$ можно воспользоваться формулами $\cos 2\pi/5=(\sqrt{5}-1)/4$ и $\cos 4\pi/5=-(\sqrt{5}+1)/4$.

Таким образом, если g — автоморфизм графа Γ порядка $2,3$ или 5, то из леммы 2 следует, что $18w_1=w_2$.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $760=2^3\cdot 5\cdot 19$, то $p=19,5$ или 2.

Пусть $p=19$. Тогда $\chi_1(g)=(\sqrt{39}(18w_1-w_2)/39-w_3)/2$ и $\chi_2(g)=w_3-1$. По лемме 2 число $\chi_2(g)-39=w_3-40$ делится на 19, поэтому $w_3=2,21$ или 40. В силу леммы 1 пара $(1,\sqrt{39})$ образует целочисленный базис кольца алгебраических целых чисел поля $\mathbf{Q}(\sqrt{39})$. Поэтому $w_3=2$ или 40. В первом случае имеем $w_1+w_2=38$, $\chi_1(g)=\sqrt{39}(18w_1-w_2)/78-1=19\sqrt{39}(w_1-2)/78-1$, и отсюда $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=38$, $\alpha_2(g)=19\cdot 36=684$. Во втором случае $\alpha_3(g)=760$, и элемент g оставляет инвариантным каждый антиподальный класс графа Γ.

Если $p = 2,5$ и $\alpha_3(g) \neq 0$, то g фиксирует вершину в соответствующем антиподальном классе, противоречие.

Если $p = 5$, то $\alpha_1(g) = 5w_1$, $\alpha_2(g) = 5 \cdot 18w_1$ и $5w_1 + 5 \cdot 18w_1 = 760$. Отсюда $\alpha_1(g) = 40$, $\alpha_2(g) = 720$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_1(g) = 2w_1$, $\alpha_2(g) = 2 \cdot 18w_1$ и $2w_1 + 2 \cdot 18w_1 = 760$. Отсюда $\alpha_1(g) = 40$, $\alpha_2(g) = 720$.

Лемма доказана.

В леммах 4–6 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $a, b \in \Omega$ и $p > 2$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$, поэтому $\lambda_\Omega = \mu_\Omega = 2$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *если* $p \neq 2, 3, 13$, *то* Ω *содержит по вершине из* $[a]$, $\Gamma_2(a)$ *и* $\Gamma_3(a)$;
(2) *если* $p > 17$, *то* $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Доказательство. Если $p \neq 2, 3, 13$, то p не делит $|\Gamma_i(a)|$, поэтому Ω содержит по вершине из $[a]$, $\Gamma_2(a)$ и $\Gamma_3(a)$.

Для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ является g-допустимым, и в случае $p > 17$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $p > 2$, *то выполняется одно из утверждений*:
(1) Ω *лежит в антиподальном классе графа* Γ, $\alpha_3(g) = 17 - |\Omega|$ *и либо*
(i) $p = 3$, $|\Omega| \in \{1, 7, 13, 19\}$ *и* $\alpha_1(g) = 39$, *либо*
(ii) $p = 13$, $|\Omega| = 19$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 39(2l + 1)$, *где* $l \leq 9$;
(2) $p = 17$, Ω — *граф икосаэдра*, $\alpha_1(g) = 34$ *и* $\alpha_3(g) = 102$;
(3) $p = 3$, Ω *является* 4-*кликой и* $\alpha_1(g) = 36$.

Доказательство. Пусть $p > 2$. Допустим, что Ω содержит $[a]$. Тогда вершина $u \in \Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i] \cap [a_j]$ для некоторых вершин a_i, a_j из $[a]$, поэтому $u \in \Omega$. Отсюда $\Gamma_2(a) \subset \Omega$ и $\Gamma = \Omega$, противоречие.

Кроме того, в окрестности каждой вершины из $\Gamma - \Omega$ имеется не более одной вершины из Ω.

Пусть $p > 17$. Тогда $|\Omega| = 19t$, где t — число антиподальных классов, попадающих в Ω, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $40 - t$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $19t(39 - t)$, но не больше $(760 - 19t)$, поэтому $t = 1$. Отсюда $|\Omega| = 19$ и p делит 39, противоречие.

Пусть теперь $p \leq 17$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$.

Рассмотрим множество вершин U, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω.

Каждая вершина из U смежна в среднем с $st(40 - t)/(760 - 19t) = st/19$ вершинами из Ω, поэтому $st = |\Omega| \leq 19$.

Заметим, что если Ω содержит изолированную вершину, то Ω лежит в антиподальном классе графа Γ и либо $p = 3$ и $|\Omega| \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$, либо $p = 13$ и $|\Omega| \in \{6, 19\}$. В любом случае $\alpha_3(g) = 19 - |\Omega|$. Далее, $\chi_1(g) = (|\Omega| - 1)/2 + (18\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{39}/(39 \cdot 38)$, ввиду леммы 1 число $|\Omega|$ нечетно, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 741$ и $18\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 19(\alpha_1(g) - 39)$ делится на $38 \cdot 39$. Отсюда либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 39$, либо $p = 13$ и $\alpha_1(g) = 39(2l + 1)$, где $l \leq 9$.

Если $t > 1$, то Ω является $(k' + 1)$-кликой или связным вполне регулярным графом с параметрами $(v', k', 2, 2)$ и $1 + k' + (k' - 3)k'/2 \leq 19$. Поэтому $k' \in \{3, 5, 6\}$.

В случае $k' = 6$ число p делит 33, поэтому $p \in \{3, 11\}$ и p делит $19 - s$. Далее, пара $(|\Omega|, s)$ равна $(16, 1)$ и подграф Ω является кликой, противоречие.

В случае $k' = 5$ число p делит 34, поэтому $p = 17$. Далее, Ω — локально 5-угольный граф, поэтому Ω — граф икосаэдра, $t = 6, s = 2$ и $\alpha_3(g) = 102$. Так как $\alpha_1(g) - 34$ делится на 78, то $\alpha_1(g) = 34$.

В случае $k' = 3$ граф Ω является 4-кликой и $p = 3$. Далее, $\alpha_2(g) = 18\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 36$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $p = 2$, то либо*

(i) Ω *— объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$, либо*

(ii) Ω *является объединением семи изолированных 4-клик, $\alpha_3(g) = 48$ и $\alpha_1(g) = 36$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t-1$, число $|\Omega|$ четно, любой антиподальный класс пересекает Ω по $s = 2j+1$ вершинам, $j \le 9$ и t четно. Пусть K — антиподальный класс, содержащий вершину a. Тогда $K \cap \Omega = \{a, a_2, \ldots, a_s\}$. Если $d(u, u^g) \le 2$ для некоторой вершины $u \in \Gamma - \Omega$, то $[u]$ содержит 0 или 2 вершины из Ω.

Как и выше, доказывается, что $|\Omega| = st \le 38$; кроме того, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (s-1)(t-1)$. В случае $s = 1$ граф Ω является t-кликой, поэтому $t \le 4$. Противоречие с тем, что $[a] - \Omega$ содержит по крайней мере 18 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^{\perp}$.

Пусть $s > 1$ и x — число изолированных вершин в $\Omega(a)$. Тогда Ω содержит вершину a, $t-1$ вершин из $\Omega(a)$, $(x\,(t-2) + (t-1-x)(t-4))/2$ вершин c из $\Omega_2(a)$, для которых $[c] \cap [a] \subset \Omega$, $(39 - 3x - (t-1-x))/2$ вершин из $\Omega_2(a)$, смежных с парами вершин из $[a] - \Omega$ и $s-1$ вершин из $\Omega_3(a)$. Поэтому $1 + (t-1) + (x\,(t-2) + (t-1-x)(t-4))/2 + (39 - 3x - (t-1-x))/2 + (s-1) \le 38$, $s \le 19 - (t-2)^2/2$ и $t \in \{2, 4, 6\}$.

Далее, число вершин в $\Gamma_2(a) \cap \Omega$, с одной стороны, равно $(x\,(t-2) + (t-1-x)(t-4))/2 + (39 - 3x - (t-1-x))/2$, а с другой стороны, равно $(s-1)(t-1)$. Поэтому $(2s - t + 3)(t-1) = 39$ и $(t, s) \in \{(2, 19), (4, 7)\}$.

Пусть $(t, s) = (2, 19)$. Тогда Ω является объединением 19 изолированных ребер, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$.

Пусть $(t, s) = (4, 7)$. Тогда Ω — регулярный граф степени 3 и связная компонента Δ графа Ω является графом $K_{4,4}$ с удаленным максимальным паросочетанием или 4-кликой. В первом случае $t \ge 8$, противоречие. Поэтому Ω является объединением семи изолированных 4-клик, $\alpha_3(g) = 12 \cdot 4 = 48$ и $\alpha_1(g) = 36$.

Лемма доказана.

Из лемм 3–6 следует теорема.

3. Граф с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ не является вершинно симметричным

Сначала приведем одну лемму об абелевых накрытиях клик.

Лемма 7 [7, теорема 2.5]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, K — абелева подгруппа из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, транзитивная на каждом антиподальном классе и p — простой делитель r. Тогда p делит $k+1$, и в случае $k = r\mu + 1$ число r — степень 2.*

До конца раздела предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. По лемме 7 группа G не содержит абелевых подгрупп, действующих транзитивно на каждом антиподальном классе. Ввиду теоремы имеем $\{2, 5, 19\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если f — элемент порядка 19 из G и g — элемент простого порядка $p < 19$ из $C_G(f)$, то $|g| = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$;*

(2) *$S(G) = O_2(G)$;*

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(19)$ или J_3.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — элемент порядка 19 из G, g — элемент простого порядка $p < 19$ из $C_G(f)$. Ввиду теоремы из действия f на Ω следует, что либо $p = 13$, $|\Omega| = 19$ и $\alpha_1(g) = 39(2l+1)$, где $l \le 9$, либо $p = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$. В первом случае имеем $l = 9$ и каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 19 является кликой, противоречие.

Из утверждения (1) следует равенство $S(G) = O_2(G)$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [8, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна группе $L_2(19)$ порядка $2^2 3^2 5 \cdot 19$ или группе J_3 порядка $2^7 3^5 5 \cdot 17 \cdot 19$.

Лемма доказана.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о следствия в случае массива $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$. По [9] группа J_3 не содержит подгрупп индекса, делящего 760. В случае $L_2(19)$ подгруппа $\bar{T}_a$ содержится в диэдральной подгруппе порядка 18 и для антиподального класса F подгруппа $\bar{T}_{\{F\}}$ является расширением группы порядка 19 с помощью циклической группы порядка 9. Отсюда $S(G)_a$ — группа порядка 2 и $|S(G) : S(G)_a|$ делит 8. Противоречие с действием $\bar{T}$ на $S(G)$.

4. Графы с массивами пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$ и $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ не являются вершинно симметричными

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Пусть F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a. В [2, теорема] доказано, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Ω — пустой граф и либо

(i) $p = 7$, $\alpha_1(g) = 14t$ и $\alpha_3(g) = 14$ или $\alpha_3(g) = 112$, либо

(ii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 16$;

(2) $|\Omega| = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 15$ и $\alpha_3(g) = 6$;

(3) Ω — антиподальный класс, $p \in \{3, 5\}$, $\alpha_1(g) = 15$ и $\alpha_3(g) = 0$;

(4) Ω является 4-кликой, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 12$ и $\alpha_3(g) = 24$;

(5) $p = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 14$.

Лемма 9. *Пусть G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если f — элемент порядка 7 из G, g — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$, то $|g| = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 14$ и $|C_G(f)| = 14$*;

(2) $S(G) = O_2(G)$;

(3) *цоколь $G/S(G)$ изоморфен $L_2(7)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — элемент порядка 7 из G, g — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$. Ввиду [2, теорема] из действия f на Ω следует, что либо $p = 3, 5$ и Ω — антиподальный класс, либо $p = 2$ и Ω — объединение двух антиподальных классов. Но в случаях $p = 3, 5$ имеем $\alpha_1(g) = 15$, противоречие. Если V — подгруппа порядка 4 из $C_G(f)$, содержащая g, и $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$, то $|U| = 14$ и некоторая инволюция $h \in V$ фиксирует 2 вершины из U и переставляет антиподальные классы из Ω. В этом случае $U = \mathrm{Fix}(h) = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^{gh}) = 1\}$. Аналогично $W = \{w \in \Gamma \mid d(w, w^h) = 1\}$ совпадает с $\mathrm{Fix}(gh)$. Противоречие с тем, что $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^{gh}) = 1\} = W$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. Если $|\bar{T}| = 7$, то $|\bar{G}|$ не делится на 8, причем f принадлежит ядру действия G на множестве антиподальных классов, противоречие с утверждением (1). Итак, $S(G) = O_2(G)$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Заметим, что $\{2, 7\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и $|G|$ не делится на 25 и на 49. Если $|\bar{T}|$ не делится на 7, то по [8, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна A_5, A_6 или $U_4(2)$, противоречие с действием элемента порядка 7 на $\bar{T}$.

Значит, $|\bar{T}|$ делится на 7 и по [8, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, A_7, $L_3(4)$, A_8, A_9, $U_4(3)$ или $Sp_6(2)$. Так как $|\bar{T}:\bar{T}_a|$ делит $16\cdot 7$, и для антиподального класса F число $|\bar{T}:\bar{T}_{\{F\}}|$ делит 16, то $\bar{T}\cong L_2(7)$, $\bar{T}_a=Z_3$ и $\bar{T}_{\{F\}}=Z_7.Z_3$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия в случае массива $\{15,12,1;1,2,15\}$. По лемме 9 либо группа G изоморфна $PGL_2(7)$, причем элемент f порядка 7 из $G_{\{F\}}$ действует без неподвижных точек на $S(G)_{\{F\}}$, либо $|S(G):S(G)_a|=|S(G):S(G)_{\{F\}}|=2$.

В последнем случае $S(G)$ — элементарная абелева 2-группа. Покажем, что порядок группы $S(G)_F$ делит 2. В противном случае найдутся две инволюции $g,h\in S(G)_F$, каждая из которых фиксирует точно 2 антиподальных класса. Отсюда $\Omega=\mathrm{Fix}(h)$, противоречие с действием группы $\langle g,h\rangle$ на $U=\{u\in\Gamma\mid d(u,u^g)=1\}$. Ввиду [2, теорема] имеем $S(G)_F=S(G)_{\{F\}}$, поэтому $S(G)=\langle z\rangle$ — группа порядка 2. Ввиду леммы 9 инволюция z фиксирует два антиподальных класса, противоречие с тем, что z поточечно фиксирует Γ.

Итак, $G\cong PGL_2(7)$, $T_a=Z_3$ поточечно фиксирует 4-клику, $T_{\{F\}}=Z_7.Z_3$ и любая инволюция из G действует без неподвижных точек на Γ. Компьютерные вычисления в GAP [10] показывают, что не существует дистанционно регулярного графа степени 15 с описанными свойствами.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{35,32,1;1,2,35\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Пусть F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a. В [4, теорема 1] доказано, что $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Ω — пустой граф и либо

(i) $p=17$, $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=34$ и $\alpha_2(g)=544$ или $\alpha_3(g)=612$, либо

(ii) $p=2,3$, $\alpha_3(g)=0$ и $\alpha_1(g)=36$;

(2) Ω лежит в антиподальном классе, $p=7$ и $|\Omega|=3,17$ или $p=5$ и $|\Omega|=7,17$;

(3) $p=3,5$ и Ω — граф икосаэдра;

(4) $p=2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g)=0$ и $\alpha_1(g)=34$.

Лемма 10. *Пусть G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если f — элемент порядка 17 из G, g — элемент простого порядка $p<17$ из $C_G(f)$, то $|g|=2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)=34$ и $|C_G(f)|=34$;*

(2) $S(G)=O_2(G)$;

(3) *цоколь группы $G/S(G)$ изоморфен $L_2(17)$.*

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 17 из G, g — элемент простого порядка $p<7$ из $C_G(f)$. Ввиду [4, теорема 1] из действия f на Ω следует, что либо $p=2,3$ и Ω — пустой граф, либо $p=5,7$ и Ω — антиподальный класс, либо $p=2$ и Ω — объединение двух антиподальных классов. Но если $p=2,3$ и Ω — пустой граф, имеем $\alpha_1(g)=36$, а если $p=5,7$ и Ω — антиподальный класс, имеем $\alpha_1(g)=35,35\cdot 17$. В последнем случае любая $\langle g\rangle$-орбита длины 7 является кликой. В любом случае получаем противоречие.

Если V — подгруппа порядка 4 из $C_G(f)$, содержащая g, и $U=\{u\in\Gamma\mid d(u,u^g)=1\}$, то $|U|=34$ и некоторая инволюция $h\in V$ фиксирует 2 вершины из U и переставляет антиподальные классы из Ω. В этом случае $U=\mathrm{Fix}(h)=\{u\in\Gamma\mid d(u,u^{gh})=1\}$. Аналогично $W=\{w\in\Gamma\mid d(w,w^h)=1\}$ совпадает с $\mathrm{Fix}(gh)$. Противоречие с тем, что $U=\{u\in\Gamma\mid d(u,u^{gh})=1\}=W$.

Пусть $R=O_3(G)\neq 1$. Тогда $|R:R_a|=9$ и для любого элемента g порядка 3 из R_a подграф Ω является графом икосаэдра. По [4, лемма 5] имеем $\alpha_1(g)=30$ и $\alpha_3(g)=90$. Если R_a содержит элементарную абелеву группу $\langle g,h\rangle$ порядка 9, то h фиксирует по крайней мере 3 вершины из $U=\{u\in\Gamma\mid d(u,u^g)=1\}$. С другой стороны, из действия h на $\Omega(a)$ следует, что $\Omega=\mathrm{Fix}(h)$, противоречие. Итак, $|R_a|$ делит 3, противоречие с действием элемента порядка 17 из G на R.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. Если $|\bar{T}| = 17$, то получим противоречие с утверждением (1). Итак, $S(G) = O_2(G)$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Заметим, что $\{2, 3, 17\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и $|G|$ не делится на 49. Если $|\bar{T}|$ не делится на 17, то получим противоречие с действием элемента порядка 17 на $\bar{T}$.

Значит, $|\bar{T}|$ делится на 17 и ввиду [8, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(17)$, $L_2(16)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$ или $Sp_8(2)$. Так как по [9] группа $\bar{T}$ содержит максимальную подгруппу индекса, делящего $36 \cdot 17$, то $\bar{T}$ изоморфна $L_2(17)$, $\bar{T}_a$ — циклическая группа порядка, делящего 8, и $|S(G) : S(G)_a| \cdot (16/|\bar{T}_a|) = 4$.

Лемма доказана.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о следствия в случае массива $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$. По лемме 10 либо группа G изоморфна $L_2(17)$ или $PGL_2(17)$, причем элемент f порядка 17 из $G_{\{F\}}$ действует без неподвижных точек на $S(G)_{\{F\}}$, либо $|S(G) : S(G)_a| = |S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 2$.

В последнем случае $S(G)$ — элементарная абелева 2-группа. Покажем, что порядок группы $S(G)_F$ делит 2. В противном случае найдутся две инволюции $g, h \in S(G)_F$, каждая из которых фиксирует точно 2 антиподальных класса. Отсюда $\Omega = \mathrm{Fix}(h)$, противоречие с действием группы $\langle g, h\rangle$ на $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$. Ввиду [4, теорема 1] имеем $S(G)_F = S(G)_{\{F\}}$, поэтому $S(G) = \langle z\rangle$ — группа порядка 2. Ввиду леммы 10 инволюция z фиксирует два антиподальных класса, противоречие с тем, что z поточечно фиксирует Γ.

Итак, либо $G \cong L_2(17)$, $T_a \cong Z_4$ и $T_{\{F\}} \cong Z_{17}.Z_4$, либо $G \cong PGL_2(17)$, $T_a \cong Z_8$ и $T_{\{F\}} \cong Z_{17}.Z_8$. Противоречие с тем, что для инволюции $g \in T_a$ подграф Ω — объединение двух антиподальных классов и $\alpha_1(g) = 34$.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Буриченко В.П., Махнев А.А.** О вполне регулярных локально циклических графах // Современные проблемы математики: тез. 42-й Всерос. молод. конф. / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2011. С. 11-14.
2. **Буриченко В.П., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {15,12,1;1,2,15} // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 4. С. 375–379.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 1. С. 14–18.
4. **Циовкина Л.Ю.** Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 285–293.
5. **Cameron P.J.** Permutation groups. London Math. Soc. Student Texts № 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.**Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
7. **Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E.** Antipodal distance transitive covers of complete graphs // Europ. J. Comb. 1998. Vol. 19, no. 4. P. 455–478.
8. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Rep. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
9. Atlas of finite groups / J.H.Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
10. **The GAP Group,** GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.7.8. 2015. URL: http://www.gap-system.org .

Белоусов Иван Николаевич
Поступила 11.03.2015
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: i_belousov@mail.ru