ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.54

О ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ СТОЛБЦАХ ТАБЛИЦЫ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП $\mathrm{Sp}_4(q)$ И $\mathrm{PSp}_4(q)$ ПРИ НЕЧЁТНОМ q [1]

В. А. Белоногов

Ранее автором была высказана гипотеза: если два столбца таблицы характеров конечной группы, соответствующие двум её классам сопряжённых элементов, полупропорциональны, то мощность одного из этих классов делит мощность другого. В статье получено новое её подтверждение. А именно, гипотеза доказана для симплектических групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при нечётном q. При чётном q гипотеза была доказана автором ранее.

Ключевые слова: конечные симплектические группы, таблица характеров, полупропорциональные функции.

V. A. Belonogov. On semiproportional columns in the character tables of the groups $\mathrm{Sp}_4(q)$ and $\mathrm{Sp}_4(q)$ for odd q.

Previously the author stated the following conjecture: if two columns of the character table of a finite group corresponding to two of its classes of conjugate elements are semiproportional, then the cardinality of one of these classes divides the cardinality of the other. We obtain a new confirmation of this conjecture. Namely, the conjecture is verified for the symplectic groups $\mathrm{Sp}_4(q)$ and $\mathrm{PSp}_4(q)$ for odd q. For even q the conjecture was proved by the author earlier.

Keywords: finite symplectic groups, character table, semiproportional functions.

Введение

Функции α и β из некоторого множества M в поле $\mathbb{C}$ называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества H из M пропорциональны ограничения α и β на H и их ограничения на $M \setminus H$. В частности, можно говорить о полупропорциональных характерах, о полупропорциональных строках или о полупропорциональных столбцах таблицы характеров конечной группы.

Понятно, что два неприводимых характера конечной группы полупропорциональны, если и только если полупропорциональны соответствующие им строки таблицы характеров этой группы. Возможна двойственная ситуация, когда полупропорциональны два столбца таблицы характеров группы. Для краткости, два класса сопряжённых элементов конечной группы G назовём *полупропорциональными*, если соответствующие им столбцы таблицы характеров группы G полупропорциональны. Классы сопряжённых элементов группы мы будем называть далее просто *классами* группы.

Тематика настоящей статьи связана с понятиями взаимодействия, D-блока и Φ-блока (см. [1] и также [2, гл. 3 и § 8.3]). Ранее автором было получено полное описание всех пар полупропорциональных неприводимых характеров и пар полупропорциональных классов (в другой терминологии — малых D-блоков и малых Φ-блоков соответственно [2]) в спорадических простых группах [3]; в группах $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$, $\mathrm{GL}_2(q)$ [4]; в группах $\mathrm{PGL}_3(q)$, $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{PGU}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$ [5]; в группах $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$ [6] и в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q [7].

В частности, для всех этих групп оказались справедливыми следующие две гипотезы.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469) и Комплексной программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5).

Гипотеза 1 (гипотеза о полупропорциональных характерах). *Если конечная группа G имеет два полупропорциональных неприводимых характера φ и ψ, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Гипотеза 2 (гипотеза о полупропорциональных классах). *Если конечная группа G имеет два полупропорциональных класса сопряжённых элементов, то мощность одного из этих классов делит мощность другого.*

В недавней статье [8] доказана гипотеза 1 для групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при нечётных q, а в [9] описаны все пары полупропорциональных неприводимых характеров в этих группах.

В настоящей статье, в теоремах 1 и 2 ниже, мы докажем для этих групп гипотезу 2. Заключительная формулировка дана в теореме 3, где не делается ограничений на чётность или нечётность числа q.

Напомним, что симплектическая группа $G = \mathrm{Sp}_4(q)$ при нечётном q имеет порядок $q^4(q^4 - 1)(q^2 - 1)$, $Z(G) = \langle z \rangle$ — группа порядка 2 и $G/Z(G) = \mathrm{PSp}_4(q)$ — простая группа. По определению $G = \{g \in \mathrm{GL}_4(q) \mid {}^t gAg = A\}$, где ${}^t g$ — матрица, транспонированная к g, и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теорем 1 и 2 состоит в анализе таблиц характеров рассматриваемых групп. Таблица характеров $\mathrm{X}(G)$ группы $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, полученная Б. Сринивасан в [10], приведена автором в более удобной форме и с учётом поправок А. Пшигоцкого [11] в [8, разд. 2] в таблицах A, ..., D, A', ..., D'. Ввиду их большого размера (занимающего 10 страниц) они здесь не приводятся. Поэтому при чтении настоящей статьи читателю *необходимо иметь под рукой статью* [8] (заметим, что в [8, с. 32] при определении множества R_2 вместо буквы σ ошибочно поставлена буква θ). Отметим также поправку к таблице $\mathrm{X}(G)$, сделанную автором в начале разд. 2 статьи [9]: в статье Б. Сринивасан [10] множество R_1 определено как множество $\{1, 2, \ldots, (q^2 - 1)/4\}$, но в этом случае число характеров вида $\chi_1^{(k)}$ оказывается меньше, чем $(q^2 - 1)/4$, в противоречие с утверждением автора; *корректное определение* должно быть таким: R_1 есть множество, состоящее из первых $(q^2 - 1)/4$ членов ряда, получающегося из натурального ряда $1, 2, \ldots$ удалением чисел k таких, что $\chi_1^{(k)} = \chi_1^{(j)}$ при некотором $j < k$ (значения характеров $\chi_1^{(k)}$ вычисляются по формулам из таблицы характеров группы G). В [9, разд. 3] сформулировано очень простое (и подтверждённое многими примерами) гипотетическое правило построения множества R_1 без каких-либо вычислений значений характеров. Некоторый подход к его доказательству предпринят в [12]. Но пока это — лишь гипотеза.

При $q = 3$ группа $\mathrm{PSp}_4(q)$ является также и группой чётной характеристики, поскольку $\mathrm{PSp}_4(3) \simeq \mathrm{PSU}_4(2) \simeq \mathrm{SU}_4(2)$. Как видно из её таблицы характеров (см. [13, с. 27]),

группа $\mathrm{PSp}_4(3)$ не имеет пар полупропорциональных классов.

Далее используются следующие обозначения: $\mathrm{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряжённых элементов группы G; g^G — класс сопряжённых элементов группы G, содержащий элемент g из G; $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых характеров G; $\mathrm{Irr}(G|N)$ — множество всех неприводимых характеров группы G, содержащих в своём ядре нормальную подгруппу N группы G; $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел; $\dot\cup$ — знак объединения попарно не пересекающихся множеств. Под *парой* мы понимаем здесь неупорядоченную пару, т. е. двухэлементное множество. Однако в выражениях типа “упорядоченная пара (x, y)” слово “упорядоченная” часто будем опускать.

Следующие теоремы 1 и 2 формулируются в терминах таблицы характеров группы $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, записанной в [8]. Для элемента g группы G через g' обозначается элемент gz в случае, когда $(gz)^G \neq g^G$. Напомним, что $\mathrm{Cl}(G) = A \,\dot\cup\, B \,\dot\cup\, C \,\dot\cup\, D$, где

A состоит из 14-и классов группы G с представителями $a_1 = 1$, $a_1' = z$, a_{21}, a_{21}', a_{22}, a_{22}', a_{31}, a_{31}', a_{32}, a_{32}', a_{41}, a_{41}', a_{42}, a_{42}', записанными в 6-и колонках;

$B = \dot\cup_{i=1}^{9} B_i$, где каждое B_i (записанное в отдельной колонке таблицы $\mathrm{X}(G)$) состоит из нескольких классов группы G;

C равно объединению нескольких множеств C_i и C_i', состоящих из нескольких классов группы G (при любом i множества C_i и C_i' записаны в одной колонке; всего — 4 колонки);

D есть множество из 9-и классов сопряжённых элементов с представителями d_1, d_{21}, d_{21}', d_{22}, d_{22}', d_{24}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}, записанными в 4-х колонках.

Из [8, разд. 2.1] непосредственно следует, что

$$\text{если элементы } x,\, y \text{ из } G \text{ записаны в одной колонке таблицы } \mathrm{X}(G), \text{ то } |x^G| = |y^G|. \qquad (0.1)$$

Сформулируем теперь полученные в статье результаты.

Теорема 1. *Пусть $\{x^G, y^G\}$ — пара полупропорциональных классов группы $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, где q нечётно $(x, y \in G)$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $\{x^G, y^G\} = \{x^G, (x')^G\}$, *где* $x \in \{a_1, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, d_{21}, d_{22}\}$;

(2) $\{x^G, y^G\} = \{d_{32}^G, d_{34}^G\}$;

(3) $\{x^G, y^G\}$ *содержится в одном из множеств*: B_j *при* $1 \le j \le 9$ *и* $C_j \cup C_j'$ *при* $j \in \{1, 21, 22, 3, 41, 42\}$.

В любом случае $|x^G| = |y^G|$.

Теорема 2. *Пусть $\{\overline{x}^{\overline{G}}, \overline{y}^{\overline{G}}\}$ — пара полупропорциональных классов группы $\overline{G} = \mathrm{PSp}_4(q)$, где q нечётно $(\overline{x}, \overline{y} \in \overline{G})$. Тогда $\{\overline{x}^{\overline{G}}, \overline{y}^{\overline{G}}\}$ содержится в одном из множеств: $\widehat{B_j}$ при $1 \le j \le 9$ и $\widehat{C_j}$ при $j \in \{1, 21, 22, 3, 41, 42\}$. При этом $|\overline{x}^{\overline{G}}| = c|\overline{y}^{\overline{G}}|$, где $c \in \left\{1, 2, \dfrac{1}{2}\right\}$.*

Здесь $\widehat{B_j}$ обозначает множество образов в $\overline{G} = G/Z(G)$ классов группы $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, содержащихся в B_j. Подобно определяется $\widehat{C_j}$.

Из теорем 1 и 2 и результатов статьи [7] непосредственно вытекает

Теорема 3. *Гипотеза 2 верна для групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при любом $q \ge 2$. Более того, если $\{x^G, y^G\}$ — пара полупропорциональных классов какой-либо из этих групп, то $|x^G| = c|y^G|$, где $c \in \left\{1, 2, \dfrac{1}{2}\right\}$.*

Напомним, что по [7] при чётном q группа $\mathrm{Sp}_4(q) = \mathrm{PSp}_4(q)$ имеет точно одну пару полупропорциональных классов и порядки этих классов равны (см. в [7] теорему 2, а также замечание, в котором указывается, что эта теорема верна и в исключительном случае $q = 2$, в котором $\mathrm{Sp}_4(2) \simeq S_6$).

1. Предварительные результаты

Предложение 1 [2, теорема 8З10]. *Пусть x^G и y^G — различные классы сопряжённых элементов группы G $(x, y \in G)$ и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Тогда равносильны условия:*

(1) $x^G \cup y^G$ — *Φ-блок группы G;*

(2) *при некоторых* $a, b \in \mathbb{C}$

$$\varphi(y) = a\varphi(x) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \Phi,$$
$$\chi(y) = b\chi(x) \quad \text{для всех} \quad \chi \in \mathrm{Irr(G)} \setminus \Phi.$$

Кроме того, если выполнены равенства условия (2), то $\{a, b\} = \left\{1, \ -\dfrac{|x^G|}{|y^G|}\right\}$.

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если x^G и y^G — полупропорциональные классы сопряжённых элементов группы G $(x, y \in G)$, то для любого $\chi \in \mathrm{Irr(G)}$*

(1) *либо* $\chi(x) = \chi(y)$, *либо* $\chi(x)|x^G| = -\chi(y)|y^G|$;
(2) $\chi(x) = 0 \Longleftrightarrow \chi(y) = 0$;
(3) *если* $\chi(x)$ *и* $\chi(y)$ — *ненулевые вещественные числа одного знака, то они равны.*

Заметим, что согласно утверждению (1) следствия 1 условие полупропорциональности двух классов x^G и y^G равных порядков равносильно условию $\chi(x) = \pm\chi(y)$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr(G)}$.

Следующие предложения будут использованы в доказательстве теоремы 2.

Предложение 2 [14, леммы 23, 24]. *Пусть* N — *нормальная подгруппа конечной группы* G *и* $g \in G$. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Существует взаимно однозначное отображение* $\varphi : \chi \to \widetilde{\chi}$ *множества* $\mathrm{Irr}(G|N)$ *на* $\mathrm{Irr}(G/N)$ *такое, что* $\widetilde{\chi}(gN) = \chi(g) = \chi(gn) = \chi(ng)$ *для всех* $\chi \in \mathrm{Irr}(G|N)$ *и* $n \in N$.

(2) *Пусть* $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ — *все неприводимые характеры группы* G, *не входящие в* $\mathrm{Irr}(G|N)$. *Тогда* $|C_G(g)| = |C_{G/N}(gN)| + \sum_{i=1}^k |\zeta_i(g)|^2$.

Предложение 3. *Пусть* G — *конечная группа с центром* Z *порядка* 2. *Тогда для любого* $g \in G$ *либо* $|C_G(g)| = |C_{G/Z}(gZ)|$, *либо* $|C_G(g)| = 2|C_{G/Z}(gZ)|$, *причём первый случай имеет место, если и только если* $\zeta(g) = 0$ *для всех характеров* ζ *группы* G, *не входящих в* $\mathrm{Irr}(G|Z)$.

Доказательство. Так как, очевидно, $C_{G/Z}(gZ) \geq C_G(g)/Z$ и $|C_G(g)/Z| = |C_G(g)|/2$, то $|C_{G/Z}(gZ)| \geq |C_G(g)|/2$. Но отсюда и из утверждения (2) предложения 2 непосредственно следует требуемое заключение.

Предложение 3 доказано.

2. Доказательство теоремы 1

Справедливость теоремы 1 при $q = 3$ непосредственно видна из [13, с. 27]. Далее предполагается, что $q \geq 5$. Мы будем рассматривать таблицу характеров $\mathrm{X}(G)$ группы G [8, табл. A–D$'$], используя предложение 1 и, в особенности, следствие 1. В таблице $\mathrm{X}(G)$ после двух вспомогательных полос имеются 32 нумерованные полосы, состоящие из значений нескольких характеров, указанных во 2-й колонке таблицы, и, подобно, после двух вспомогательных колонок имеются 23 нумерованные колонки, состоящие из значений неприводимых характеров на классах сопряжённых элементов, представители которых записаны в ней во 2-й полосе.

Очень важным рабочим инструментом является условие (2) следствия 1. А именно, как только мы замечаем, что в столбцах таблицы характеров, соответствующих двум классам x^G и y^G, хотя бы в одной строке таблицы стоит нуль в одном из этих столбцов и ненулевое значение в другом, мы заключаем, что классы x^G и y^G не полупропорциональны. Кроме того, согласно следствию 1 в столбцах таблицы характеров, соответствующих двум полупропорциональным классам x^G и y^G, имеется одно и то же число нулей, причём нули стоят в тех же самых строках. Ссылку на этот результат мы обычно не будем оговаривать.

Поскольку доказательство теоремы 2 во многом повторяет этапы доказательства теоремы 1, то далее мы будем вставлять некоторые замечания, позволяющие сократить доказательство теоремы 2.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 1.

Тот факт, что пары классов п. (1) теоремы 1 являются полупропорциональными, непосредственно следует из правила вычисления $\chi(x')$ по $\chi(x)$ для $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Напомним, что для получения значения $\chi(x')$ в таблице $\mathrm{X}(G)$ нужно взять запись из 2-й колонки той же строки и положить в ней $D = \chi(x)$. Поэтому $\chi(x') = \pm\chi(x)$, так как все значения характеров, записанные во 2-й колонке, равны $\pm D$. (Также полупропорциональны классы $c_j(i)^G$ и $(c_j(i)')^G$, где $i \in T_2$ и $j \in \{1, 21, 22\}$ или $i \in T_1$ и $j \in \{3, 41, 42\}$, но это — частные случаи п. (3) теоремы.)

Теперь нам нужно рассмотреть пары $\{x^G, y^G\}$ полупропорциональных классов группы G, отличные от приведённых в утверждении (1).

Лемма 1. *Пары классов элементов из различных колонок таблицы* $\mathrm{X}(G)$ *не полупропорциональны.*

Доказательство. Обозначим через Θ часть этой таблицы, состоящую лишь из полос с номерами 2, 3 и 6–10.

Замечание 1. Мы включили в Θ лишь неприводимые характеры, содержащие в своём ядре $Z(G) = \langle z \rangle$, чтобы иметь возможность применить полученные результаты в доказательстве теоремы 2 к группе $G/Z = PSp_4(q)$, используя утверждение (1) предложения 2.

Для каждого m с $3 \le m \le 23$ запишем возрастающую последовательность $N(m)$, состоящую из номеров i всех полос, входящих в Θ, таких что на пересечении i-й полосы и m-й колонки стоит нуль. При этом необходимо убедиться, что для любого $j \in \{2,3\} \cup \{6,\dots,10\}$, не входящего в $N(m)$, значения всех столбцов m-й колонки в j-й полосе отличны от нуля. Теперь из следствия 1 непосредственно вытекает, что

$$\begin{gathered}\text{класс } m\text{-й колонки может быть полупропорционален}\\ \text{классу } n\text{-й колонки только в случае, когда } N(m) = N(n).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Просматривая последовательно колонки таблицы $\mathrm{X}(G)$, запишем эти последовательности $N(m)$: $N(3) = (10)$, $N(4) = (2,7,9,10)$, $N(5) = (2,6,8,10)$, $N(6) = (2,6,7,8,9,10)$, $N(7) = (2,3,8,9)$, $N(8) = (6,7)$, $N(9) = (7)$, $N(10) = (6)$, $N(11) = (2,3,6,7)$, $N(12) = (6)$, $N(13) = (2,6)$, $N(14) = (7)$, $N(15) = (2,7,9,10)$, $N(16) = (6)$, $N(17) = (6,9,10)$, $N(18) = (8)$, $N(19) = (7,8,10)$, $N(20) = ()$, $N(21) = (10)$, $N(22) = (2,10)$, $N(23) = (2,3,10)$.

Отметим здесь все равные среди этих последовательностей: $N(3) = N(21)$, $N(4) = N(15)$, $N(9) = N(14)$, и $N(10) = N(12) = N(16)$. Отсюда и из (2.1) следует, что

$$\begin{gathered}\text{класс элементов } m\text{-й колонки может быть полупропорционален}\\ \text{классу элементов } n\text{-й колонки при } m < n \text{ только в случае, когда}\\ (m,n) \in \{(3,21),(4,15),(9,14),(10,12),(10,16),(12,16)\}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Теперь мы составим таблицу, которая завершит доказательство леммы 1.

(m,n)	Полосы	Характер χ	$\chi(g_m)$	$\chi(g_n)$
(3,21)	11	$\chi_1^{(2)}$	$1-q^2 \ne 0$	0
(4,15)	11	$\chi_1^{(2)}$	$1-q \ne 0$	0
(9,14)	16	$\chi_6^{(1)}$	0	$q-1 \ne 0$
(10,12)	18	$\chi_8^{(1)}$	0	$q+1 \ne 0$
(10,16)	22	$\xi_3^{(1)}$	0	$q+1 \ne 0$
(12,16)	18	$\chi_8^{(1)}$	$q+1 \ne 0$	0

В 1-м столбце таблицы записаны все пары (m,n) из списка, приведённого в (2.2). Во 2-м столбце указан номер некоторой полосы таблицы $\mathrm{X}(G)$, а в 3-м столбце указан некоторый характер, записанный в этой полосе. В 4-м и 5-м столбцах даны значения характера, записанного в предыдущем столбце, на произвольном элементе g_m из m-й колонки и на произвольном элементе g_n из n-й колонки (при условии, что эти значения не зависят от выбора элемента (класса) в указанной колонке). Всё это легко проверить по таблице $\mathrm{X}(G)$. Теперь ввиду п. (2) следствия 1 из таблицы следует, что для любой пары (m,n) из списка, приведённого в (2.2), класс m-й колонки не может быть полупропорционален классу n-й колонки. Отсюда и из предложения (2.2) следует неполупропорциональность классов из различных колонок.

Лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е 2. В таблице выше все характеры χ, за единственным исключением $\chi = \xi_3^{(1)}$, содержатся в Irr(G|Z(G)), что мы учтём при доказательстве теоремы 2. Использовать здесь вместо $\xi_3^{(1)}$ характер $\xi_3^{(2)}$ с ядром $Z(G)$ можно лишь при $q \geq 7$.

Отметим, что в таблице можно было бы в первых трёх строках взять 6-ю полосу с $\chi = \theta_9$, где пары $(\chi(g_m), \chi(g_n))$ имеют соответственно вид $(q(q+1)/2, (q+1)/2)$, $(q, 1)$ и $(2, q+1)$, что приводит к противоречию ввиду п. (3) следствия 1.

Теперь, чтобы установить условия (2) и (3) теоремы 1, необходимо рассмотреть пары классов $\{x^G, y^G\}$ такие, что $\{x^G, y^G\}$ содержится в A или в D и не удовлетворяет условию (1).

Согласно лемме 1 классы x^G и y^G должны быть записаны в одной колонке таблицы Х(G). Перечислим все такие пары:

$$\{a_{21}^G, a_{22}^G\},\ \{a_{21}'^G, a_{22}'^G\},\ \{a_{41}^G, a_{42}^G\},\ \{a_{41}'^G, a_{42}'^G\},\ \{d_{21}^G, d_{22}^G\},\ \{d_{21}'^G, d_{22}'^G\},\ \{d_{31}^G, d_{33}^G\},\ \{d_{32}^G, d_{34}^G\}. \qquad (2.3)$$

Заметим, что каждая из этих пар есть пара алгебраически сопряжённых классов группы G. Напомним, что в таблице Х(G) представители алгебраически сопряжённых классов записаны в одной колонке, причём в этой колонке даются значения неприводимых характеров лишь на одном из них; значения неприводимых характеров на другом получаются из значений на первом заменой b на b^* и b^* на b.

Лемма 2. *Среди пар, перечисленных в* (2.3)*, имеется лишь одна пара полупропорциональных классов, а именно пара* $\{d_{32}^G, d_{34}^G\}$. *Кроме того,* $\chi(d_{32}) = \pm\chi(d_{34})$ *для любого* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что a_{21}^G полупропорционален a_{22}^G. Так как $|a_{21}^G| = |a_{22}^G|$, то по п. (1) следствия 1 должно быть $\chi(a_{21}) = \pm\chi(a_{22})$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Однако это не верно при $\chi = \theta_1$, так как по таблице $\theta_1(a_{21}) = q^2 b = q^2(-1 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon q})/2$ и $\theta_1(a_{22}) = q^2 b^* = q^2(-1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon q})/2$, где $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$. Предположение о полупропорциональности классов a_{41}^G и a_{42}^G или классов $a_{41}'^G$ и $a_{42}'^G$ влечёт противоречивое равенство $\theta_3(a_{41}) = \pm\theta_3(a_{42})$, т. е. $b^* = \pm b$. Подобно доказывается неполупропорциональность пар $\{d_{21}^G, d_{22}^G\}$, $\{d_{21}'^G, d_{22}'^G\}$ (рассмотреть значения характера θ_1) и пары $\{d_{31}^G, d_{33}^G\}$ (рассмотреть значения характера θ_3).

Покажем, что классы d_{32}^G и d_{34}^G полупропорциональны. Рассмотрим колонку 23 таблицы Х(G), в которой отмечены элементы d_{32} и d_{34} и в следующих полосах приведены значения на них всех характеров $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Мы видим, что в большинстве полос $\chi(d_{32}) = \chi(d_{34})$. Исключение могут встретиться лишь в полосах, содержащих b и b^*, причём только в тех строках, в которых значения χ равны $\pm(b - b^*)$. Выпишем все χ с этим свойством:

θ_7, θ_8; $\xi_{21}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}$ при нечётном $k - t$; $\xi_{21}'^{(k)}, \xi_{22}'^{(k)}$ при чётном $k - t$; $\xi_{41}^{(k)}, \xi_{42}^{(k)}$ при нечётном $k - t$; $\xi_{41}'^{(k)}, \xi_{42}'^{(k)}$ при чётном $k - t$; φ_3, φ_4 при чётном t; φ_7, φ_8 при нечётном t.

Остаётся заметить, во всех этих случаях $\chi(d_{32}) = -\chi(d_{34})$. Для любого другого характера χ имеем $\chi(d_{32}) = \chi(d_{34})$.

З а м е ч а н и е 3. Каждый из перечисленных выше 14 характеров со свойством $\chi(d_{32}) = -\chi(d_{34})$ имеет единичное ядро (см. колонку 2).

Лемма 2 доказана.

Поэтому справедливы утверждения (2) и (3) теоремы 1.

Наконец, из леммы 1 и утверждения (0.1) следует, что полупропорциональные классы группы G имеют равные порядки.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Как отмечено во введении, группа $\mathrm{PSp}_4(3)$ не имеет пар полупропорциональных классов. Поэтому далее мы предполагаем, что $q \geq 5$. Таблицу характеров группы $G/Z(G) = PSp_4(q)$ можно получить из таблицы характеров группы G, используя п. (1) предложения 2. Выпишем множество $\mathrm{Irr}(G|Z(G))$ всех неприводимых характеров χ группы G, содержащих $Z(G)$ в своём ядре, т. е. таких, что $\chi(z) = \chi(1)$ (для проверки этого равенства при любом χ достаточно рассмотреть колонку под номером 2 в $\mathrm{X}(G)$). Пусть r — число таких характеров. Оставив в таблице $\mathrm{X}(G)$ лишь строки, соответствующие характерам $\mathrm{Irr}(G|N)$ (вычеркнув остальные), мы получим матрицу M размеров $r \times k$, где k — число классов сопряжённых элементов группы G. В этой матрице M присутствуют повторяющиеся столбцы, так как по предложению 2 $\chi(g) = \chi(gz)$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G|Z(G))$ и $g \in G$. Убрав из M повторные столбцы, мы получим таблицу характеров группы $G/Z(G)$.

Характер группы $G/Z(G)$, получающийся описанным здесь способом из характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G|Z(G))$, обозначим через $\widetilde{\chi}$. Для $\Psi \subseteq \mathrm{Irr}(G|Z(G))$ положим $\widetilde{\Psi} = \{\widetilde{\psi} \mid \psi \in \Psi\}$.

При естественном гомоморфизме $G \to \overline{G} := G/Z(G)$ образ подмножества (или элемента) X из G будем обозначать через $\overline{X}$. Отметим, что $\overline{g} = \overline{g'}$, где $g \in G$ и $g' = gz$, и $\overline{c_j(i)} = \overline{c'_j(i)}$.

Таким образом, таблицу характеров $\mathrm{X}(\overline{G})$ группы $\overline{G} := G/Z(G) = PSp_4(q)$ можно прочесть по таблице характеров группы G; при этом мы будем сохранять для $\mathrm{X}(\overline{G})$ номера соответствующих полос и колонок из $\mathrm{X}(G)$. Понятно, что при этом переходе от $\mathrm{X}(G)$ к $\mathrm{X}(\overline{G})$ некоторые из полос и колонок пропадают или "редеют". При этом, $\mathrm{Cl}(\overline{G}) = \widehat{A} \,\dot\cup\, \widehat{B} \,\dot\cup\, \widehat{C} \,\dot\cup\, \widehat{D}$, где $\widehat{A}$ есть множество всех классов $\overline{x}^{\overline{G}}$ таких, что $x^G \in A$, и подобно определяются $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$.

Для завершения доказательства нам достаточно доказать следующие утверждения:

(A) любые два полупропорциональных класса группы $\overline{G}$ записаны в одной колонке таблицы $\mathrm{X}(\overline{G})$;

(B) если $\overline{x}^{\overline{G}}$ и $\overline{y}^{\overline{G}}$ — полупропорциональные классы группы $\overline{G}$, то $\overline{x}^{\overline{G}} \cup \overline{y}^{\overline{G}}$ не содержится в $\widehat{A} \cup \widehat{D}$;

(C) если классы $\overline{x}^{\overline{G}}$ и $\overline{y}^{\overline{G}}$ группы $\overline{G}$ записаны в одной колонке таблицы $\mathrm{X}(\overline{G})$, то $|\overline{x}^{\overline{G}}| = c|\overline{y}^{\overline{G}}|$, где $c \in \left\{1, 2, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Сначала докажем (A). Внимательно просматривая доказательство леммы 1 и учитывая замечания 1–3, мы увидим, что можно повторить её аргументы, не выходя (при рассмотрении характеров) за рамки $\mathrm{Irr}(G|Z(G))$, лишь за одним исключением. А именно, в доказательстве леммы 1 в таблице при расмотрении пары $(m, n) = (10, 16)$ использован характер $\xi_3^{(1)}$, ядро которого не содержит $Z(G)$. Здесь (т. е. в доказательстве теоремы 2) вместо него мы возьмём характер $\xi_3^{(2)}$ с ядром $Z(G)$. Однако этот характер существует лишь при $q \geq 7$, и поэтому мы должны отдельно рассмотреть случай $q = 5$.

Итак, пусть $q = 5$. В этом случае в таблице вместо характера $\xi_3^{(1)}$ мы можем взять характер $\chi = \varphi_5$, поскольку ввиду равенства $t = (q-1)/2 = 2$ (t чётно) $\varphi_5 \in \mathrm{Irr}(G|Z(G))$. И теперь в предпоследней строке таблицы мы будем иметь: $\chi(g_{10}) = \varphi_5(b_4(1,2)) = 0$, но $\chi(g_{16}) = \varphi_5(c_1(2)) = 3 \neq 0$. Поэтому случай $(m, n) = (10, 16)$ также невозможен, и верно утверждение (A).

Для доказательства утверждения (B) рассмотрим доказательство леммы 2. В 1-м абзаце этого доказательства используются лишь характеры θ_1 и θ_3, лежащие в $\mathrm{Irr}(G|Z(G))$. Следовательно, мы можем перенести её аргументы на группу $\overline{G}$, и поэтому единственным контрпримером к утверждению (B) могла бы быть лишь пара $\{\overline{x}^{\overline{G}}, \overline{y}^{\overline{G}}\} = \{\overline{d_{32}}^{\overline{G}}, \overline{d_{34}}^{\overline{G}}\}$. Однако такая пара не существует, так как согласно замечанию 3 $\chi(d_{32}) = \chi(d_{34})$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G|Z(G))$, т. е. $\widetilde{\chi}(\overline{d_{32}}) = \widetilde{\chi}(\overline{d_{34}})$ для любого $\widetilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(\overline{G})$ и, значит, $\overline{d_{32}}^{\overline{G}} = \overline{d_{34}}^{\overline{G}}$. Утверждение (B) доказано.

Докажем (C). Предположим, что классы $\overline{x}^{\overline{G}}$ и $\overline{y}^{\overline{G}}$ группы $\overline{G}$ записаны в одной колонке таблицы $\mathrm{X}(\overline{G})$. Тогда (см. 4-й абзац доказательства теоремы 2) классы x^G и y^G группы G

должны быть записаны в одной колонке таблицы $\mathrm{X}(G)$ и, следовательно, по (0.1) имеют равные порядки. Но отсюда и из предложения 3 следует утверждение (C).

Таким образом, верно заключение теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** D-блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР. 1984. С. 3–31.
2. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. 380 с.
3. **Белоногов В.А.** Взаимодействия и D-блоки в конечных группах // Подгрупповая структура групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С. 4–44.
4. **Белоногов В.А.** О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.
5. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.
6. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.
7. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 19–37.
8. **Белоногов В.А.** К гипотезе о полупропорциональных характерах в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 19–37.
9. **Белоногов В.А.** Полупропорциональные неприводимые характеры групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при нечётных q // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2013. Т. 19, № 1. С. 25–40.
10. **Srinivasan B.** The characters of the finite symplectic group $\mathrm{Sp}(4, q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 131, № 2. P. 488–525.
11. **Przygocki A.** Schur indices of symplectic groups // Commun. Algebra. 1982. Vol. 10, № 3. P. 279–310.
12. **Белоногов В.А.** О суммах $\cos\frac{2n\pi}{q^2+1} + \cos\frac{2qn\pi}{q^2+1}$ при натуральных n и нечётных q // Алгебра и комбинаторика: тез. Междунар. конф., посв. 60-летию А. А. Махнева. Екатеринбург: Изд-во УМЦ-УПИ, 1913. С. 15–18.
13. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 285 p.
14. **Белоногов В.А., Фомин А.Н.** Матричные представления в теории конечных групп. М.: Наука, 1976. 126 с.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 27.01.2015