ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ НЕ СОДЕРЖАТ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. I [1]

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев

Исследуются конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. В настоящей части работы найдены изоморфные типы графов простых чисел и оценки фиттинговой длины разрешимых групп, а также определены почти простые группы.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, разрешимая группа, граф простых чисел.

O. A. Alekseeva, A. S. Kondrat'ev. Finite groups whose prime graphs do not contain triangles. I

Finite groups whose prime graphs do not contain triangles are investigated. In the present part of the work, the isomorphic types of prime graphs and estimates of the Fitting length of solvable groups are found and also almost simple groups are determined.

Keywords: finite group, almost simple group, solvable group, prime graph.

Введение

Графом простых чисел (или *графом Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq.

Лючидо в работе [20] описала конечные простые группы G такие, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями, т. е. связными графами, не содержащими циклы. Кроме того, в этой работе описано строение конечной группы, граф простых чисел которой является деревом. Мы рассматриваем более общую задачу описания строения конечной группы G такой, что граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников (3-циклов). Заметим, что условие "граф простых чисел конечной группы не содержит треугольников" переносится на подгруппы и фактор-группы этой группы. Легко доказывается (см. лемму 3.1), что если G — группа с таким свойством, то либо G разрешима, либо фактор-группа $G/S(G)$ группы G по ее разрешимому радикалу $S(G)$ *почти проста*, т. е. имеет неабелев простой цоколь $Soc(G)$. В настоящей части работы мы исследуем разрешимые и почти простые группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников.

В случае, когда исследуемая группа G разрешима, мы получаем следующий результат о ее строении в терминах графа $\Gamma(G)$ и фиттинговой длины $l_F(G)$ группы G.

Теорема 1. *Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если граф $\Gamma(G)$ несвязен, то G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа и граф $\Gamma(G)$ имеет точно две компоненты связности, каждая из которых является* 1- *или* 2-*цепью*;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 15-11-10025 (теорема 2), а также РФФИ, проект 13-01-00469, Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект 15-16-1-5, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.A03.21.0006) (теорема 1).

(2) *если граф* $\Gamma(G)$ *связен, то граф* $\Gamma(G)$ *является либо* n*-цепью для* $1 \le n \le 4$*, либо* 4*-циклом, либо* 5*-циклом*;

(3) *если граф* $\Gamma(G)$ *является* 2*-цепью, то число* $l_F(G)$ *может быть сколь угодно большим*;

(4) *если граф* $\Gamma(G)$ *является* 3*-цепью, то* $l_F(G) \le 6$;

(5) *если граф* $\Gamma(G)$ *является* 4*-цепью, то* $l_F(G) \le 4$;

(6) *если граф* $\Gamma(G)$ *является* 4*-циклом, то* $l_F(G) \le 5$;

(7) *если граф* $\Gamma(G)$ *является* 5*-циклом, то* $l_F(G) = 3$.

Более того, для каждого изоморфного типа графа $\Gamma(G)$*, кроме* 2*-цепи и* 5*-цикла, максимум числа* $l_F(G)$ *достигается на такой группе* G*, что фактор-группа* $G/O(G)$ *изоморфна группе* $2{\cdot}S_4^-$.

Пункты (1) и (2) теоремы 1 доказаны также в работе А. Грубера, Т. М. Келлера, М. Л. Льюиса, К. Нотона и Б. Штрассера [1, следствие 2.9]. Но в их доказательстве используются классификация графов простых чисел конечных разрешимых групп и некоторые комбинаторные результаты. Наше доказательство этих пунктов прямое, очень короткое и в нем не используются глубокие комбинаторные результаты. Кроме того, для доказательства п. (7) теоремы 1 мы ссылаемся на [1, предложение 4.4], так как в этом случае смогли получить только оценку $l_F(G) \le 4$.

Заметим, что полученные в теореме 1 оценки числа $l_F(G)$ точны (см. замечания 2–4), кроме, быть может, п. (6), который нуждается в дальнейшем исследовании.

В случае, когда исследуемая группа G почти проста, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* G — *конечная почти простая группа. Если граф* $\Gamma(G)$ *не содержит треугольников, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *группа* $Soc(G)$ *изоморфна одной из групп* A_n *для* $n \in \{5,6,7\}$, $L_2(q)$ *для* $q \in \{7, 2^3, 3^4, 11, 13, 17, 5^2, 7^2, 2^9\}$, $L_3(q)$ *для* $q \in \{3,4,5,17\}$, $U_3(q)$ *для* $q \in \{3,7\}$, $L_4(3)$, $U_4(q)$ *для* $q \in \{2,3\}$, $G_2(3)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{11}, M_{22};

(2) *группа* G *изоморфна одной из групп* A_8, $L_2(q)$ *для* $q \in \{2^4, 2^6\}$, $L_3(q)$ *для* $q \in \{7,8,9\}$, $L_3(7):2$, $L_3(9):2$, $U_3(q)$ *для* $q \in \{4,5,8\}$, $U_3(5):2$, $U_3(8):3$, $U_5(2)$;

(3) $Soc(G) \cong L_2(q)$ *для* $q \in \{5^3, 17^2\}$ *и* $PGL_2(q) \not\le G$;

(4) $Soc(G) \cong L_2(q)$*, где* $q \in \{2^p, 3^p\}$, p — *нечетное простое число и* $|\pi(q-1)| \le 2 \ge |\pi(q+1)|$;

(5) $G \cong L_2(p)$*, где* p — *простое число,* $p > 17$ *и* $|\pi(p-1)| \le 2 \ge |\pi(p+1)|$;

(6) $G \cong PGL_2(p)$*, где* p — *простое число, отличное от чисел Ферма и Мерсенна,* $p > 17$ *и* $|\pi(p^2-1)| = 3$;

(7) *группа* G *изоморфна* $L_2(q)$ *или* $L_2(q):r$*, где* $q = p^r$, $p \in \{3,5,7,17\}$, r — *простое число,* r *не делит* $|Soc(G)|$, $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ *для* $\varepsilon \in \{+,-\}$ *и* $|\pi(q-\varepsilon 1)| = \pi((q+\varepsilon 1)/2)| = 2$;

(8) *группа* G *изоморфна* $U_3(q)$ *или* $U_3(q):p$*, где* $q = 2^p$, p, $q-1$ *и* $(q+1)/3$ — *простые числа,* $p \ge 5$, $|\pi((q^2-q+1)/3)| = 1$ *и* p *не делит* $|Soc(G)|$;

(9) $Soc(G) \cong L_3^\epsilon(p)$*, где* $\epsilon \in \{+,-\}$, p — *простое число, отличное от чисел Ферма и Мерсенна,* $p \ge 11$, $(p-\epsilon 1)_3 = 3$, $|\pi(p^2-1)| = 3$ *и* $|\pi((p^2+\epsilon p+1)/3)| = 1$;

(10) $Soc(G) \cong Sz(2^f)$*, где либо* $f = 9$*, либо* f — *нечетное простое число и* $\max\{|\pi(q-1)|, |\pi(q-\sqrt{2q}+1)|, |\pi(q+\sqrt{2q}+1)|\} \le 2$;

(11) $G \cong {}^2G_2(q)$*, где* $q = 3^p$, p *и* $(q-1)/2$ — *нечетные простые числа,* $|\pi((q+1)/4)| = 1$ *и* $|\pi(q-\sqrt{3q}+1)| \le 2 \ge |\pi(q+\sqrt{3q}+1)|$.

Из теоремы 2 и [5; 25] получается

Следствие. *Пусть* G — *конечная почти простая группа и граф* $\Gamma(G)$ *не содержит треугольников. Тогда* (1) *каждая связная компонента графа* $\Gamma(G)$ *является деревом*; (2) *если группа* G *проста, то граф* $\Gamma(G)$ *несвязен*; (3) $|\pi(G)| \le 8$ *и равенство достигается, если* $G \cong \mathrm{Aut}(Sz(2^9))$.

Заметим, что теорема 2, в частности, существенно уточняет полученный в [20] список конечных простых групп таких, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями.

Вторая часть работы будет посвящена рассмотрению общего случая конечных неразрешимых групп, графы простых чисел которых не содержат треугольников.

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология, в основном, стандартны, их можно найти в [2; 10; 11; 14; 15]. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p и $\pi(n)$ обозначаются соответственно p-часть числа n и множество всех простых делителей числа n. Через $A \leftthreetimes B$ или $A : B$ обозначается расщепляемое расширение (полупрямое произведение) группы A посредством группы (на группу) B.

Пусть G — конечная группа. Обозначим число и множество связных компонент графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$ и $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$ соответственно; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Положим $\pi(G) = \pi(|G|)$.

Через $2{\cdot}S_4^-$ обозначается бинарная октаэдральная группа, т. е. нерасщепляемое расширение группы порядка 2 посредством группы S_4, силовская 2-подгруппа которого изоморфна обобщенной группе кватернионов порядка 16. Заметим, что $2{\cdot}S_4^- \cong SL_2(3){\cdot}2$.

Если G — конечная разрешимая группа, то через $l_F(G)$ обозначается ее *фиттингова длина*, т. е. наименьшая длина нормальных рядов группы G, все факторы которых нильпотентны. Число $l_F(G)$ здесь совпадает с длиной ряда $1 < F_1(G) < F_2(G) < \cdots < F_{n-1}(G) < F_n(G) = G$, где $F_1(G) = F(G)$ и $F_{i+1}(G)/F_i(G) = F(G/F_i(G))$ для $1 \leq i \leq n-1$.

Если группа G действует на группе H, то мы будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ (соответственно группа G) действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$ (соответственно $C_H(g) = 1$ для всех неединичных элементов $g \in G$).

Цепь с $n \geq 1$ вершинами называется *n-цепью*, а цикл с $n \geq 3$ вершинами — *n-циклом*. Граф, состоящий из n попарно не смежных вершин, называется *n-кокликой*.

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательствах теорем 1 и 2.

Предложение 1 (теорема Грюнберга — Кегеля [25, теорема A]). *Для группы G с несвязным графом $\Gamma(G)$ верно одно из следующих утверждений*:

(а) *G — группа Фробениуса*;

(б) *G — 2-фробениусова группа, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно*;

(в) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \leq A \leq \mathrm{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с условием $s(G) \leq s(P)$ и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Предложение 2 [14, замечание на с. 377]. *Пусть G — конечная группа, силовская 2-подгруппа которой изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, и $\overline{G} = G/O(G)$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(а) *$\overline{G}$ изоморфна силовской 2-подгруппе группы G*;

(б) *$\overline{G}$ изоморфна группе $2{\cdot}A_7$*;

(в) *$\overline{G}$ является расширением группы $SL_2(q)$, где q нечетно, посредством циклической группы нечетного или удвоенного нечетного порядка.*

Предложение 3 (лемма Мазурова [9, лемма 1]). *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Предложение 4. *Пусть p, q, r — различные простые числа и G — конечная группа вида $G = P \leftthreetimes (T \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где P — нетривиальная p-группа, T — q-группа, $|x| = r$ и $C_G(P) = Z(P)$. Если $[T, x] \neq 1$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(а) $C_P(x) \neq 1$;

(б) *$q = 2$, $r = 1 + 2^n$ — простое число Ферма и критическая подгруппа группы T экстраспециальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из [14, 5.1.4, 5.3.1] и [16, лемма]. □

Если порядок каждого элемента группы есть степень некоторого простого числа, то, следуя В. Ши, будем называть эту группу кратко *EPPO-группой.*

Предложение 5 [17, теорема 1; 24, теорема 16]. *Пусть G — конечная непримарная EPPO-грyппа. Тогда*

(а) *если G разрешима, то $|\pi(G)| = 2$ и G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа*;

(б) *если G проста, то G изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$.*

З а м е ч а н и е 1. Из п. (а) предложения 5, доказанного Г. Хигманом в [17, теорема 1], и классической теоремы Ф. Холла [14, теорема 6.4.1] немедленно вытекает следующее важное свойство конечных разрешимых групп, впервые отмеченное Лючидо в [19, теорема 1]: граф простых чисел конечной разрешимой группы не содержит 3-коклик.

2. Разрешимые группы

В этом разделе мы докажем теорему 1.

Лемма 2.1. *Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда*

(а) *если граф $\Gamma(G)$ несвязен, то G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа и граф $\Gamma(G)$ имеет точно две компоненты связности, каждая из которых является 1- или 2-цепью*;

(б) *если граф $\Gamma(G)$ связен, то граф $\Gamma(G)$ является либо n-цепью для $1 \leq n \leq 4$, либо 4-циклом, либо 5-циклом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) Допустим, что граф $\Gamma(G)$ несвязен. По п. (а) предложения 1 G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Ввиду [14, теорема 6.4.1] и замечания 1 граф $\Gamma(G)$ имеет точно две компоненты связности, которые являются кликами (полными графами). Поскольку граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, отсюда следует утверждение (а).

(б) Допустим, что граф $\Gamma(G)$ связен. Покажем, что степень (валентность) каждой вершины в $\Gamma(G)$ не превосходит 2. Предположим противное. Тогда в графе $\Gamma(G)$ существует вершина p, смежная с тремя различными вершинами q_1, q_2, q_3. Если подграф $\{q_1, q_2, q_3\}$ в графе $\Gamma(G)$ является кокликой, то ввиду [14, теорема 6.4.1] и граф простых чисел $\{q_1, q_2, q_3\}$-холловой подгруппы в G является кокликой, что противоречит замечанию 1. Поэтому можно считать, что вершины q_1 и q_2 смежны в графе $\Gamma(G)$. Но тогда $\{p, q_1, q_2\}$ есть треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Итак, степень каждой вершины в графе $\Gamma(G)$ не превосходит 2, в частности, граф $\Gamma(G)$ не содержит точек ветвления.

Предположим, что граф $\Gamma(G)$ не содержит циклов. Тогда ввиду [2, предложение 3, гл. IV] он является n-цепью для некоторого n. Если $n \geq 5$, то $\Gamma(G)$ содержит 3-коклику, что противоречит замечанию 1. Поэтому $n \leq 4$, т. е. утверждение (б) выполняется.

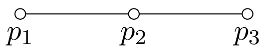
Пусть теперь граф $\Gamma(G)$ содержит n-цикл C для некоторого $n \geq 3$. Поскольку граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, $n \geq 4$. Если $n \geq 6$, то C содержит $(n-1)$-цепь, где $n - 1 \geq 5$, что противоречит предыдущему абзацу. Поэтому $n \in \{4, 5\}$. Если $C \neq \Gamma(G)$, то ввиду связности графа $\Gamma(G)$ он содержит вершину p, которая не лежит в C и смежна с некоторой вершиной из C. Теперь ясно, что подграф $C \cup \{p\}$ содержит 3-коклику, что невозможно по замечанию 1. Следовательно, $C = \Gamma(G)$. □

Лемма 2.2. *Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 2-цепью. Тогда число $l_F(G)$ может быть сколь угодно большим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что граф $\Gamma(G)$ есть 2-цепь $\{p,q\}$. Построим рекуррентно последовательность групп G_n $(n \in \mathbb{N})$, полагая G_1 равной циклической группе порядка pq и G_n — регулярному сплетению $G_{n-1} \wr G_1$ для $n > 1$. Тогда ясно, что $\Gamma(G_n)$ есть 2-цепь $\{p,q\}$ и $l_F(G_n) = n$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 3-цепью. Тогда либо $l_F(G) \leq 5$, либо $l_F(G) \leq 6$ и $G/O(G) \cong 2{\cdot}S_4^-$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Граф $\Gamma(G)$ имеет вид



Положим $\overline{G} = G/O_{p_2}(G)$. Тогда $O_{\{p_1,p_3\}}(\overline{G}) \neq 1$. Без ограничения общности можно считать, что $O_{p_1}(\overline{G}) \neq 1$. Поэтому $F(\overline{G}) = O_{p_1}(\overline{G})$ и $F_2(\overline{G})/F(\overline{G})$ является неединичной нильпотентной $\{p_2,p_3\}$-группой.

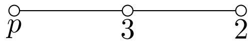
В G существует $\{p_1,p_3\}$-холлова подгруппа U. Тогда $U = P_1P_3$, где $P_i \in Syl_{p_i}(G)$ для $i \in \{1,3\}$. Поскольку граф $\Gamma(U)$ несвязен, ввиду предложения 1 подгруппа U есть группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Поскольку $1 \neq O_{p_1}(\overline{G}) \leq F(\overline{U})$, ввиду [14, теорема 10.3.1] подгруппа P_3 есть циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов, $F(U) \leq P_1$ и фактор-группа $P_1/F(U)$ циклическая.

Предположим, что $p_3 = 2$. Тогда U — группа Фробениуса с абелевым ядром P_1 и дополнением P_3. Поскольку $C_{\overline{G}}(F(\overline{G})) \leq F(\overline{G})$, имеем $F(\overline{G}) = \overline{P_1}$. По предложению 2 либо $G = O(G)P_3$, либо группа $G/O(G)$ изоморфна $SL_2(3)$ или $2{\cdot}S_4^-$. Поэтому $\overline{O(G)}/F(\overline{G}) = O_{p_2}(\overline{G}/F(\overline{G}))$ и, следовательно, $l_F(G) \leq 6$.

Пусть теперь $p_3 > 2$. Тогда подгруппа P_3 циклическая. Предположим, что p_3 делит $|F_2(\overline{G})|$. Возьмем в $F_2(\overline{G})$ подгруппу $\overline{T}$ порядка p_3. По лемме Фраттини имеем $\overline{G} = F_2(\overline{G})N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Положим $\overline{C} = C_{\overline{G}}(\overline{T})$. Ясно, что $\overline{C}$ является $\{p_2,p_3\}$-группой и $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{C}$ — циклическая группа. Легко видеть, что $\overline{P}_3 \leq \overline{C}$ и $N_{\overline{C}}(\overline{P}_3) \leq C_{\overline{C}}(\overline{P}_3)$. Поэтому ввиду теоремы Бернсайда (см. [14, теорема 7.4.3]) $\overline{C} = O_{p_3'}(\overline{C})\overline{P}_3 = O_{p_2}(\overline{C})\overline{P}_3$ и, следовательно, $l_F(G) \leq 5$.

Пусть теперь p_3 не делит $|F_2(\overline{G})|$. Тогда $F_2(\overline{G})/F(\overline{G}) = O_{p_2}(\overline{G}/F(\overline{G})) \neq 1$. Ввиду теоремы Шура — Цассенхауза [14, теорема 6.2.1] можно считать, что $F_2(\overline{G})\overline{T} = F(\overline{G}) \leftthreetimes (\overline{Q} \leftthreetimes \overline{T})$, где $\overline{Q}$ — некоторая силовская p_2-подгруппа из $F_2(\overline{G})$. Так как $[\overline{Q},\overline{T}] \neq 1$, ввиду предложения 4 имеем $p_2 = 2$ и $p_3 - 1$ есть степень 2. Группа $\overline{G}/F(\overline{G})$ точно действует на элементарной абелевой p_1-группе $F(\overline{G})/\Phi(F(\overline{G}))$ (см. [14, 5.1.4]). Поскольку $F_3(\overline{G})/F_2(\overline{G})$ является неединичной нильпотентной $\{p_1,p_3\}$-группой, она равна либо $O_{p_1}(\overline{G}/F_2(\overline{G}))$, либо $O_{p_3}(\overline{G}/F_2(\overline{G}))$. Если выполняется первый случай, то ввиду [10, (36.4)] подгруппа $\overline{T}$ централизует неединичный элемент из $F(\overline{G})/\Phi(F(\overline{G}))$ и, следовательно, централизует неединичный элемент из $F(\overline{G})$; противоречие. Поэтому выполняется второй случай. Тогда $\overline{G} = F_2(\overline{G})N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получим, что $l_F(G) \leq 5$. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Существует разрешимая группа G, для которой граф $\Gamma(G)$ является 3-цепью и $l_F(G) = 6$. Действительно, пусть p — простое число, большее 3, и $H = 2{\cdot}S_4^-$. Тогда $Z(H) = \langle z \rangle$, где z — (единственный) элемент порядка 2 в H. Хорошо известно (см. [11]), что существует неприводимый $GF(3)H$-модуль V размерности 3 с ядром $Z(H)$. Пусть $G_0 = V \leftthreetimes H$ — соответствующее этому модулю полупрямое произведение группы V на группу H. Тогда $F(G_0) = V \times \langle z \rangle$, $F_2(G_0) = VO_2(H)$, $F_3(G_0) = G_0'$ и $F_4(G_0) = G_0$, откуда $l_F(G_0) = 4$. Пусть $G_1 = \mathbb{Z}_p \wr G_0$ — регулярное сплетение группы $\mathbb{Z}_p$ с группой G_0. Тогда $G_1 = E \leftthreetimes G_0$, где E — элементарная абелева группа порядка p^{432}. Ввиду [14, теорема 5.2.3] имеем $E = C_E(z) \times [E,z]$. Подгруппа $E_0 := [E,z]$ неединична и нормальна в G_1. Положим $G_2 = E_0 \leftthreetimes G_0$ и $G = \mathbb{Z}_3 \wr G_2$ (сплетение регулярное). Тогда $G = W \leftthreetimes G_2$, где $W = F(G) = O_3(G)$ и $F_2(G) = WE_0$. Ясно, что граф $\Gamma(G)$ имеет вид



Легко видеть также, что $l_F(G)=6$.

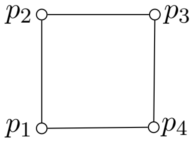
Лемма 2.4. *Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 4-цепью. Тогда либо $l_F(G)\leq 3$, либо $l_F(G)=4$ и $G/O(G)\cong 2{\cdot}S_4^-$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из [20, предложение 3]. $\square$

З а м е ч а н и е 3. В [20, пример 1] приведен пример разрешимой группы G вида $(7^2\times 13^2)\leftthreetimes 2{\cdot}S_4^-$, для которой граф $\Gamma(G)$ является 4-цепью и $l_F(G)=4$.

Лемма 2.5. *Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 4-циклом. Тогда либо $l_F(G)\leq 4$, либо $l_F(G)\leq 5$ и $G/O(G)\cong 2{\cdot}S_4^-$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Граф $\Gamma(G)$ имеет вид



.

Без ограничения общности можно считать, что $O_{p_1}(G)\neq 1$. Положим $\tilde G=G/F(G)$. Пусть $P_i\in Syl_{p_i}(G)$ для $1\leq i\leq 4$. В G существуют $\{p_1,p_3\}$-холлова подгруппа U и $\{p_2,p_4\}$-холлова подгруппа V. Можно считать, что $U=P_1P_3$ и $V=P_2P_4$. Поскольку графы $\Gamma(U)$ и $\Gamma(V)$ несвязны, ввиду предложения 1 каждая из подгрупп U и V является группой Фробениуса или 2-фробениусовой группой. Поскольку $1\neq O_{p_1}(G)\leq F(U)$, подгруппа P_3 есть циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов, $F(U)\leq P_1$ и фактор-группа $P_1/F(U)$ циклическая. Без ограничения общности можно считать, что $F(V)=O_{p_2}(V)\leq P_2$, подгруппа P_4 есть циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов и фактор-группа $P_2/F(V)$ циклическая. Пусть U_1 и V_1 — (единственные) подгруппы порядков p_3 и p_4 из подгрупп P_3 и P_4 соответственно.

Предположим, что $F(\tilde G)$ является $\{p_3,p_4\}$-группой. Тогда $F(\tilde G)$ — либо циклическая группа, либо прямое произведение циклической примарной группы нечетного порядка на (обобщенную) группу кватернионов. Поскольку $C_{\tilde G}(F(\tilde G))\leq F(\tilde G)$, ввиду теоремы Ремака отсюда следует, что группа $\tilde G/F(\tilde G)$ либо нильпотентна, либо изоморфна прямому произведению циклической группы на группу S_3, причем $G/O(G)\cong 2{\cdot}S_4^-$. Получаем, что в первом случае $l_F(G)\leq 3$, а во втором случае $l_F(G)\leq 4$.

Поэтому можно считать, что $O_{p_1}(\tilde G)\neq 1$ или $O_{p_2}(\tilde G)\neq 1$. Предположим, что $O_{p_1}(\tilde G)\neq 1$. Тогда $O_{p_2}(G)\neq 1$. Пусть X — полный прообраз в G подгруппы $O_{p_1}(\tilde G)\widetilde{V_1}$. Тогда ввиду теоремы Шура — Цассенхауза имеем $X=O_{p_2}(G)\leftthreetimes(Q\leftthreetimes V_1)$ для некоторой силовской p_1-подгруппы Q из X. Ясно, что $C_Q(O_{p_2}(G))=O_{p_1}(G)<Q$. Рассмотрим группу $\overline{X}=X/O_{p_1}(G)$. Тогда $\overline{X}=\overline{O_{p_2}(G)}\leftthreetimes(\overline{Q}\leftthreetimes\overline{V_1})$ и группа $\overline{Q}\leftthreetimes\overline{V_1}$ действует точно на $\overline{O_{p_2}(G)}$. Подгруппа $\overline{V_1}$ централизует подгруппу $\overline{Q}=O_{p_1}(\tilde G)$, так как в противном случае ввиду предложения 4 имеем $p_1=2$ и критическая подгруппа группы $\overline{Q}$ экстраспециальна, откуда центральная инволюция из $O_{p_1}(\tilde G)$ лежит в центре группы $\tilde G$, что противоречит несмежности вершин p_1 и p_3 в графе $\Gamma(G)$. Поэтому централизующая $O_{p_1}(\tilde G)$ подгруппа $O_{p_1'}(\tilde G)$ есть $\{p_2,p_4\}$-подгруппа, нормальная в $\tilde G$ и содержащая $\widetilde{V_1}$. Ясно, что $O_{p_1'}(\tilde G)$ — нормальная подгруппа в $\tilde V$ и, следовательно, либо $O_{p_2}(\tilde G)\neq 1$, либо $\widetilde{V_1}$ — нормальная подгруппа в $\tilde G$.

Предположим, что $O_{p_2}(\tilde G)\neq 1$. Тогда $\widetilde{O_{p_2}(V)}=[\widetilde{O_{p_2}(V)},\widetilde{V_1}]\leq O_{p_1'}(\tilde G)$, и поэтому $O_{p_2}(\tilde G)=\widetilde{O_{p_2}(V)}$. Рассуждая, как выше, получим, что подгруппа $\overline{U_1}$ централизует подгруппу $O_{p_2}(\tilde G)$

и $O_{p_2}(\tilde{G}) = \widetilde{O_{p_2}(V)}$. Отсюда следует, что в группе $F_3(G)/F_2(G)$ подгруппы $U_1F_2(G)/F_2(G)$ и $V_1F_2(G)/F_2(G)$ нормальны и, следовательно, эта группа является $\{p_3, p_4\}$-группой. Рассуждая, как выше, получим, что $l_F(G/F_2(G)) \leq 2$ или $l_F(G/F_2(G)) \leq 3$, причем $G/O(G) \cong 2{\cdot}S_4^-$. Поэтому утверждение леммы выполняется.

Пусть теперь $\widetilde{V_1}$ — нормальная подгруппа в $\tilde{G}$. Тогда подгруппа Фиттинга группы $\tilde{G}/O_{p_1}(\tilde{G})$ является $\{p_3, p_4\}$-группой. Рассуждая, как выше, получим, что утверждение леммы выполняется.

Итак, можно считать, что $O_{p_1}(\tilde{G}) = 1$ и $O_{p_2}(\tilde{G}) \neq 1$. Если $O_{p_2}(G) \neq 1$, то, как доказано выше, утверждение предложения выполняется. Пусть $O_{p_2}(G) = 1$. Тогда $F(G) = O_{p_1}(G)$ и, как выше, показываем, что подгруппа $\overline{U_1}$ централизует подгруппу $O_{p_2}(\tilde{G})$ и, следовательно, подгруппа Фиттинга группы $\tilde{G}/O_{p_2}(\tilde{G})$ является $\{p_3, p_4\}$-группой. Теперь, как и выше, получаем, что утверждение леммы выполняется. □

Лемма 2.6. *Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 5-циклом. Тогда $l_F(G) = 3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из [1, предложение 4.4]. □

З а м е ч а н и е 4. В [22, табл. 4] приведен пример разрешимой группы G вида $(5^2 \times 13) \rightthreetimes (2 \times F_{21})$, где F_{21} обозначает группу Фробениуса порядка 21, для которой граф $\Gamma(G)$ является 5-циклом и $l_F(G) = 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Если граф $\Gamma(G)$ несвязен, то ввиду п. (a) предложения 1, предложения 2 и [14, теорема 10.3.1] получаем, что либо $l_F(G) \leq 3$, либо $l_F(G) = 4$, G — группа Фробениуса и $G/O(G) \cong 2{\cdot}S_4^-$, так что утверждение теоремы выполняется. Если граф $\Gamma(G)$ связен, то утверждение теоремы следует из лемм 2.1–2.6. □

3. Почти простые группы

В этом разделе мы докажем теорему 2.

Лемма 3.1. *Пусть G — конечная неразрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда $\overline{G} := G/S(G)$ — почти простая группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда $F^*(\overline{G}) = M_1 \times \cdots \times M_n$, где $n \geq 2$ и $M_1, \ldots, M_n$ — простые неабелевы группы. Поэтому $2 \in \pi(M_i)$ и $|\pi(M_i)| \geq 3$ для всех i. Ясно, что существуют различные нечетные простые числа $p_1 \in \pi(M_1)$ и $p_2 \in \pi(M_2)$. Но тогда $\{2, p_1, p_2\}$ есть треугольник в графе $\Gamma(M_1 \times M_2)$; противоречие. □

Лемма 3.2. *Пусть G — конечная простая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда G изоморфна одной из групп из заключения теоремы 2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G \cong A_9$ или G — спорадическая простая группа, не изоморфная M_{11} и M_{22}, то из [11] следует, что граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, 3, 5\}$. Поскольку $A_n < A_{n+1}$, граф $\Gamma(A_n)$ для всех $n \geq 9$ содержит треугольник. Поэтому для спорадических и знакопеременных групп выполняется один из пп. (1), (2) теоремы 2.

Пусть теперь $G = L(q)$ — простая группа лиева типа L над полем $GF(q)$.

Предположим сначала, что L — классический тип. Группы $L_n(q)$, $U_n(q)$, $S_{2n}(q)$, $O_{2n}^{\pm}(q)$ и $O_{2n+1}(q)$ имеют секции, изоморфные группам $L_{n-1}(q)$, $U_{n-1}(q)$, $S_{2n-2}(q)$, $O_{2n-1}(q)$ и $O_{2n-1}(q)$ соответственно (см., например, [18, предложения 4.1.3, 4.1.4, 4.1.6]). Ввиду [12, табл. 8.8, 8.10, 8.12, 8.14, 8.18, 8.20, 8.26, 8.28, 8.39] группы $L_4(q)$, $U_4(q)$, $S_4(q)$ и $O_7(q)$ имеют секцию, изоморфную группе $O_4^+(q) \cong L_2(q) \times L_2(q)$, а группы $L_5(q)$, $U_5(q)$ и $U_6(q)$ имеют секции, изоморфные группам $L_2(q) \times L_3(q)$, $L_2(q) \times U_3(q)$ и $L_2(q) \times U_4(q)$ соответственно. Группы $S_4(2)' \cong A_6$, $L_4(2) \cong A_8$, $S_4(3) \cong U_4(2)$, $U_4(3)$ и $U_5(2)$ удовлетворяют одному из пп. (1), (2) теоремы 2. Кроме того, ввиду [11] и [6, таблица] графы простых чисел групп $S_6(2) \cong O_7(2)$, $S_6(3)$ и $O_7(3)$

содержат треугольники. Поэтому ввиду леммы 3.1 можно считать, что G изоморфна $L_2(q)$, $L_3(q)$ или $U_3(q)$.

Пусть $G = L_2(q)$. По [12, табл. 8.1] G имеет циклические подгруппы порядков $(q-1)/(2,q-1)$ и $(q+1)/(2,q-1)$. Отсюда следует, что $|\pi(q\pm1)/(2,q-1)| \leq 2$, в частности, $|\pi(q^2-1)| \leq 4$ и, следовательно, $|\pi(G)| \leq 5$. Ввиду [6–8] выполняется один из пп. (1)–(7) теоремы 2.

Пусть $G = L_3^\epsilon(q)$, где $\epsilon \in \{+,-\}$. По [12, табл. 8.3, 8.5] G имеет циклические подгруппы порядков $(q^2-1)/(3,q-\varepsilon 1)$ и $(q^2+\varepsilon q+1)/(3,q-\varepsilon 1)$. Поэтому $|\pi(q^2-1)| \leq 3$ и $|\pi((q^2+\varepsilon q+1)/(3,q-\varepsilon 1))| \leq 2$, в частности, $|\pi(G)| \leq 6$. Если $|\pi(q^2-1)| \leq 2$, то группа $L_2(q)$ является $EPPO$-группой и по п. (б) предложения 5 $q \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 17\}$, так что $|\pi(G)| \leq 5$ и ввиду [6–8] выполняется п. (1) теоремы 2. Пусть $|\pi(q^2-1)| = 3$. Тогда $|\pi((q^2-1)/(3,q-\varepsilon 1))| = 2$ и $(q^2-1)_3 = (3,q-\varepsilon 1) = 3$. Теперь ввиду [8] и [3, предложения 2.1, 2.2, 3.1, 4.1, 4.2] выполняется один из пп. (8), (9) теоремы 2.

Пусть теперь L — исключительный лиев тип. Если $G = G_2(q)$ и $q > 2$, то по [12, табл. 8.30, 8.41, 8.42] G имеет секцию, изоморфную группе $O_4^+(q) \cong L_2(q)\times L_2(q)$, поэтому ввиду леммы 3.1 получаем $q = 3$, так что выполняется п. (1) теоремы 2. Если $G = {}^3D_4(q)$, то по [12, табл. 8.51] группа G имеет секцию, изоморфную $L_2(q^3)\times L_2(q)$, и поэтому граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник.

Пусть $G = Sz(q)$, где $q = 2^f$ и f — неединичное нечетное число. По [12, табл. 8.16] G имеет циклические самоцентрализующиеся подгруппы порядков $q-1$, $q-\sqrt{2q}+1$ и $q+\sqrt{2q}+1$. Ясно, что $\max\{|\pi(q-1)|, |\pi(q-\sqrt{2q}+1)|, |\pi(q+\sqrt{2q}+1)|\} \leq 2$. Предположим, что f не просто. Тогда ввиду теоремы Жигмонди [26] $f = f_1 f_2$, где f_1 и f_2 — нечетные простые числа. Если $f_1 \neq f_2$, то число $q-1$ делится на взаимно простые числа $2^{f_1}-1$ и $2^{f_2}-1$, а также снова по теореме Жигмонди — на простое число, не делящее $(2^{f_1}-1)(2^{f_2}-1)$, что противоречит неравенству $|\pi(q-1)| \leq 2$. Поэтому $f_1 = f_2$ и $f = f_1^2$. Если $f_1 = 3$, то $q-1 = 7\cdot 73$, $q-\sqrt{2q}+1 = 13\cdot 37$ и $q+\sqrt{2q}+1 = 5\cdot 109$, так что выполняется п. (10) теоремы 2. Если $f_1 = 5$, то $q-1 = 301\cdot 601\cdot 1801$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник. Пусть $f_1 > 5$. Положим $q_0 = 2^{2f_1}$. По малой теореме Ферма $q_0^2 = 16^{f_1} \equiv 16 \pmod{f_1}$, откуда $q_0^2 - 1 \equiv 15 \pmod{f_1}$ и, следовательно, f_1 не делит q_0^2-1. По [5, лемма 3] имеем $((q_0^{2f_1}-1)/(q_0^2-1), q_0^2-1) = (f_1, q_0^2-1) = 1$. Но $(q_0^{2f_1}-1)/(q_0^2-1) = ((q_0^{f_1}-1)/(q_0-1))\cdot((q_0^{f_1}+1)/(q_0+1))$ и $(q_0^{f_1}-1, q_0^{f_1}+1) = 1$, следовательно, $((q^2+1)/(q_0+1), q_0+1) = 1$. Отсюда $(q^2+1)/(q_0+1) = ((q-\sqrt{2q}+1)/(2^{f_1}-\sqrt{2^{f_1+1}}+1))\cdot((q+\sqrt{2q}+1)/(2^{f_1}+\sqrt{2^{f_1+1}}+1))$, и поэтому $|\pi(2^{f_1}-\sqrt{2^{f_1+1}}+1)| = |\pi(2^{f_1}+\sqrt{2^{f_1+1}}+1)| = 1$. Но тогда в группе $Sz(2^{f_1})$ централизаторы элементов порядка 5 являются 5-группами и, следовательно, по [13] $f_1 \in \{3,5\}$, что противоречит предположению. Таким образом, выполняется п. (10) теоремы 2.

Пусть $G = {}^2G_2(q)$, где $q = 3^f$ и f — неединичное нечетное число. По [12, табл. 8.43] G имеет подгруппу, изоморфную $2\times L_2(q)$, и циклические подгруппы порядков $q-\sqrt{3q}+1$ и $q+\sqrt{3q}+1$. Поэтому $|\pi(q^2-1)| = 3$ и $\max\{|\pi(q-\sqrt{3q}+1)|, |\pi(q+\sqrt{2q}+1)|\} \leq 2$. Но тогда ввиду [8, лемма 1.3] выполняется п. (11) теоремы 2.

Пусть $G = {}^2F_4(q)'$, где $q = 2^f$ и f — нечетное число. Если $f = 1$, то ввиду [11] граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, так что выполняется п. (1) теоремы 2. Если $f > 1$, то ввиду [21] группа G имеет подгруппу, изоморфную $Sz(q)\times Sz(q)$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник.

Для остальных исключительных лиевых типов L граф $\Gamma(G)$ для группы $G = L(q)$ содержит треугольник, так как ввиду [23] имеем $S_8(q) < F_4(q) < E_6(q) < E_7(q) < E_8(q)$. □

Лемма 3.3. *Пусть G — конечная почти простая, но непростая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда G изоморфна одной из групп из заключения теоремы* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3.2 цоколь группы G изоморфен группе из пп. (1)–(11) заключения теоремы 2.

Если $|\pi(G)| \leq 5$, то справедливость утверждения леммы вытекает из [6–8; 11]. Поэтому можно считать, что $|\pi(G)| \geq 6$ и группа $Soc(G)$ изоморфна простой группе из пп. (4), (7), (8), (10) или (11) заключения теоремы 2.

Пусть группа $Soc(G)$ изоморфна группе из п. (4). Если $Soc(G) \cong L_2(3^p)$, то $|\pi(G)| \leq 5$. Поэтому $Soc(G) \cong L_2(2^p)$, где p — нечетное простое число и $|\pi(2^p \pm 1)| = 2$, следовательно, $G \cong \mathrm{Aut}(L_2(2^p))$ и p не делит $|Soc(G)|$. Ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка p из G изоморфен группе $L_2(2)) \cong S_3$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, откуда утверждение леммы выполняется.

Пусть группа $Soc(G)$ изоморфна группе из п. (7). Тогда $Soc(G) \cong L_2(q)$, где $q = p^r$, $p \in \{3, 5, 7, 17\}$, r — простое число, r не делит $|Soc(G)|$, $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $|\pi(q - \varepsilon 1)| = \pi((q + \varepsilon 1)/2)| = 2$. Отсюда $|\pi(Soc(G))| = 5$ и, следовательно, $L_2(q) : r \leq G$. Если $L_2(q) : r < G$, то $G \cong \mathrm{Aut}(L_2(p^r))$, откуда G содержит циклическую подгруппу порядка $q + \varepsilon 1$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\pi(q + \varepsilon 1)$; противоречие. Поэтому $G \cong L_2(q) : r$. Ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка r из G изоморфен $L_2(p))$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, откуда утверждение леммы выполняется.

Пусть группа $Soc(G)$ изоморфна группе из п. (8). Тогда $Soc(G) \cong U_3(q)$, где $q = 2^p$, p, $q - 1$ и $(q+1)/3$ — простые числа, $p \geq 5$, $|\pi((q^2 - q + 1)/3)| = 1$ и p не делит $|Soc(G)|$. Отсюда $|\pi(Soc(G))| = 5$ и, следовательно, $U_3(q) : p \leq G$. Если $U_3(q) : p < G$, то в G есть подгруппа вида $U_3(q) : 2$ или $U_3(q) : 3$ и по [6] граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник; противоречие. Поэтому $G \cong U_3(q) : p$. Ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка p из G изоморфен $U_3(2) \cong 3^2 : Q_8$. Но ввиду [3, предложение 3.1] вершины 2 и 3 не смежны в графе $\Gamma(Soc(G))$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, откуда утверждение леммы выполняется.

Пусть группа $Soc(G)$ изоморфна группе из п. (10). Тогда $Soc(G) \cong Sz(2^f)$, где либо $f = 9$, либо f — нечетное простое число. Ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] $G \cong \mathrm{Aut}(Sz(2^f))$ и централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка 3 и f из G изоморфен группе $Sz(8)$ и $Sz(2)$ в первом и втором случае соответственно, следовательно, ввиду [5] два различных простых делителя его порядка не лежат в одной компоненте связности графа $\Gamma(Soc(G)$. Поэтому граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, откуда утверждение леммы выполняется.

Пусть $Soc(G) \cong {}^2G_2(3^f)$, где f — нечетное простое число. Тогда ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] $G \cong \mathrm{Aut}(Soc(G)) \cong {}^2G_2(3^f) : f$ и централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка f из G изоморфен группе ${}^2G_2(3) \cong \mathrm{Aut}(L_2(8)) \cong L_2(8) : 3$ и, следовательно, ввиду [11] вершины 2 и 3 смежны в графе $\Gamma(G)$ и при $f > 3$ граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, 3, f\}$; противоречие. Пусть $f = 3$. Поскольку, как мы видели выше, $2 \times L_2(27) < Soc(G)$, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, 3, 7\}$; противоречие. $\square$

Теорема 2 теперь следует из лемм 3.2 и 3.3. $\square$

Авторы выражают благодарность А. В. Васильеву, В. И. Зенкову и Н. В. Масловой за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A characterization of the prime graphs of solvable groups / A. Gruber, T.M. Keller, M.L. Lewis, K. Naughton, B. Strasser // J. Algebra. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.08.040 .
2. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Гл. IV-VI. М.: Мир, 1972. 334 с.
3. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
4. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
5. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
6. **Kondratiev A.S.** Finite almost simple 5–primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 634-–674.
7. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.

8. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
9. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
10. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
11. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
12. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407.)
13. **Chen Z.M., Shi W.J.** On simple C_{pp}-groups // J. Southwest China Normal Univ. 1993. Vol. 18, no. 3. P. 249–256 (In Chinese).
14. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
15. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40, no. 3).
16. **Hartley B., Meixner T.** Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small // Arch. Math. (Basel). 1981. Vol. 36, no 3. P. 211–213.
17. **Higman G.** Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. (2.). 1957. Vol. 32. P. 335–342.
18. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 129.)
19. **Lucido M.C.** The diameter of the prime graph of finite groups // J. Group Theory. 1999. Vol. 2, no. 2. P. 157–172.
20. **Lucido M.C.** Groups in which the prime graph is a tree // Boll. Unione Mat. Ital. (8). 2002. Vol. 5-B, no. 1. P. 131–148.
21. **Malle G.** The maximal subgroups of ${}^2F_4(q^2)$ // J. Algebra. 1991. Vol. 139, no. 1. P. 52–68.
22. On realizability of a graph as the prime graph of a finite group / A.L. Gavrilyuk, I.V. Khramtsov, A.S. Kondrat'ev, N.V. Maslova // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 246–257.
23. **Stensholt E.** Certain embeddings among finite groups of Lie type // J. Algebra. 1978. Vol. 53, no. 1. P. 136–187.
24. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
25. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
26. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, no. 1. P. 265–284.

Алексеева Оксана Алексеевна
канд. физ.-мат. наук
проректор
Русско-Британский институт управления
e-mail: Alekseeva.O.A@rbiu.ru

Поступила 22.06.15

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru