ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.6

УДАЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ИЗ ФАСЕТНОГО ОПИСАНИЯ МНОГОГРАННИКА[1]

С. И. Бастраков, Н. Ю. Золотых

Рассматривается следующая задача: заданы вершинное и фасетное описания выпуклого многогранника, требуется найти вершинное описание нового многогранника, получаемого из исходного удалением заданных неравенств. Предлагается новый алгоритм решения задачи, приводятся доказательство его корректности и верхние оценки трудоемкости. В отличие от других подходов, предлагаемый алгоритм полиномиален в случае удаления одного неравенства. Результаты вычислительного эксперимента показывают превосходство предлагаемого алгоритма над инкрементным методом в ряде случаев.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, удаление неравенств, метод двойного описания.

S. I. Bastrakov, N. Yu. Zolotykh. Elimination of inequalities from a facet description of a polyhedron.

We consider the following problem: given vertex and facet representations of a convex polyhedron, compute a vertex representation of the polyhedron defined by a subsystem of inequalities of the original polyhedron. We present a new algorithm, prove its correctness, and give upper bounds for the complexity. Unlike other approaches, the proposed algorithm is polynomial for the case of removing one inequality. Computational experiments show that the algorithm outperforms the incremental method in a number of cases.

Keywords: convex polyhedra, constraint removal, double description method.

1. Введение

Каждый выпуклый многогранник (полиэдр) в $\mathbb{R}^d$ может быть представлен двумя способами: как множество решений системы линейных неравенств и как выпукло-коническая оболочка системы векторов [1–4]. Систему линейных неравенств, которая определяет многогранник, будем называть его *фасетным* описанием:

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^d : Ax \geq b\right\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times d}, \quad b \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

Вершинным описанием многогранника будем называть множество векторов, выпукло-коническая оболочка которых есть данный многогранник[2]:

$$P = \operatorname{conv}(v_1, v_2, \ldots, v_l) + \operatorname{cone}(u_1, u_2, \ldots, u_k), \quad v_i \in \mathbb{R}^d, \quad i = \overline{1, l}, \quad u_j \in \mathbb{R}^d, \quad j = \overline{1, k}. \tag{1.2}$$

Данные описания называются неприводимыми, если удаление любого элемента (неравенства в случае фасетного описания, вектора в случае вершинного описания) приводит к изменению задаваемого ими многогранника. Заметим, что вершинное описание выпуклого многогранника эквивалентно перечислению всех его граничных (угловых) решений [1].

В дальнейшем изложении под многогранниками будут подразумеваться выпуклые многогранники.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-07-31318).

[2]В общем случае не каждое неравенство в системе (1.1) обязательно соответствует фасете многогранника и не каждый вектор (1.2) обязательно является вершиной или рецессивным направлением многогранника. Поэтому фасетное описание многогранника может содержать не только фасеты, а вершинное описание — не только вершины и рецессивные направления. Тем не менее, данные названия широко распространены в современной литературе и в соответствии со сложившейся практикой используются без кавычек.

Одной из фундаментальных задач теории систем линейных неравенств является переход от описания многогранника в виде (1.1) к описанию (1.2) и обратно. Данная задача имеет не только теоретический интерес, но она появляется и в целом ряде приложений: при нахождении множества всех решений задачи линейного программирования [5], в методах отсекающих плоскостей для задач глобальной оптимизации [6], в биологической кинетике [7], при анализе, оптимизации и верификации программ для ЭВМ [8; 9], в задачах идентификации состояния динамических систем [10] и многих других (некоторые из таких приложений отмечены в [11]). Часто в таких задачах исходное множество ограничений $Ax \geq b$ в (1.1) может не быть зафиксировано, а может уточняться. Например, к этой системе могут добавляться новые неравенства, а некоторые из нее исключаться. Заметим, что задача добавления ограничений представляется более изученной: для перепостроения описания (1.2) при добавлении новых неравенств в описании (1.1) можно использовать любой инкрементный алгоритм, например, метод двойного описания [12; 13]. Наоборот, задача исключения неравенств изучена не достаточно сильно.

В настоящей работе рассматривается задача удаления неравенств из фасетного описания многогранника по заданным вершинному и фасетному описаниям в постановке [14]. Пусть для непустого многогранника P известны неприводимые вершинное и фасетное описания (1.1), (1.2). Рассмотрим многогранник, определяемый подсистемой неравенств с индексами из множества $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Его фасетное описание имеет вид

$$P(I) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon A(I)x \geq b(I)\}, \tag{1.3}$$

где под $A(I)$, $b(I)$ понимаются подматрица и подвектор, составленные из строк с индексами из множества I. Многогранник $P(I)$ получается из исходного многогранника P путем удаления подсистемы неравенств $A(I_{rem})x \geq b(I_{rem})$, где $I_{rem} = \{1, 2, \ldots, m\} \setminus I$, из фасетного описания. Задача состоит в построении неприводимого вершинного описания многогранника $P(I)$ по заданным неприводимым фасетному и вершинному описаниям многогранника P. Двойственной задачей является удаление элементов вершинного описания — построение фасетного описания многогранника, порождаемого подмножеством векторов, — она легко сводится к рассматриваемой задаче для двойственного многогранника. Требование неприводимости фасетного описания многогранника P является существенным, в противном случае результат удаления неравенств может определяться неоднозначно [14]. В качестве мотивации к исследованию данной задачи авторы [14] называют анализ, оптимизацию и верификацию программ [8; 9].

Задачу удаления неравенств из фасетного описания многогранника можно рассматривать как задачу построения вершинного описания многогранника $P(I)$ по заданному фасетному описанию (1.3) с дополнительной информацией о многограннике P (1.1), (1.2). Под прямым способом решения задачи будем понимать построение вершинного описания многогранника $P(I)$ без использования этой дополнительной информации. Таким образом, прямой способ состоит в решении классической задачи построения двойственного описания многогранника [1; 2]. Для нее известно [15], что при любой фиксированной размерности d существуют полиномиальные от длины входа алгоритмы; в противном случае, за исключением ряда семейств многогранников [16; 17], вопрос о существовании полиномиальных от суммарной длины входа и выхода алгоритмов является открытым, все известные алгоритмы не являются полиномиальными в указанном смысле.

Использование дополнительной информации о многограннике P может позволить ускорить решение задачи, особенно в случае удаления небольшого количества неравенств. Так, в [14] предложен алгоритм удаления неравенств из фасетного описания многогранника, названный авторами инкрементным, и эмпирически показано его превосходство над прямым построением вершинного описания. При этом основным этапом инкрементного алгоритма также является построение вершинного описания многогранника, определяемого некоторой подсистемой системы неравенств (1.3). Из результатов [15] следует, что при использовании любого из известных методов построения вершинного описания многогранника не удается дать полиномиальную верхнюю оценку трудоемкости прямого и инкрементного алгоритмов даже в случае удаления одного неравенства. В связи с этим возникает вопрос о существовании полиномиального алгоритма решения задачи удаления неравенств из фасетного описания многогранника, хотя бы для частного случая удаления фиксированного числа неравенств.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм, который явным образом не использует операцию построения вершинного описания многогранника. Вместо этого используется информация о смежности фасет и вершин/экстремальных лучей исходного многогранника. Приводятся верхние оценки трудоемкости в случае удаления одного и нескольких неравенств. В случае удаления одного неравенства предлагаемый алгоритм является полиномиальным от длины входа.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 вводятся используемые понятия и обозначения, а также показывается способ сведения задачи для многогранников к задаче для многогранных конусов. Краткое описание инкрементного алгоритма [14] содержится в разд. 3. Раздел 4 посвящен предлагаемому алгоритму. Результаты вычислительных экспериментов приводятся в разд. 5.

2. Выпуклые многогранники и многогранные конусы

Каждый многогранный (полиэдральный) конус в $\mathbb{R}^d$ может быть представлен двумя способами [1–4]. Фасетное описание задает конус как множество решений однородной системы линейных неравенств:

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^d \colon Ax \geq 0\right\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times d}.$$

Остовом конуса называется неприводимая система векторов, коническая оболочка которых есть данный конус:

$$C = \operatorname{cone}\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right), \quad u_i \in \mathbb{R}^d, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим через $U(C)$ остов конуса C.

Каждому многограннику в $\mathbb{R}^d$ вида (1.1) с помощью стандартной процедуры гомогенизации (см., например, [1; 4]) может быть поставлен в соответствие конус в $\mathbb{R}^{d+1}$ вида

$$C = \left\{(x_0, x)^T \in \mathbb{R}^{d+1} \colon -bx_0 + Ax \geq 0,\ x_0 \geq 0\right\}, \tag{2.1}$$

где пара (x_0, x), в которой $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, интерпретируется как вектор в $\mathbb{R}^{d+1}$. При этом исходный многогранник является пересечением конуса (2.1) с гиперплоскостью $\left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \colon x_0 = 1\right\}$ и имеется взаимно-однозначное соответствие между гранями многогранника и конуса.

Задача удаления неравенств из фасетного описания многогранника в $\mathbb{R}^d$ может быть сведена к аналогичной задаче для многогранного конуса в $\mathbb{R}^{d+1}$ следующим образом. С помощью гомогенизации построим конус $C(I)$, соответствующий многограннику $P(I)$:

$$C(I) = \left\{(x_0, x)^T \in \mathbb{R}^d : -b(I)x_0 + A(I)x \geq 0\right\}.$$

Пусть найден остов $U(C(I))$ этого конуса, тогда искомое вершинное описание многогранника $P(I)$ определяется следующим образом. Каждый вектор $w = (w_0, w_1, \ldots, w_d)^T \in U(C(I))$ в случае $w_0 \neq 0$ соответствует вершине $v = (w_1/w_0, w_2/w_0, \ldots, w_d/w_0)$ многогранника $P(I)$, а в случае $w_0 = 0$ — экстремальному лучу $u = (w_1, w_2, \ldots, w_d)$; результирующий многогранник является суммой выпуклой оболочки построенных таким образом вершин и конической оболочки рецессивных направлений. Сведе́ние к задаче для конуса удобно тем, что после гомогенизации вершины и экстремальные направления многогранника могут обрабатываться единообразно, различие между ними делается лишь при обратном переходе к многограннику. В дальнейшем рассматривается задача удаления неравенств из фасетного описания многогранного конуса.

Грани многогранника являются результатом его пересечения с такой гиперплоскостью, где многогранник целиком лежит в одном из определяемых ей замкнутых полупространств. Очевидно, любая грань многогранника сама является многогранником. *Фасетами d-мерного* *конуса* называются грани размерности $d-1$. *Две фасеты конуса* называются *смежными*, если их пересечение является гранью размерности $d-2$. Обозначим через $F(C)$ множество всех фасет конуса C и через $R(C)$ множество всех пар смежных фасет. *Два вектора остова* u, $v \in U(C)$ называются *смежными*, если их коническая оболочка является гранью размерности 2. Обозначим через $E(C)$ множество всех пар смежных векторов. Известно несколько критериев смежности фасет и векторов остова и способов их проверки [1; 2; 4; 7; 18; 19].

3. Инкрементный алгоритм удаления неравенств

В настоящем разделе дадим краткое описание алгоритма удаления неравенств, предложенного в [14] и названного авторами инкрементным. Так как фасетное описание исходного конуса является неприводимым, каждое из неравенств соответствует фасете. Обозначим через F множество фасет, соответствующих удаляемым неравенствам. В дальнейшем для краткости будем называть их *удаляемыми* фасетами. Строится множество фасет, смежных хотя бы с одной из удаляемых фасет, обозначим его через F_{adj}.

Обозначим через A_{adj} матрицу подсистемы неравенств, определяющих фасеты из F_{adj}. С помощью одной из модификаций метода двойного описания [12] строится остов конуса, определяемого неравенствами из A_{adj}:

$$C_{adj} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : A_{adj}x \geq 0\right\} = \operatorname{cone}(u_1, u_2, \dots u_n)\,.$$

В остове $U(C_{adj})$ найдем подмножество векторов U_{new}, которые не удовлетворяют хотя бы одному из удаляемых неравенств. Тогда для остова результирующего конуса справедливо включение $U(C(I)) \subseteq U(C) \cup U_{new}$. Таким образом, множество векторов $U(C) \cup U_{new}$ порождает искомый конус, однако не обязательно является неприводимым. Удаление избыточных элементов порождающего множества является стандартной процедурой, которая может быть выполнена достаточно эффективно [14], в результате получается искомый остов $U(C(I))$. Таким образом, трудоемкость алгоритма равна трудоемкости построения остова конуса C_{adj}. Вместо метода двойного описания может использоваться любой другой алгоритм построения двойственного описания многогранника, в ряде случаев это может давать существенное преимущество [15].

В случае удаления нескольких неравенств описанную процедуру можно произвести либо сразу для всех неравенств, либо итеративно для каждого из них. Авторы алгоритма отмечают, что, по-видимому, ни один из этих способов не является предпочтительным для всех случаев.

4. Новый алгоритм удаления неравенств

4.1. Описание алгоритма

Предлагаемый алгоритм производит итеративное удаление неравенств из фасетного описания конуса по одному. Рассмотрим процедуру удаления неравенства $ax \geq 0$. Пусть заданы неприводимые описания многогранного конуса C:

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^d \colon Ax \geq 0,\ ax \geq 0\right\} = \operatorname{cone}(u_1, u_2, \dots, u_n)\,, \tag{4.1}$$

необходимо найти остов конуса

$$C_{new} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \colon Ax \geq 0\right\}.$$

Обозначим через $U_+ = \left\{u \in U(C) \colon au > 0\right\}$ множество векторов остова, не лежащих на удаляемой фасете и через $U_0 = \left\{u \in U(C) \colon au = 0\right\} = U(C) \setminus U_+$ множество векторов остова, лежащих на удаляемой фасете. Обозначим через $a(f)$ вектор коэффициентов неравенства, соответствующего фасете f.

Обозначим удаляемую фасету как f_a. Аналогично инкрементному алгоритму найдем множество фасет F_{adj}, смежных с удаляемой. Инициализируем текущий остов множеством U_+. Найдем все ребра конуса, ровно один из векторов которых лежит в удаляемой фасете. Обозначим множество таких ребер через E_{adj}. Для каждого из ребер $(u, v) \in E_{adj} : u \in U_0, v \in U_+$ рассмотрим заданный в параметрическом виде луч $l_{uv}(t) = u + t(u - v)$, $t > 0$. Найдем ближайшую к удаляемой фасете точку пересечения луча с фасетами из F_{adj}, не содержащими луч полностью. Если такая точка существует, добавим ее к текущему остову, в противном случае добавим u к текущему остову. По окончании обработки всех ребер из E_{adj} текущий остов дает искомый остов конуса C_{new}. Приведем псевдокод алгоритма.

```
procedure DeleteFacet(C, a)
    U_+ := {u ∈ U(C) : au > 0}, U_0 := {u ∈ U(C) : au = 0}
    F_adj := {f ∈ F(C) : (f, f_a) ∈ R(C)}
    E_adj := {(u, v) ∈ E(C) : u ∈ U_0, v ∈ U_+}
    V_- := ∅, V_0 := ∅
    for each (u, v) ∈ E_adj
        w := FirstIntersection(F_adj, f, u, v)
        if (w ≠ ∞)
            V_- := V_- ∪ {w}
        else
            V_0 := V_0 ∪ {u}
        end
    end
    return U_+ ∪ V_0 ∪ V_-
end

procedure FirstIntersection(F_adj, f, u, v)
    G := {f ∈ F_adj : {u, v} ⊄ f}
    G_+ := {f ∈ G : a(f)v > a(f)u}
    if (G_+ ≠ ∅)
        t* := min_{f∈G_+} { a(f)u / (a(f)v − a(f)u) }
        return u + (u − v)t*
    else
        return ∞
    end
end
```

Множества U_+, U_0 строятся путем прямой подстановки векторов остова в удаляемое неравенство. Множества пар смежных фасет $R(C)$ и смежных векторов остова $E(C)$ определяются путем выполнения попарных тестов смежности аналогично методу двойного описания, например одним из способов [7; 18; 19]. Предлагается использование попарного “алгебраического” теста (см. [18]). Множество G в процедуре FirstIntersection является множеством фасет, не содержащих луч $l_{uv}(t)$ целиком, а G_+ — подмножеством таких фасет, пересекаемых лучом. В таком случае точка пересечения соответствует значению $\tilde{t} = a(f)u/(a(f)v - a(f)u)$ в параметрическом представлении луча; и $\tilde{t} > 0$, так как $a(f)u > 0$ в силу $u \in U_0$ и $a(f)v - a(f)u > 0$ в силу $f \in G_+$. Момент t^* соответствует первому пересечению лучом фасеты из F_{adj} (возможно, одновременному пересечению нескольких фасет). Поэтому точка $u+(u-v)t^*$ не удовлетворяет удаляемому неравенству, но удовлетворяет остальным неравенствам конуса и, следовательно, принадлежит конусу C_{new}. В следующем подразделе будет показано, что она принадлежит остову данного конуса.

4.2. Доказательство корректности

Теорема 1. *Предлагаемый алгоритм строит остов конуса C_{new}.*

Доказательство. Рассмотрим обратный переход от конуса C_{new} к C — операцию пересечения конуса C_{new} с полупространством $\{x \in \mathbb{R}^d \colon ax \geq 0\}$, выполняемую методом двойного описания в модификации [18]. Обозначим $U'_+ = \{u \in U(C_{new}) \colon au > 0\}$, $U'_0 = \{u \in U(C_{new}) \colon au = 0\}$, $U'_- = \{u \in U(C_{new}) \colon au < 0\}$. В результате комбинирования в методе двойного описания образовывались пары

$$U'_\pm = \{(au_+)u_- + (-au_-)u_+ : u_+ \in U'_+, u_- \in U'_-, (u_+, u_-) \in E(C')\},$$

остовы конусов C_{new} и C связаны следующим образом [18]:

$$U_+ = U'_+, \tag{4.2}$$

$$U_0 = U'_0 \cup U'_\pm. \tag{4.3}$$

Очевидно, $U' = U'_+ \cup U'_0 \cup U'_-$. Для доказательства корректности нужно показать, что для построенных алгоритмом множеств V_0, V_- справедливо равенство $U' = U_+ \cup V_0 \cup V_-$. В силу (4.2) достаточно показать, что $U'_0 = V_0$ и $U'_- = V_-$.

Покажем, что $U'_0 = V_0$. Из (4.3) следует $U'_0 \subseteq U_0$, поэтому в процессе работы алгоритма для каждого из векторов $u \in U'_0$ будут рассматриваться всевозможные пары $(u, v) \in E_{adj}$. Лучи $l_{uv}(t)$ не могут иметь точек пересечения с фасетами из F_{adj}, не содержащими $l_{uv}(t)$ полностью, так как в этом случае вектор u являлся бы конической комбинацией v и точки пересечения, что противоречит неприводимости U'_0. Таким образом, в процессе работы алгоритма каждый вектор $u \in U'_0$ будет добавлен в V_0, следовательно, $U'_0 \subseteq V_0$. Для доказательства обратного включения рассмотрим $u \in V_0$. В таком случае $u \in U_0 = U'_0 \cup U'_\pm$ и ни один из лучей $l_{uv}(t), (u, v) \in E_{adj}$ не пересекает фасет из F_{adj}. В случае $u \in U'_\pm$, вектор u являлся бы результатом комбинирования пары $(u_+, u_-) \in U'_+ \times U'_-$, что противоречит отсутствию точек пересечения (u_- была бы такой точкой). Поэтому $u \in U'_0$ и $V_0 \subseteq U'_0$, что завершает доказательство равенства $U'_0 = V_0$.

Покажем, что $U'_- = V_-$. При переходе от C_{new} к C каждая пара $(v, w) \in (U'_+ \times U'_-) \cap E(C_{new})$ в результате комбинирования создает вектор $u \in U_0$. При этом вектор w лежит на луче $l_{uv}(t)$ и является единственным вектором из $U(C_{new})$, лежащим на данном луче — в противном случае вектор w как ближайшее к f_a пересечение был бы избыточным, что противоречит неприводимости $U(C_{new})$. Поэтому в процессе работы алгоритма при обработке пары $(u, v) \in E_{adj}$ процедура FirstIntersection найдет именно вектор w. Таким образом, V_- совпадает с множеством векторов из U'_-, образующих хотя бы одну пару для комбинирования. Осталось показать, что U'_- состоит только из таких векторов, т. е. не существует вектор, который вместе со всеми смежными векторами лежит в U'_-. Если такой вектор u существует, т. е. неравенства, определяющие его опорный конус [4], при переходе от C_{new} к C станут неравенствами-следствиями, что противоречит требованию о неприводимости фасетного описания конуса C. $\square$

4.3. Анализ трудоемкости

Верхнюю оценку трудоемкости предлагаемого алгоритма устанавливает следующая теорема. Считается, что что любая арифметическая операция выполняется за время $O(1)$.

Теорема 2. *Трудоемкость удаления одного неравенства из фасетного описания конуса C (4.1) предлагаемым алгоритмом составляет $O(m^2n^2d)$, где $m = |F(C)|$, $n = |U(C)|$, d — размерность пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множества U_+, U_0 могут быть построены за время $O(nd)$ прямой подстановкой векторов остова в удаляемое неравенство. Для построения множества пар смежных фасет $R(C)$ будем использовать попарный "алгебраический" тест. Тогда трудоемкость проверки смежности одной пары фасет равна трудоемкости вычисления ранга матрицы размера не более $n \times d$ и составляет $O(n^2 d)$. Количество проверяемых пар составляет $O(m^2)$, поэтому трудоемкость построения множества $R(C)$ составляет $O(m^2 n^2 d)$. Аналогично, трудоемкость построения множества пар смежных векторов остова $E(C)$ составляет $O(m^2 n^2 d)$. Множества F_{adj} и E_{adj} строятся путем перебора элементов множеств $R(C)$ и $E(C)$ соответственно с проверкой необходимых условий, верхняя оценка трудоемкости данной операции равняется $O(m^2 n^2 d)$. Так как $|E_{adj}| < n^2$ и $|F_{adj}| < m^2$, количество итераций цикла по $(u, v) \in E_{adj}$ может быть оценено сверху как $O(n^2)$, а трудоемость итерации составляет $O(m^2)$. Следовательно, общая трудоемкость алгоритма составляет $O(m^2 n^2 d)$. □

Таким образом, в случае удаления одного неравенства трудоемкость предлагаемого алгоритма является полиномиальной от длины входа. В случае, когда производится последовательное удаление нескольких неравенств, общая трудоемкость зависит от размера остова промежуточных конусов. Хорошо известно, что данная величина не ограничена полиномом от размера входа и выхода (если размерность не фиксирована), а также может существенно зависеть от порядка удаления неравенств [15]. В общем случае удается лишь дать пессимистичную верхнюю оценку, устанавливаемую следующим утверждением.

Утверждение. *Трудоемкость последовательного удаления k неравенств из фасетного описания конуса при любой фиксированной размерности $d > 3$ составляет $O(k\, m^{2+2\lfloor (d-1)/2 \rfloor})$, где $m = |F(C)|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Максимальный размер остова конуса с m фасетами составляет $O(m^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor})$ [4]. Количество фасет после удаления i неравенств составляет $m - i$, поэтому трудоемкость удаления каждого из неравенств составляет $O(m^{2+2\lfloor (d-1)/2 \rfloor})$. Умножение на количество удаляемых неравенств дает суммарную верхнюю оценку.

Отметим, что полученная верхняя оценка совпадает с верхней оценкой инкрементного метода при последовательном удалении неравенств и использовании распространенных модификаций метода двойного описания [7; 18; 19].

5. Результаты вычислительных экспериментов

Нами была разработана программная реализация трех алгоритмов: прямого построения вершинного описания, инкрементного алгоритма [14] и предлагаемого алгоритма. Отметим, что в [14] предложено эвристическое правило, позволяющее комбинировать инкрементный и прямой алгоритмы, в разработанной программной реализации инкреметного алгоритма данное правило не используется. Реализация выполнена на языке программирования C++ на основе свободно распространяемого пакета операций над многогранниками qskeleton [20], реализующего модификацию метода двойного описания [21]. Вычислительные эксперименты проводились на узле кластера ННГУ "Лобачевский" с процессорами Intel Xeon E5-2660 и 64 ГБ ОЗУ.

Для сравнения эффективности алгоритмов были выбраны несколько семейств многогранников из библиотеки cddlib [22], использованных также в [14]. В дополнение к ним использовались многогранник C4(20) × C4(20), являющийся произведением двух 4-мерных циклических многогранников с 20 вершинами, и выпуклая оболочка sphere6 1000 точек, случайно равномерно распределенных на поверхности 6-мерной сферы. Для каждого из многогранников были решены задачи удаления 1, 5 и 10 неравенств со случайно выбранными индексами (одинаковыми для всех алгоритмов) из фасетного описания. Результаты вычислительного эксперимента приведены в таблице.

Сравнение времени работы программной реализации прямого, инкрементного и предлагаемого алгоритмов

Задача	n_{del}	T_{naive}	$T_{incremental}$	T_{new}
ccc6	1	4.2	*0.01*	*0.01*
ccc6	5	4.1	0.4	*0.3*
ccc6	10	3.8	2.3	*1.6*
sampleh8	1	35.6	5.2	*4.8*
sampleh8	5	38.1	13.1	*6.9*
sampleh8	10	42.9	12.5	*7.3*
trunc10	1	1.5	*0.1*	*0.1*
trunc10	5	2.7	*1.4*	1.6
trunc10	10	6.1	6.2	*4.3*
C4(20) $\times$ C4(20)	1	101.2	13.6	*2.4*
C4(20) $\times$ C4(20)	5	95.4	29.8	*16.1*
C4(20) $\times$ C4(20)	10	82.7	56.2	*45.7*
sphere6	1	15.4	*0.3*	0.7
sphere6	5	15.2	*1.1*	2.4
sphere6	10	14.8	*2.5*	5.1

Столбец n_{del} содержит количество удаляемых неравенств, столбцы T_{naive}, $T_{incremental}$ и T_{new} — время работы прямого, инкрементного и предлагаемого алгоритмов в секундах. Рекордные значения времени для каждой задачи выделены курсивом.

Проведенный вычислительный эксперимент показывает, что в большинстве рассмотренных случаев предлагаемый алгоритм превосходит инкрементный и оба алгоритма значительно превосходят прямой алгоритм. Достигается выигрыш относительно инкрементного алгоритма до 1.85 раз. При этом на задаче sphere6 предлагаемый алгоритм уступает инкрементному примерно в 2 раза. Результаты сравнения прямого и инкрементного алгоритмов в целом согласуются с [14], с менее ярко выраженным отставанием прямого алгоритма. Это может быть объяснено разницей в используемых модификациях метода двойного описания.

6. Заключение

В работе предложен новый алгоритм удаления неравенств из фасетного описания многогранника по заданным неприводимым вершинному и фасетному описаниям. Удаление неравенств производится последовательно, по одному на каждом шаге. Основной идеей алгоритма является поиск точек пересечения лучей, являющихся продолжением ребер, инцидентных векторам на удаляемой фасете, с фасетами, смежными удаляемой. Доказана корректность алгоритма.

Получена верхняя оценка трудоемкости удаления одного неравенства $O(|F(C)|^2|U(C)|^2d)$. В случае удаления одного неравенства предлагаемый алгоритм является полиномиальным от длины входа, в отличие от инкрементного алгоритма. Результаты вычислительных экспериментов показывают превосходство предлагаемого алгоритма над инкрементным алгоритмом [14] в большинстве случаев.

При этом наиболее трудоемким этапом предлагаемого алгоритма в большинстве случаев является построение множеств смежных фасет и векторов остова $R(C)$ и $E(C)$. В ряде случаев данные множества могут быть заранее найдены в процессе построения фасетного описания и остова исходного конуса, например, если для этого используется метод двойного описания. Кроме того, в случае последовательного удаления нескольких неравенств информация о смежности может храниться и обновляться для промежуточных конусов, а не перевычисляться заново при обработке каждого неравенства. Целью дальнейшей работы является разработка модификации предложенного алгоритма на основе данной идеи.

Авторы выражают благодарность рецензентам за конструктивные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.
2. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1970. 191 с.
3. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
4. **Циглер Г.** Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014. 586 с.
5. **Черникова Н.В.** Алгоритм для отыскания множества всех решений задачи линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 6. С. 1387–1395.
6. **Horst R., Pardalos P.M., Thoai N.** Introduction to global optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. 318 p. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 3.)
7. **Terzer M., Stelling J.** Large-scale computation of elementary flux modes with bit pattern trees // Bioinformatics. 2008. Vol. 24, iss. 19. P. 2229–2235.
8. **Cousot P., Halbwachs N.** Automatic discovery of linear restraints among variables of a program // Conf. Record of the Fifth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages. 1978. P. 84–96.
9. **Bagnara R., Hill P.M., Zaffanella E.** Applications of polyhedral computations to the analysis and verification of hardware and software systems // Theoret. Comput. Sci. 2009. Vol. 410, no. 46. P. 4672–4691.
10. **Панюков А.В.** Представление суммы Минковского для двух полиэдров системой линейных неравенств // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. № 14. С. 108–119.
11. **Зоркальцев В.И.** Иван Иванович Еремин и линейная оптимизация // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования / ИММ УрО РАН. № 13. Екатеринбург, 2015. С. 241–250.
12. Метод двойного описания / Т. С. Моцкин, Х. Райфа, Д. Л. Томпсон, Р. М. Тролл // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 81–109.
13. **Черникова Н.В.** Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 2. С. 334–337.
14. **Amato G., Scozzari F., Zaffanella E.** Efficient constraint/generator removal from double description of polyhedra // Electr. Notes Theor. Comput. Sci. 2014. Vol. 307. P. 3–15.
15. **Avis D., Bremner D., Seidel R.** How good are convex hull algorithms? // Comput. Geom. 1997. Vol. 7, no. 5-6. P. 265–301.
16. **Avis D., Fukuda K.** Reverse search for enumeration // Discrete Appl. Math. 1996. Vol. 65, no. 1-3. P. 21–46.
17. **Bremner D., Fukuda K., Marzetta A.** Primal-dual methods for vertex and facet enumeration // Discrete Comput. Geom. 1998. Vol. 20, no. 3. P. 333–357.
18. **Золотых Н.Ю.** Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 1. С. 153–163.
19. **Fukuda K., Prodon A.** Double description method revisited // Lecture Notes in Comput. Sci. 1996. Vol. 1120. P. 91–111.
20. GiTHub [site]: qskeleton. URL: https://github.com/sbastrakov/qskeleton .
21. **Бастраков С.И., Золотых Н.Ю.** Использование идей алгоритма Quickhull в методе двойного описания // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 232–237.
22. GiTHub [site]: cddlib. URL: https://github.com/mcmtroffaes/cddlib/ .

Бастраков Сергей Иванович
Поступила 1.06.2015
аспирант
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: bastrakov@vmk.unn.ru

Золотых Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: nikolai.zolotykh@gmail.com