ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.116

О РЕШЕТКЕ РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

В. А. Баранский, Т. А. Королева, Т. А. Сеньчонок

В работе рассматривается решетка разбиений натурального числа n, введенная Т. Брылавски. Наша цель — дать детальное обоснование новому, удобному для применений, способу задания отношения порядка, а также алгоритмам нахождения пересечения и объединения элементов в ней. Указанный нами способ задания отношения порядка, пересечения и объединения элементов в решетке разбиений натурального числа дает новые возможности для применения этих решеток в исследовании хроматических многочленов полных многодольных графов.

Ключевые слова: разбиение натурального числа, решетка, диаграмма Ферре.

V. A. Baransky, T. A. Koroleva, T. A. Sen'chonok. On the partition lattice of an integer.

The partition lattice of an integer introduced by T. Brylawski is studied. The aim is to give a detailed validation to a new practically convenient method of specifying an order relation and to algorithms for finding the intersection and the union of elements in this lattice. Our method of specifying an order relation and the union and intersection of elements in the partition lattice of a positive integer provides new opportunities for applying such lattices in the study of chromatic polynomials of complete multipartite graphs.

Keywords: integer partition, lattice, Ferrer's diagram.

Разбиением натурального числа n называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел

$$u = (u_1, u_2, \dots)$$

такая, что $u_1 \geq u_2 \geq \dots$, причем u содержит лишь конечное число ненулевых компонент и $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Число l такое, что $l \geq 1$, $u_l > 0$ и $u_{l+1} = u_{l+2} = \dots = 0$, назовем *длиной* разбиения u и обозначим через $l(u)$. Мы будем писать $n = sum(u)$ и для удобства записывать разбиение u в одном из следующих видов:

$$u = (u_1, u_2, \dots) = (u_1, \dots, u_l) = (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}) = (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, u_{l+2}) = \dots .$$

Разбиение натурального числа удобно изображать диаграммой Ферре, которую можно представлять в виде вертикальной стенки, сложенной из кубических блоков одинакового размера. На рис. 1 приведен пример такой диаграммы.

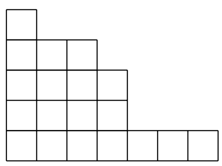


Рис. 1

На указанной диаграмме представлено разбиение числа 19 на 7 слагаемых: $19 = 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1$. Здесь 7 — длина разбиения $(5, 4, 4, 3, 1, 1, 1)$.

Потенциалом блока назовем число блоков, расположенных под данным блоком в соответствующем столбце диаграммы. *Потенциалом диаграммы* назовем сумму потенциалов всех ее блоков. Потенциал диаграммы, изображающей разбиение u, обозначим через $J(u)$.

Через $NPL(n)$, $NPL(n,t)$, $NPL(n, s..t)$, где $1 \leq s \leq t \leq n$, обозначим соответственно:

множество всех разбиений натурального числа n;

множество всех разбиений длины t натурального числа n;

множество всех разбиений длины l натурального числа n, для которых $s \le l \le t$.

Введем понятие *элементарного преобразования* разбиения $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ числа $n = sum(u)$. Предположим, что существуют натуральные числа $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}, i < j$, такие, что

1) $u_i - 1 \ge u_{i+1}$ и $u_{j-1} \ge u_j + 1$;

2) $u_i = u_j + \delta$, где $\delta \ge 2$.

Будем говорить, что разбиение $v = (u_1, u_2, \dots, u_i - 1, \dots, u_j + 1, \dots, u_t)$ получено элементарным преобразованием (или *перекидыванием блока*) разбиения $u = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_t)$, и будем писать в этом случае $u \to v$. Отметим, что v отличается от u точно на двух компонентах с номерами i и j. Для диаграммы Ферре такое преобразование означает перемещение верхнего блока i-го столбца вправо в j-й столбец. Условия 1) и 2) гарантируют, что после такого перемещения снова получится диаграмма Ферре. Указанное элементарное преобразование будем записывать в виде

$$\begin{bmatrix} i & j \\ u_i - 1 & u_j + 1 \end{bmatrix}.$$

Введем отношение $\ge$ на множестве $NPL(n)$, полагая $u \ge v$ для $u, v \in NPL(n)$, если v можно получить из u с помощью последовательного выполнения конечного числа (возможно, нулевого) элементарных преобразований.

Заметим, что после применения элементарного преобразования уменьшается на $\delta - 1$ потенциал диаграммы, так как на $\delta - 1$ уменьшается число блоков, находящихся под перемещаемым блоком. Следовательно, если $u, v \in NPL(n)$ и $u > v$, то $J(u) > J(v)$.

Теперь ясно, что отношение $\ge$ на множестве $NPL(n)$ является отношением частичного порядка.

В [1] было анонсировано без доказательства, что отношение $\ge$ совпадает с известным отношением доминирования на $NPL(n)$, относительно которого, как установил Т. Брылавски [2], $NPL(n)$ является решеткой. Одна из главных целей данной работы —- привести полное доказательство этого факта. Предлагаемый нами способ задания рассматриваемого отношения дает новые возможности для применения таких решеток при исследовании хроматических многочленов (см., например, [3]). Далее решетку вида $(NPL(n), \ge)$ будем называть *решеткой разбиений натурального числа n*.

В [1] были анонсированы также алгоритмы нахождения пересечения и объединения элементов в решетках $NPL(n)$. Другая цель работы — привести развернутое обоснование этих алгоритмов, отсутствующее в [1]. Кроме того, мы указываем новый способ применения этих алгоритмов в “обратном порядке”, который дает дополнительные возможности для вычислений в рассматриваемых решетках.

Перейдем к изучению порядка $\ge$ на $NPL(n)$.

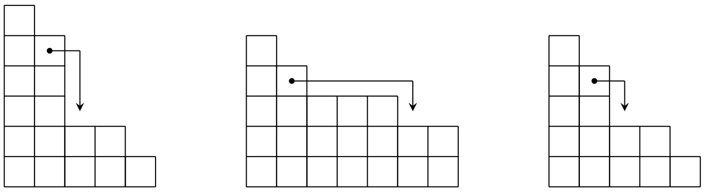
Элементарное преобразование разбиения натурального числа n, имеющее вид

$$\begin{bmatrix} i & i+1 \\ u_i - 1 & u_{i+1} + 1 \end{bmatrix},$$

будем называть *падением блока* (см. рис. 2(а)), а элементарное преобразование

$$\begin{bmatrix} i & j \\ u_i - 1 & u_j + 1 \end{bmatrix}$$

— *сдвигом блока* (см. рис. 2(б)), если $i + 1 < j$, $u_i = u_{i+1} + 1, u_{i+1} = u_{i+2} = \ldots = u_{j-1}$ и $u_{j-1} = u_j + 1$. Для удобства в дальнейшем падение блока при $\delta = 2$ также будем называть сдвигом блока (см. рис. 2(в)).



(а) (б) (в)

Рис. 2

Если разбиение v получается из разбиения u падением блока или сдвигом блока, то будем писать $u \Rightarrow v$.

Пример 1. $(7,5,1,1) \Rightarrow (7,4,2,1)$ — падение блока.

$(6,4,3,3,2,1) \Rightarrow (6,3,3,3,3,1)$ — сдвиг блока.

Как обычно [4], мы будем говорить, что разбиение u *покрывает* разбиение v в $NPL(n)$, если $u > v$ и не существует такого $w \in NPL(n)$, что $u > w > v$.

Лемма 1. *Разбиение u покрывает разбиение v в $NPL(n)$ тогда и только тогда, когда $u \Rightarrow v$.*

Доказательство. Если $u \Rightarrow v$, то, очевидно, u покрывает v. Теперь достаточно проверить, что для любого элементарного преобразования $u \to v$, не являющегося падением или сдвигом блока, разбиение u не покрывает разбиение v. Рассмотрим такое элементарное преобразование $u \to v$. Пусть оно имеет вид

$$\begin{bmatrix} i & j \\ u_i - 1 & u_j + 1 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что по определению элементарного преобразования выполняется $u_{j-1} > u_j$.

Случай 1. Пусть в $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ от i-го столбца до j-го столбца диаграммы Ферре имеется более одного “уступа”, т. е. более одного строгого неравенства в последовательности $u_i - 1 \geq u_{i+1} \geq u_{i+2} \geq \dots \geq u_j$. Тогда, перекидывая верхний блок i-го столбца последовательно через каждый уступ, мы заменим элементарное преобразование $u \to v$ на неодноэлементную цепочку элементарных преобразований, т. е. u не покрывает v.

Случай 2. Пусть в $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ от i-го столбца до j-го столбца диаграммы Ферре имеется точно один “уступ”, т. е. $u_i - 1 = u_{i+1} = u_{i+2} = \dots = u_{j-1} > u_j$. Поскольку элементарное преобразование $u \to v$ не является падением или сдвигом блока, здесь выполняется $i < j - 1$ и $u_i - u_j = \delta \geq 3$. Поэтому $u \to v$ можно заменить цепочкой из двух элементарных преобразований

$$\begin{bmatrix} j-1 & j \\ u_{j-1} - 1 & u_j + 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & j-1 \\ u_i - 1 & (u_{j-1} - 1) + 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, опять u не покрывает v. □

На множестве $NPL(n)$ зададим еще одно отношение $\trianglerighteq$, полагая $u \trianglerighteq v$ в случае, если

$$\begin{array}{rcl} u_1 & \geq & v_1 \\ u_1 + u_2 & \geq & v_1 + v_2 \\ & \dots & \\ u_1 + \dots + u_i & \geq & v_1 + \dots + v_i \\ & \dots & \\ u_1 + \dots + u_{t-1} & \geq & v_1 + \dots + v_{t-1}, \end{array} \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_t)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_t)$, t — максимальная из длин u и v. Конечно, здесь выполняется $u_1 + u_2 + \ldots + u_t = n = v_1 + v_2 + \ldots + v_t$ и $u_1 + u_2 + \ldots + u_s = v_1 + v_2 + \ldots + v_s$ при $s > t$. Поэтому условие (1) эквивалентно условию $u_1 + u_2 + \ldots + u_i \geq v_1 + v_2 + \ldots + v_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Теперь рефлексивность, антисимметричность и транзитивность отношения $\trianglerighteq$ очевидны, т. е. $\trianglerighteq$ является отношением частичного порядка на $NPL(n)$. Его называют отношением *доминирования*. Именно это отношение $\trianglerighteq$ было рассмотрено на $NPL(n)$ в [2].

Отметим, что из условия (1), в силу того что t — максимальная из длин u и v, вытекает $v_1 + v_2 + \ldots + v_{t-1} < n$, и поэтому $l(v) = t \geq l(u)$, т. е. из условия $u \trianglerighteq v$ следует условие $l(u) \leq l(v)$.

Лемма 2. *Пусть для* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_t), v = (v_1, v_2, \ldots, v_t) \in NPL(n)$, *где* t *— максимальная из длин* u *и* v, *выполняется* $u \triangleright v$. *Тогда существует* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_t) \in NPL(n)$ *такой, что* $u > z \trianglerighteq v$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по t. Отметим, что $t = l(v) \geq l(u)$.

При $t = 1$ утверждение тривиально. Частично упорядоченное множество $(NPL(n, 1..2), \geq)$ при $t = 2$ представляет из себя цепь

$$n \Rightarrow (n-1, 1) \Rightarrow (n-2, 2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor),$$

где $\lceil n/2 \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное $n/2$, а $\lfloor n/2 \rfloor$ — целая часть числа $n/2$. Поэтому на $NPL(n, 1..2)$ отношения $\geq$ и $\trianglerighteq$ совпадают и утверждение леммы верно.

Пусть $t \geq 3$. Рассмотрим условие (1), которое выполняется для u и v.

С л у ч а й 1. Пусть $u_1 = v_1$. Тогда, отбросив u_1 и v_1 в (1), получаем $(u_2, \ldots, u_t) \triangleright (v_2, \ldots, v_t)$. Заметим, что мы можем считать верным неравенство $l(u) > 1$, так как при $l(u) = 1$ выполняется $u = (n, 0, \ldots, 0)$, и поэтому $u > v$ (любое разбиение числа n можно получить перекидыванием блоков из его тривиального разбиения $(n, 0, 0, \ldots)$).

Теперь по предположению индукции в $NPL(n - u_1, 1..(t-1))$ выполняется

$$(u_2, \ldots, u_t) > (z_2, \ldots, z_t) \trianglerighteq (v_2, \ldots, v_t)$$

для некоторого $(z_2, \ldots, z_t)$. Положим $z_1 = u_1 = v_1$. Тогда, очевидно, имеем $z_1 = u_1 \geq u_2 \geq z_2$ и $z_1 = v_1 \geq v_2$. Определим $z \in NPL(n)$, полагая

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_t).$$

Ясно, что z – искомое разбиение, т. е.

$$(u_1, u_2, \ldots, u_t) > (z_1, z_2, \ldots, z_t) \trianglerighteq (v_1, v_2, \ldots, v_t).$$

Здесь неравенство $>$ обеспечивается такой же цепочкой элементарных преобразований, как и при переходе от $(u_2, \ldots, u_t)$ к $(z_2, \ldots, z_t)$. Для $\trianglerighteq$ условие типа (1) получается из соответствующих условий, обеспеченных выполнением неравенства

$$(z_2, \ldots, z_t) \trianglerighteq (v_2, \ldots, v_t),$$

добавлением z_1 слева и v_1 справа к каждому из неравенств и указанием тривиального равенства $z_1 = v_1$.

С л у ч а й 2. Пусть $u_1 > v_1$. Тогда существует такое $i \leq t - 1$, что

$$\begin{array}{rcl} u_1 & > & v_1 \\ u_1 + u_2 & > & v_1 + v_2 \\ & \ldots & \\ u_1 + \ldots + u_i & > & v_1 + \ldots + v_i \\ u_1 + \ldots + u_{i+1} & = & v_1 + \ldots + v_{i+1}. \end{array} \qquad (2)$$

Отсюда выводим $v_1 + v_2 + \ldots + v_{i+1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{i+1} > v_1 + v_2 + \ldots + v_i + u_{i+1}$ и, следовательно, $v_{i+1} > u_{i+1}$.

Возьмем теперь наименьшее $j \leq i$ такое, что

$$u_1 \geq v_1, u_2 \geq v_2, ..., u_j \geq v_j, u_{j+1} < v_{j+1}.$$

Тогда имеем $u_1 > v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_j \geq v_{j+1} > u_{j+1}$, поэтому $\delta = u_1 - u_{j+1} \geq 2$.

Выберем такое $p \leq j$, что $u_1 = u_2 = \ldots = u_p > u_{p+1} \geq \ldots \geq u_{j+1}$ (случай $p = j$ не исключается).

2.1. Пусть $u_p - u_{p+1} \geq 2$. Тогда в $(u_1, u_2, \ldots, u_t)$ выполним падение блока

$$\begin{bmatrix} p & p+1 \\ u_p - 1 & u_{p+1} + 1 \end{bmatrix}$$

и положим $z = (z_1, z_2, \ldots z_t) = (u_1, u_2, \ldots, u_p - 1, u_{p+1} + 1, \ldots, u_t)$. Найденное разбиение z удовлетворяет заключению леммы.

В самом деле, после замены в условии (2) чисел в соответствии с указанным падением блока неравенство с номером p сохранится, но может стать нестрогим, а все остальные неравенства, очевидно, тоже сохранятся.

2.2. Пусть $u_p - u_{p+1} = 1$. Тогда существует такое $q \leq j$, что

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_p > u_{p+1} = \ldots = u_q > u_{q+1}$$

и $p < q$. Тогда в $(u_1, u_2, \ldots, u_t)$ совершим элементарное преобразование

$$\begin{bmatrix} p & q+1 \\ u_p - 1 & u_{q+1} + 1 \end{bmatrix}$$

и получим искомое разбиение

$$(z_1, z_2, \ldots z_t) = (u_1, u_2, \ldots, u_p - 1, \ldots, u_{q+1} + 1, \ldots, u_t).$$

Действительно, после замены в условии (2) чисел в соответствии с указанным элементарным преобразованием неравенства с номерами от p до q сохранятся, но могут стать нестрогими. Остальные же неравенства, очевидно, сохранятся. □

Следствие 1. *Если $u \trianglerighteq v$ в $NPL(n)$, то $u \geq v$.*

Поскольку элементарные преобразования перемещают блоки вправо, верно утверждение, обратное утверждению следствия 1. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Отношения $\geq$ и $\trianglerighteq$ совпадают на $NPL(n)$.* □

Пусть даны два разбиения $u = (u_1, u_2, \ldots, u_t), v = (v_1, v_2, \ldots, v_t) \in NPL(n)$, где t — наибольшая из длин u и v. Укажем алгоритм вычисления вспомогательной последовательности $w = w(u, v) = (w_1, w_2, \ldots)$.

А л г о р и т м. Полагаем $\Delta_0(u) = 0$ и $\Delta_0(v) = 0$ (это начальные *запасы* для u и v).

Для $i = 1, 2, \ldots$ выполняем следующие действия до тех пор, пока не получим число w_i, равное 0 :

i) полагаем

$$w_i = \min\{u_i + \Delta_{i-1}(u), v_i + \Delta_{i-1}(v)\}$$

и определяем *запасы* для u и v после i-го этапа:

$$\Delta_i(u) = u_i + \Delta_{i-1}(u) - w_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_i - w_1 - w_2 - \ldots - w_i \geq 0,$$

$$\Delta_i(v) = v_i + \Delta_{i-1}(v) - w_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_i - w_1 - w_2 - \ldots - w_i \geq 0.$$

П р и м е р 2. $n = 44,\ \ t = 7$.

$\Delta =$	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
$u =$	13	9	7	6	5	3	1	
$v =$	12	11	9	4	3	3	2	
$\Delta =$	*0*	*0*	*1*	*3*	*1*	*0*	*0*	*0*
$w =$	12	10	7	6	4	3	2	

Ясно, что всегда $\Delta_1(u) = 0$ или $\Delta_1(v) = 0$, причем

$$min\{u_1, v_1\} = w_1 \leq max\{u_1, v_1\}.$$

Лемма 3 [1, лемма 2]. *Для любого $i = 2, 3, \ldots$ такого, что $w_i \neq 0$, выполняются утверждения:*

1) $\Delta_i(u) = 0$ *или* $\Delta_i(v) = 0$*;*

2) $w_{i-1} \geq w_i$*;*

3) $\min\{u_i, v_i\} \leq w_i \leq \max\{u_i, v_i\}$*.*

Следствие 2. *Алгоритм завершает работу на этапе $t + 1$ построением разбиения w числа n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку t — наибольшая из длин u и v, в силу равенства $num(u) = num(v) = n$ имеем $w_1, w_2, ..., w_t \neq 0$. Из условия $\Delta_t(u) = 0$ или $\Delta_t(v) = 0$ с учетом равенств $u_{t+1} = v_{t+1} = 0$ вытекает $w_{t+1} = 0$. □

Лемма 4 [1, лемма 3]. *Разбиение $w = w(u, v)$ является пересечением $u \wedge v$ разбиений u и v в $(NPL(n), \leq)$.*

Отметим важное для приложений свойство указанного алгоритма. Из определения алгоритма легко следует, что его можно применять справа налево.

Вначале для разбиений $u = (u_1, u_2, \ldots, u_t)$ и $v = (v_1, v_2, \ldots, v_t)$ натурального числа n полагаем $\Delta_t(u) = 0$ и $\Delta_t(v) = 0$ (это начальные *дефициты* для u и v). Для $i = t, t-1, \ldots, 1$ последовательно выполняет следующие действия:

(i.1) полагаем $w_i = \max\{u_i - \Delta_i(u), v_i - \Delta_i(v)\}$;

(i.2) определяем *дефициты* для u и v после i-го этапа:

$$\Delta_{i-1}(u) = w_i - (u_i - \Delta_i(u)),$$

$$\Delta_{i-1}(v) = w_i - (v_i - \Delta_i(v)).$$

Отметим, что "таблица" выполнения алгоритма в "обратном" порядке будет абсолютно такой же, как и "таблица" его выполнения слева направо (см., например, пример 2).

Вернемся теперь к диаграммам Ферре. Для каждой диаграммы Ферре разбиения $u \in NPL(n)$ имеется *кодиаграмма* Ферре его *коразбиения* $\tau(u) \in NPL(n)$. Рассмотрим

П р и м е р 3.

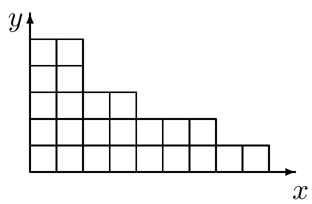


Рис. 3

На рис. 3 представлена диаграмма Ферре для $n = 24 = 5+5+3+3+2+2+2+1+1$ и $l = 9$.

Поменяем ролями оси x и y, т. е. рассмотрим новую диаграмму, роль столбцов которой играют строки исходной диаграммы. Тогда мы получим кодиаграмму исходной диаграммы, отвечающую коразбиению $n = 24 = 9+7+4+2+2$.

В общем случае кодиаграмма $\tau(u)$ строится по диаграмме u аналогичным образом.

Очевидно, *отображение* τ, переводящее u в $\tau(u)$, является подстановкой на $NPL(n)$ и τ^2 — тождественная подстановка, т. е. $\tau(\tau(u)) = u$ для любого $u \in NPL(n)$. Такие подстановки называют *инволюциями*.

Заметим (см. рис. 2), что для любых $u, v \in NPL(n)$:

1) $u \Rightarrow v$ — падение блока тогда и только тогда, когда $\tau(v) \Rightarrow \tau(u)$ — сдвиг блока;

2) $u \Rightarrow v$ — сдвиг блока тогда и только тогда, когда $\tau(v) \Rightarrow \tau(u)$ — падение блока.

Отсюда следует, что для любых $u, v \in NPL(n)$ условие $u \geq v$ эквивалентно условию $\tau(v) \geq \tau(u)$, т. е. τ — это *антиавтоморфизм* частично упорядоченного множества $(NPL(n), \leq)$.

Теорема 2. *Отображение τ является инволютивным антиавтоморфизмом частично упорядоченного множества $(NPL(n), \leq)$.* □

Следствие 3. *Для любых $u, v \in NPL(n)$ выполняется*

$$u \vee v = \tau(\tau(u) \wedge \tau(v))$$

— объединение разбиений u и v в $(NPL(n), \leq)$.

Доказательство. В силу теоремы 2 объединение $u \vee v$ существует, и мы имеем $\tau(u \vee v) = \tau(u) \wedge \tau(v)$, откуда следует $u \vee v = \tau(\tau(u) \wedge \tau(v))$. □

Отметим, что последнее равенство дает нам естественный алгоритм вычисления объединения $u \vee v$, в котором используются переход к кодиаграммам и алгоритм вычисления пересечения $\tau(u) \wedge \tau(v)$ в решетке $(NPL(n), \leq)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баранский В.А., Королева Т.А.** Решетка разбиений натурального числа // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 4. С. 439–442.
2. **Brylawski T.** The lattice of integer partitions // Discrete Math. 1973. Vol. 6. P. 210–219.
3. **Баранский В.А., Сеньчонок Т.А.** Хроматическая определяемость элементов высоты ≤ 3 в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 3–18.
4. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

Поступила 23.03.2015

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Королева Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Югорский государственный университет
e-mail: tatyana-borodina@mail.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru