ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.54+519.17

КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА СИММЕТРИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОГО ДЕРЕВА ПОСРЕДСТВОМ КОНЕЧНОГО ГРАФА[1]

В. И. Трофимов

Доказывается конечность числа симметрических расширений локально конечного дерева посредством конечного графа. Более того, доказывается конечность числа попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений локально конечного дерева посредством конечного графа.

Ключевые слова: дерево, симметрическое расширение посредством конечного графа.

V. I. Trofimov. The finiteness of the number of symmetrical extensions of a locally finite tree by a finite graph.

We prove that there are only finitely many symmetrical extensions of a locally finite tree by a finite graph. Moreover, we prove that there are only finitely many pairwise nonequivalent realizations of symmetrical extensions of a locally finite tree by a finite graph.

Keywords: tree, symmetrical extension by a finite graph.

1. Введение

Используемая в настоящей работе терминология совпадает с терминологией, используемой в [1]. В частности, под графом всюду далее понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер.

Напомним (см. [2; 1]), что связный граф Σ называется *симметрическим расширением* графа Γ посредством графа Δ, если найдутся такие вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Σ и ее система импримитивности σ, что, во-первых, существует изоморфизм φ графа Σ/σ на граф Γ и, во-вторых, подграф графа Σ, порожденный блоком σ, изоморфен Δ (ясно, что различные блоки σ порождают изоморфные подграфы). Четверку $(\Sigma, G, \sigma, \varphi)$ с указанными компонентами мы будем при этом называть *реализацией симметрического расширения* графа Γ посредством графа Δ. Ясно, что если существует симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ, то графы Γ и Δ допускают вершинно-транзитивные группы автоморфизмов, причем граф Γ связен.

Известно (см. [2; 3]), что существуют локально конечные (т. е. с конечными валентностями вершин) графы Γ, допускающие бесконечно много симметрических расширений посредством одного и того же конечного графа Δ. Однако вопрос о конечности числа симметрических расширений заданного локально конечного графа Γ посредством заданного конечного графа Δ открыт даже для многих бесконечных графов Γ весьма простого вида (см. [2]).

В [4] автором был анонсирован следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* Γ — *локально конечное дерево и* Δ — *конечный граф. Тогда имеется лишь конечное число симметрических расширений* Γ *посредством* Δ.

Теорема 1 доказывается несложно, но не является очевидной (как может показаться на первый взгляд). Она является непосредственным следствием формулируемой и доказываемой

[1]Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

ниже теоремы 2. Напомним (см. [1]), что реализации $(\Sigma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\Sigma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ называются *эквивалентными*, если найдется изоморфизм графа Σ_1 на граф Σ_2, переводящий σ_1 в σ_2. Про любой изоморфизм с этим свойством говорят, что он *осуществляет эквивалентность* реализаций $(\Sigma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\Sigma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений Γ посредством Δ.

Теорема 2. *Пусть Γ — локально конечное дерево и Δ — конечный граф. Тогда имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ.*

З а м е ч а н и е 1. Из приводимого далее доказательства теоремы 2 несложно получить верхнюю оценку для числа попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений дерева Γ посредством графа Δ.

З а м е ч а н и е 2. Метод доказательства теоремы 2 может быть адаптирован для получения аналога теоремы 2 для графов Γ несколько более общего вида, чем локально конечные деревья.

З а м е ч а н и е 3. Используя [5, предложение 3], легко доказать, что для каждого регулярного дерева T валентности > 1 и каждого конечного вершинно-симметрического графа Δ с $|V(\Delta)| > 1$ имеется бесконечно много попарно не являющихся строго эквивалентными реализаций симметрических расширений T посредством Δ. (Определение отношения строгой эквивалентности на реализациях симметрических расширений графов см. в [5, разд. 3].)

Как уже было указано, в настоящей работе мы придерживаемся терминологии работы [1]. Кроме того, для связного графа Γ через $d_\Gamma(.,.)$ обозначается обычная метрика на $V(\Gamma)$, а для обозначения графического равенства слов W_1, W_2 (над некоторым алфавитом) используется запись $W_1 \equiv W_2$.

2. Доказательство теоремы 2

Как было замечено выше, в условиях теоремы 2 из существования симметрического расширения Γ посредством Δ следует, что Γ — регулярное дерево. Поэтому, не теряя общности, будем предполагать, что Γ — регулярное дерево некоторой (конечной) валентности $d > 1$.

Пусть $\{(\Sigma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i) : i \in I\}$ — некоторая система представителей (всех) классов эквивалентных между собой реализаций симметрических расширений дерева Γ посредством графа Δ. Мы покажем, что множество I конечно (более того, приводимое доказательство будет давать верхнюю оценку для $|I|$), и тем самым докажем теорему 2.

Пусть i — произвольный элемент множества I. Группа G_i индуцирует вершинно-транзитивную группу $\bar{G}_i := G_i^{\sigma_i}$ автоморфизмов регулярного дерева $\mathrm{T}_i := \Sigma_i/\sigma_i$ валентности d.

Зафиксируем некоторую вершину v_i дерева T_i. Пусть $\{O^+_{i,j}, O^-_{i,j} : 1 \le j \le m_i\}$ — множество всех тех орбит стабилизатора вершины v_i в группе $\bar{G}_i$ на множестве $\mathrm{T}_i(v_i)$ (т. е. на множестве смежных с v_i вершин дерева T_i), которые не являются самоспаренными в $\bar{G}_i$. Здесь для каждого $1 \le j \le m_i$ через $O^-_{i,j}$ обозначена спаренная с $O^+_{i,j}$ в $\bar{G}_i$ орбита, причем предполагается, что $|O^+_{i,j}| \ge |O^-_{i,j}|$. Пусть, кроме того, $\{O_{i,j} : 1 \le j \le n_i\}$ — множество всех тех орбит стабилизатора вершины v_i в группе $\bar{G}_i$ на множестве $\mathrm{T}_i(v_i)$, которые являются самоспаренными в $\bar{G}_i$. Можно предполагать, что $|O^+_{i,j_1}| \ge |O^+_{i,j_2}|$ при $1 \le j_1 \le j_2 \le m_i$ и что $|O^-_{i,j_1}| \ge |O^-_{i,j_2}|$ при $1 \le j_1 \le j_2 \le m_i$ и $|O^+_{i,j_1}| = |O^+_{i,j_2}|$. Вместе с тем можно предполагать, что $|O_{i,j_1}| \ge |O_{i,j_2}|$ при $1 \le j_1 \le j_2 \le n_i$. Ясно, что

$$\sum_{1 \le j \le m_i} (|O^+_{i,j}| + |O^-_{i,j}|) + \sum_{1 \le j \le n_i} |O_{i,j}| = d.$$

Пусть j — произвольное целое положительное число, не превосходящее m_i, и пусть

$$O^+_{i,j} = \{u^+_{i,j,1}, \dots, u^+_{i,j,l^+_{i,j}}\},$$

$$O_{i,j}^{-} = \{u_{i,j,1}^{-}, \ldots, u_{i,j,l_{i,j}^{-}}^{-}\},$$

где, см. выше, $l_{i,j}^{+} \geq l_{i,j}^{-}$. Для каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}^{-}$ зафиксируем в группе $\bar{G}_i$ такой элемент $a_{i,j,k}$, что $a_{i,j,k}(u_{i,j,k}^{-}) = v_i$ и $a_{i,j,k}(v_i) = u_{i,j,k}^{+}$. Кроме того, для каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}^{+} - l_{i,j}^{-}$ зафиксируем в группе $\bar{G}_i$ такой элемент $b_{i,j,k}$, что $b_{i,j,k}(v_i) = u_{i,j,l_{i,j}^{-}+k}^{+}$.

Далее, пусть j — произвольное целое положительное число, не превосходящее n_i, и пусть

$$O_{i,j} = \{u_{i,j,1}, \ldots, u_{i,j,l_{i,j}}\}.$$

Для каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}$ зафиксируем в группе $\bar{G}_i$ такой элемент $c_{i,j,k}$, что $c_{i,j,k}(u_{i,j,k}) = v_i$ и $c_{i,j,k}(v_i) = u_{i,j,k}$.

Обозначим через $\mathcal{W}_i$ множество всех слов (включая пустое слово нулевой длины) над алфавитом

$$M_i := \{a_{i,j,k}, a_{i,j,k}^{-1} : 1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^{-}\} \cup$$

$$\{b_{i,j,k} : 1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^{+} - l_{i,j}^{-}\} \cup$$

$$\{c_{i,j,k} : 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}\},$$

не содержащих подслов $a_{i,j,k}a_{i,j,k}^{-1}$, $a_{i,j,k}^{-1}a_{i,j,k}$ для $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^{-}$ и подслов $c_{i,j,k}c_{i,j,k}$ для $1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}$. Каждому слову W над алфавитом M_i естественным образом сопоставляется элемент группы $\bar{G}_i$ (соответствующее W произведение элементов из M_i, рассматриваемых как элементы группы $\bar{G}_i$; пустому слову сопоставляется единица группы $\bar{G}_i$), который мы, полагаясь на контекст, будем также обозначать через W. Отметим, что $\mathrm{T}_i(v_i) = \{\mathrm{x}(v_i) : \mathrm{x} \in M_i\}$, причем для каждой вершины $v' \in \mathrm{T}_i(v_i)$ существует единственный элемент $\mathrm{x} \in M_i$ со свойством $\mathrm{x}(v_i) = v'$.

Имеется своего рода естественная биекция η множества всех слов над алфавитом M_i на множество всех путей дерева T_i с началом v_i. (Путь дерева T_i мы определяем как такую последовательность его вершин $(u_0, \ldots, u_q)$, где q — какое-либо целое неотрицательное число (называемое длиной пути), что $\{u_r, u_{r+1}\} \in E(\mathrm{T}_i)$ для всех $0 \leq r < l$.) Эта биекция сопоставляет пустому слову путь (v_i) и сопоставляет произвольному слову $\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_q$ длины $q \geq 1$ (здесь $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q \in M_i$) путь $(u_0 = v_i, u_1, \ldots, u_q)$, где $u_r = \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_r(v_i)$ для каждого $1 \leq r \leq q$. Обратное отображение η^{-1} сопоставляет пути (v_i) пустое слово и сопоставляет произвольному пути $(u_0 = v_i, u_1, \ldots, u_q)$ длины $q \geq 1$ слово $\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_q$, где $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q \in M_i$ определяются следующим образом: x_1 есть единственный элемент из M_i со свойством $\mathrm{x}_1(v_i) = u_1$; если для некоторого целого $1 < r \leq q$ уже определены $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{r-1}$, причем $u_{r-1} = \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_{r-1}(v_i)$, то x_r есть элемент из M_i со свойством $u_r = \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_r(v_i)$, что однозначно определяет x_r в силу $u_r \in \mathrm{T}_i(u_{r-1}) = \mathrm{T}_i(\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_{r-1}(v_i)) = \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_{r-1}(\mathrm{T}_i(v_i))$. Отметим, что каждое слово W над алфавитом M_i биекцией η отображается в путь, длина которого равна длине слова W. Кроме того, если слово W_1 над алфавитом M_i имеет в качестве начала слово W_2 (т. е. $W_1 \equiv W_2W_3$ для некоторого слова W_3), то путь $\eta(W_2)$ является началом пути $\eta(W_1)$.

Нетрудно убедиться, что ограничение η на множество $\mathcal{W}_i$ есть биекция множества $\mathcal{W}_i$ на множество геодезических путей дерева T_i с началом v_i. (Путь дерева T_i называется геодезическим путем или геодезической, если его длина равна расстоянию между его начальной и конечной вершинами в дереве T_i.) Действительно, если W — слово над алфавитом M_i, то $\eta(W)$ не является геодезической дерева T_i тогда и только тогда, когда W имеет вид $\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_q$, где $q \geq 2$ и $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q \in M_i$, причем $\mathrm{x}_{r-1}\mathrm{x}_r(v_i) = v_i$ для некоторого $1 < r \leq q$. Но по выбору M_i равенство $\mathrm{xy}(v_i)$ для $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in M_i$ эквивалентно тому, что либо $\mathrm{x} = a_{i,j,k}$ и $\mathrm{y} = a_{i,j,k}^{-1}$ для некоторых $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^{-}$, либо $\mathrm{x} = a_{i,j,k}^{-1}$ и $\mathrm{y} = a_{i,j,k}$ для некоторых $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^{-}$, либо $\mathrm{x} = c_{i,j,k}$ и $\mathrm{y} = c_{i,j,k}$ для некоторых $1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}$. Таким образом, для слова W над алфавитом M_i путь $\eta(W)$ не является геодезической дерева T_i тогда и только тогда, когда $W \notin \mathcal{W}_i$, что доказывает требуемое.

Пусть γ — биекция множества вершин дерева T_i на множество геодезических дерева T_i с началом v_i, отображающая каждую вершину w дерева T_i в (единственную) геодезическую дерева T_i с началом v_i и концом w. Для произвольной вершины w дерева T_i положим

$$W_w := \eta^{-1}(\gamma(w)).$$

В дальнейшем нам потребуется лишь следующее непосредственно вытекающее из вышеизложенного утверждение относительно так определенной биекции $w \mapsto W_w$ множества вершин дерева T_i на множество слов $\mathcal{W}_i$.

Лемма 1. *Пусть $i \in I$. Определенная выше биекция $w \mapsto W_w$ множества вершин дерева T_i на множество слов $\mathcal{W}_i$ обладает следующими свойствами*:

(1) $W_w(v_i) = w$ *для всех* $w \in V(\mathrm{T}_i)$;

(2) *для* $w_1, w_2 \in V(\mathrm{T}_i)$ *условие* $W_{w_2} \equiv W_{w_1}\mathrm{x}$, *где* $\mathrm{x} \in M_i$, *эквивалентно тому, что* $\{w_1, w_2\} \in E(\mathrm{T}_i)$ *и* $d_{\mathrm{T}_i}(v_i, w_2) = d_{\mathrm{T}_i}(v_i, w_1) + 1$.

Из леммы 1 легко вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть $i', i'' \in I$ таковы, что*

(1) $m_{i'} = m_{i''}$ *и* $l^+_{i',j} = l^+_{i'',j}, l^-_{i',j} = l^-_{i'',j}$ *для каждого* $1 \le j \le m_{i'}$;

(2) $n_{i'} = n_{i''}$ *и* $l_{i',j} = l_{i'',j}$ *для каждого* $1 \le j \le n_{i'}$.

Для произвольного слова $W \in \mathcal{W}_{i'}$ обозначим через W^* слово из $\mathcal{W}_{i''}$, получающееся из W заменой в нем каждого $a_{i',j,k}$, где $1 \le j \le m_{i'}, 1 \le k \le l^-_{i',j}$, на $a_{i'',j,k}$, каждого $a^{-1}_{i',j,k}$, где $1 \le j \le m_{i'}, 1 \le k \le l^-_{i',j}$, на $a^{-1}_{i'',j,k}$, каждого $b_{i',j,k}$, где $1 \le j \le m_{i'}, 1 \le k \le l^+_{i',j} - l^-_{i',j}$, на $b_{i'',j,k}$ и, наконец, каждого $c_{i',j,k}$, где $1 \le j \le n_{i'}, 1 \le k \le l_{i',j}$, на $c_{i'',j,k}$. Тогда отображение

$$\varphi_{i',i''} : V(\mathrm{T}_{i'}) \to V(\mathrm{T}_{i''}),\ \varphi_{i',i''}(w) = W^*_w(v_{i''}) \text{ для } w \in V(\mathrm{T}_{i'}),$$

есть изоморфизм дерева $\mathrm{T}_{i'}$ на дерево $\mathrm{T}_{i''}$.

Пусть вновь i — произвольный элемент множества I. Для каждого $1 \le j \le m_i$ и каждого $1 \le k \le l^-_{i,j}$ зафиксируем в группе G_i такой элемент $\tilde{a}_{i,j,k}$, что $(\tilde{a}_{i,j,k})^{\sigma_i} = a_{i,j,k}$. Далее, для каждого $1 \le j \le m_i$ и каждого $1 \le k \le l^+_{i,j} - l^-_{i,j}$ зафиксируем в группе G_i такой элемент $\tilde{b}_{i,j,k}$, что $(\tilde{b}_{i,j,k})^{\sigma_i} = b_{i,j,k}$. Наконец, для каждого $1 \le j \le n_i$ и каждого $1 \le k \le l_{i,j}$ зафиксируем в группе G_i такой элемент $\tilde{c}_{i,j,k}$, что $(\tilde{c}_{i,j,k})^{\sigma_i} = c_{i,j,k}$. Для произвольного слова W над алфавитом M_i обозначим через $\widetilde{W}$ слово над алфавитом

$$\{\tilde{a}_{i,j,k}, \tilde{a}^{-1}_{i,j,k} : 1 \le j \le m_i, 1 \le k \le l^-_{i,j}\} \cup$$

$$\{\tilde{b}_{i,j,k} : 1 \le j \le m_i, 1 \le k \le l^+_{i,j} - l^-_{i,j}\} \cup$$

$$\{\tilde{c}_{i,j,k} : 1 \le j \le n_i, 1 \le k \le l_{i,j}\},$$

получающееся из W заменой в нем каждого $a_{i,j,k}$, где $1 \le j \le m_i, 1 \le k \le l^-_{i,j}$, на $\tilde{a}_{i,j,k}$, каждого $a^{-1}_{i,j,k}$, где $1 \le j \le m_i, 1 \le k \le l^-_{i,j}$, на $\tilde{a}^{-1}_{i,j,k}$, каждого $b_{i,j,k}$, где $1 \le j \le m_i, 1 \le k \le l^+_{i,j} - l^-_{i,j}$, на $\tilde{b}_{i,j,k}$ и, наконец, каждого $c_{i,j,k}$, где $1 \le j \le n_i, 1 \le k \le l_{i,j}$, на $\tilde{c}_{i,j,k}$. Если W — слово над алфавитом M_i, то подобно тому, как слову W естественным образом сопоставляется элемент группы $\bar{G}_i$, слову $\widetilde{W}$ естественным образом сопоставляется элемент группы G_i (соответствующее $\widetilde{W}$ произведение элементов), который мы, полагаясь на контекст, будем также обозначать через $\widetilde{W}$.

Если число элементов в множестве I конечно, но достаточно велико, или, тем более, если множество I бесконечно, найдутся различные $i', i'' \in I$, для которых справедливы следующие утверждения:

1) $m_{i'} = m_{i''}$ и $l^+_{i',j} = l^+_{i'',j}, l^-_{i',j} = l^-_{i'',j}$ для каждого $1 \le j \le m_{i'}$;

2) $n_{i'} = n_{i''}$ и $l_{i',j} = l_{i'',j}$ для каждого $1 \le j \le n_{i'}$;

3) имеется изоморфизм ψ подграфа графа $\Sigma_{i'}$, порожденного множеством вершин $\{x \in V(\Sigma_{i'}) : x^{\sigma_{i'}} \in \{v_{i'}\} \cup \mathrm{T}_{i'}(v_{i'})\}$, на подграф графа $\Sigma_{i''}$, порожденный множеством вершин $\{x \in V(\Gamma_{i''}) : x^{\sigma_{i''}} \in \{v_{i''}\} \cup \mathrm{T}_{i''}(v_{i''})\}$, такой, что если $y \in V(\Sigma_{i'})$ и $y^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$ (и следовательно, $(\psi(y))^{\sigma_{i''}} = v_{i''}$), то

$$\psi(\tilde{a}_{i',j,k}(y)) = \tilde{a}_{i'',j,k}(\psi(y)) \text{ для каждого } 1 \le j \le m_{i'} \text{ и каждого } 1 \le k \le l^{-}_{i',j},$$

$$\psi(\tilde{a}^{-1}_{i',j,k}(y)) = \tilde{a}^{-1}_{i'',j,k}(\psi(y)) \text{ для каждого } 1 \le j \le m_{i'} \text{ и каждого } 1 \le k \le l^{-}_{i',j},$$

$$\psi(\tilde{b}_{i',j,k}(y)) = \tilde{b}_{i'',j,k}(\psi(y)) \text{ для каждого } 1 \le j \le m_{i'} \text{ и каждого } 1 \le k \le l^{+}_{i',j} - l^{-}_{i',j},$$

$$\psi(\tilde{c}_{i',j,k}(y)) = \tilde{c}_{i'',j,k}(\psi(y)) \text{ для каждого } 1 \le j \le n_{i'} \text{ и каждого } 1 \le k \le l_{i',j}.$$

Мы покажем, однако, что из 1)–3) следует эквивалентность реализаций $(\Sigma_{i'}, G_{i'}, \sigma_{i'}, \varphi_{i'})$ и $(\Sigma_{i''}, G_{i''}, \sigma_{i''}, \varphi_{i''})$ симметрических расширений Γ посредством Δ. Тем самым теорема 2 будет доказана (и более того, будет получена верхняя оценка для числа $|I|$).

В силу 1) и 2) имеется биекция множества $\mathcal{W}_{i'}$ на множество $\mathcal{W}_{i''}$, которая сопоставляет произвольному слову $W \in \mathcal{W}_{i'}$ слово W^*, получающееся из W заменой в нем каждого $a_{i',j,k}$ $(1 \le j \le m_{i'}, 1 \le k \le l^{-}_{i',j})$ на $a_{i'',j,k}$, каждого $a^{-1}_{i',j,k}$ $(1 \le j \le m_{i'}, 1 \le k \le l^{-}_{i',j})$ на $a^{-1}_{i'',j,k}$, каждого $b_{i',j,k}$ $(1 \le j \le m_{i'}, 1 \le k \le l^{+}_{i',j} - l^{-}_{i',j})$ на $b_{i'',j,k}$, каждого $c_{i',j,k}$ $(1 \le j \le n_{i'}, 1 \le k \le l_{i',j})$ на $c_{i'',j,k}$.

Согласно лемме 1 для произвольной вершины z графа $\Sigma_{i'}$ имеем $(W_{z^{\sigma_{i'}}})^{-1}(z^{\sigma_{i'}}) = v_{i'}$ и, следовательно, $((\widetilde{W_{z^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z))^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$. Определим отображение $\varphi : V(\Sigma_{i'}) \to V(\Sigma_{i''})$, полагая для произвольной вершины z графа $\Sigma_{i'}$

$$\varphi(z) := \widetilde{W^*_{z^{\sigma_{i'}}}}(\psi((\widetilde{W_{z^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z))). \tag{2.1}$$

Мы покажем, что отображение φ осуществляет эквивалентность реализаций $(\Sigma_{i'}, G_{i'}, \sigma_{i'}, \varphi_{i'})$ и $(\Sigma_{i''}, G_{i''}, \sigma_{i''}, \varphi_{i''})$ симметрических расширений Γ посредством Δ.

Легко видеть, что ограничение φ на произвольный блок $z^{\sigma_{i'}} \in \sigma_{i'}$ (здесь $z \in V(\Sigma_{i'})$) есть его биекция на блок $W^*_{z^{\sigma_{i'}}}(\psi((W_{z^{\sigma_{i'}}})^{-1}(z^{\sigma_{i'}}))) = W^*_{z^{\sigma_{i'}}}(v_{i''}) \in \sigma_{i''}$. С учетом леммы 2 отсюда следует, что φ есть биекция $V(\Sigma_{i'})$ на $V(\Sigma_{i''})$, отображающая $\sigma_{i'}$ на $\sigma_{i''}$ и индуцирующая изоморфизм $\varphi_{i',i''}$ (см. лемму 2) дерева $\mathrm{T}_{i'} = \Sigma_{i'}/\sigma_{i'}$ на дерево $\mathrm{T}_{i''} = \Sigma_{i''}/\sigma_{i''}$.

Пусть z_1, z_2 — произвольные вершины графа $\Sigma_{i'}$. Для завершения доказательства теоремы 2 остается показать, что $\{z_1, z_2\} \in E(\Sigma_{i'})$ тогда и только тогда, когда $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$. Поскольку φ индуцирует изоморфизм дерева $\mathrm{T}_{i'}$ на дерево $\mathrm{T}_{i''}$, при этом достаточно рассмотреть случай, когда $z_1^{\sigma_{i'}} = z_2^{\sigma_{i'}}$ или $\{z_1^{\sigma_{i'}}, z_2^{\sigma_{i'}}\} \in E(\mathrm{T}_{i'})$.

Предположим, что $z_1^{\sigma_{i'}} = z_2^{\sigma_{i'}}$. Включение $\{z_1, z_2\} \in E(\Sigma_{i'})$ эквивалентно включению

$$\{(\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1), (\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2)\} \in E(\Sigma_{i'}),$$

которое в силу 3) и равенств $((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1))^{\sigma_{i'}} = ((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$ эквивалентно, в свою очередь, включению

$$\{\psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1)), \psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))\} \in E(\Sigma_{i''}).$$

Отсюда согласно (2.1) следует, что (при $z_1^{\sigma_{i'}} = z_2^{\sigma_{i'}}$) включение $\{z_1, z_2\} \in E(\Sigma_{i'})$ эквивалентно включению $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$.

Предположим, что $\{z_1^{\sigma_{i'}}, z_2^{\sigma_{i'}}\} \in E(\mathrm{T}_{i'})$ и, для определенности, $d_{\mathrm{T}_{i'}}(v_{i'}, z_1^{\sigma_{i'}}) < d_{\mathrm{T}_{i'}}(v_{i'}, z_2^{\sigma_{i'}})$. Тогда по лемме 1 имеем $W_{z_2^{\sigma_{i'}}} \equiv W_{z_1^{\sigma_{i'}}}\mathrm{x}$, где $\mathrm{x} \in M_{i'}$. Поэтому с учетом (2.1) включение $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$ эквивалентно включению

$$\{\psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1)), \widetilde{\mathrm{x}^*}(\psi((\widetilde{W_{z_2^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2)))\} \in E(\Sigma_{i''}).$$

Но $((\widetilde{W_{z_2^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$, что согласно 3) и $W_{z_2^{\sigma_{i'}}} \equiv W_{z_1^{\sigma_{i'}}}\mathrm{x}$ влечет

$$\widetilde{\mathrm{x}}^*(\psi((\widetilde{W_{z_2^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))) = \psi(\widetilde{\mathrm{x}}((\widetilde{W_{z_2^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))) = \psi(\widetilde{\mathrm{x}}((\widetilde{\mathrm{x}})^{-1}(\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))) = \psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2)).$$

Таким образом, включение $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$ эквивалентно включению

$$\{\psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1)), \psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))\} \in E(\Sigma_{i''}).$$

Поскольку $((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1))^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$ и $((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))^{\sigma_{i'}} \in \mathrm{T}_{i'}(v_{i'})$, отсюда согласно 3) следует, что включение $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$ эквивалентно включению

$$\{(\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1), (\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2)\} \in E(\Sigma_{i'}),$$

т. е. эквивалентно включению $\{z_1, z_2\} \in E(\Sigma_{i'})$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трофимов В.И.** Конечность числа симметрических 2-расширений d-мерной решетки и сходных с ней графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 290–303.
2. **Trofimov V.I.** Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 316–320.
3. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** Симметрические расширения графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 175–206.
4. **Трофимов В.И.** О симметрических расширениях деревьев посредством конечных графов // Междунар. конф. “Алгебра и линейная оптимизация”, посвященная 100-летию С.Н. Черникова: тез. докл. Екатеринбург, 2012. С. 159.
5. **Трофимов В.И.** Несколько замечаний о симметрических расширениях графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 284–292.

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

Поступила 1.06.2015