ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.658.4

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Л. Д. Попов, В. Д. Скарин

Предложен новый подход к оптимальной лексикографической коррекции несобственных задач линейного программирования. В основе подхода лежит многоступенчатая регуляризация классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным. Регуляризованная функция может быть положена в основу формирования новых схем двойственности для задач такого типа. Приведены теоремы сходимости и численной устойчивости метода, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения.

Ключевые слова: линейное программирование, двойственность, несобственные задачи, обобщенные решения, регуляризация, методы штрафных функций.

L. D. Popov, V. D. Skarin. Lexicographic regularization and duality for improper linear programming problems.

A new approach to the optimal lexicographic correction of improper linear programming problems is proposed. The approach is based on the multistep regularization of the classical Lagrange function with respect to primal and dual variables simultaneously. The regularized function can be used as a basis for generating new duality schemes for problems of this kind. Theorems on the convergence and numerical stability of the method are presented, and an informal interpretation of the obtained generalized solution is given.

Keywords: linear programming, duality, improper problems, generalized solutions, regularization, penalty methods.

Введение

Несобственными называют [1; 2] задачи линейного и выпуклого программирования (ЛП и ВП), для которых нарушены основные соотношения двойственности, а именно одновременная разрешимость прямой и двойственной задач и совпадение их оптимальных значений. Для задачи ЛП несобственность означает просто несовместность системы ее ограничений и (или) несовместность системы ограничений двойственной задачи. На практике свойство несобственности может возникать как результат неточного задания исходных данных задачи, рассогласования ее ресурсных ограничений и целей, структурных искажений модели и даже быть адекватным отражением реальных противоречий моделируемого объекта.

Несобственная задача (НЗ) не имеет решения в обычном понимании этого термина. Поэтому она необходимо должна быть подвергнута некоторой коррекции или, иначе, структурному или информационному преобразованию, которое приводило бы ее к разрешимому виду. Естественно, что это преобразование должно удовлетворять некоторым объективным критериям качества (например, вносимые с его помощью изменения должны быть минимально необходимыми для обеспечения свойств разрешимости) и проводиться посредством формальных математических методов.

Теоретической базой методов оптимальной коррекции НЗ ЛП являются оригинальные схемы формирования двойственности, предложенные И. И. Ереминым [1–3]. В основе этих схем лежат такие модификации классической функции Лагранжа, которые обладают седловыми точками независимо от разрешимости или неразрешимости исходной задачи. Возникающие при этом стандартные минимаксные задачи всегда разрешимы и играют роль содержательных аппроксимаций для исходной пары взаимодвойственных противоречивых задач, а компоненты их седловых точек (при определенном законе изменения входящих в них числовых

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом (грант №14-11-00109).

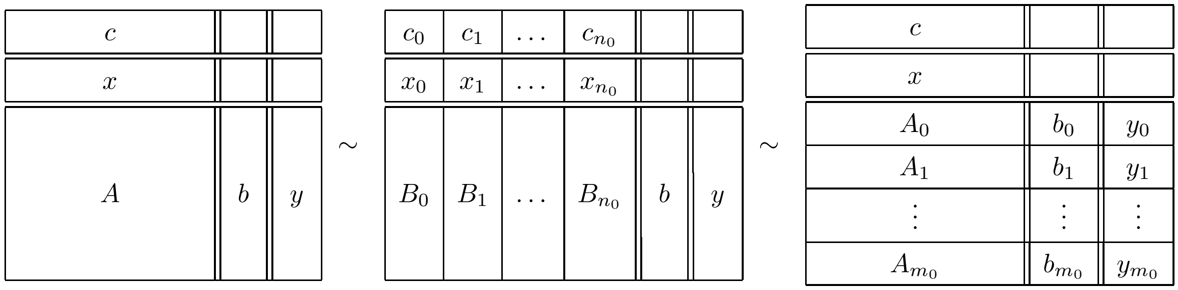

Схема 1. Разбиение исходных данных задач P и D на блоки.

параметров) сходятся к конкретным величинам, которые могут быть интерпретированы как обобщенные решения исходных несобственных постановок.

Идеи, использованные в [1–3] для построения модифицированных функций Лагранжа, не являются единственно возможными. Подобные модификации можно также строить, используя общий метод регуляризации Тихонова [4; 5]. Первые шаги в этом направлении были сделаны в [6–8]. В данной работе этот подход получает дальнейшее развитие, что позволяет перейти от обычной коррекции исходных данных НЗ ЛП к их коррекции в лексикографической постановке с улучшением вычислительных свойств предлагаемых алгоритмов.

1. Двойственность для несобственных задач линейного программирования на основе симметричной регуляризации функции Лагранжа

Рассмотрим пару взаимодвойственных задач ЛП

$$P\colon\ \min\{(c,\,x)\colon Ax=b,\ x\ge 0\},\quad D\colon\ \max\{(b,\,y)\colon A^{\top}y\le c\},$$

где векторы $c, x\in\mathbb{R}^n$, $b, y\in\mathbb{R}^m$, A — $(m\times n)$-матрица полного строчного ранга, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение векторов. Будем считать, что априори неизвестно, разрешимы задачи P и D или они являются несобственными.

Как известно, разрешимость задач P и D тесно связана с наличием у их функции Лагранжа $L(x,y)=(c,x)-(y,Ax-b)$ седловых точек относительно области $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n\colon x\ge 0\}$ — неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^n$. Если хотя бы одно из допустимых множеств задач P и D пусто, то функция $L(x,y)$ не может иметь седловых точек.

Этого недостатка лишена функция Лагранжа, регуляризованная одновременно по прямым и двойственным переменным:

$$L(x,y;\sigma)=(c,x)-(y,Ax-b)+\frac{\alpha}{2}\|x\|^2-\frac{\beta}{2}\|y\|^2; \tag{1}$$

здесь $\sigma=[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Эта функция исследовалась в работах [6; 8]. В частности, было показано, что она порождает пару двойственных задач ВП:

$$P_\sigma:\ \min_{x\ge0}\max_{y}L(x,y;\sigma)=\min_{x\ge0}\varphi_\sigma(x),\quad \text{где}\quad \varphi_\sigma(x)=(c,x)+\frac{\alpha}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2\beta}\|Ax-b\|^2,$$

$$D_\sigma:\ \max_{y}\min_{x\ge0}L(x,y;\sigma)=\max_{y}\psi_\sigma(y),\quad \text{где}\quad \psi_\sigma(y)=(b,y)-\frac{\beta}{2}\|y\|^2-\frac{1}{2\alpha}\|(A^Ty-c)^+\|^2;$$

выше $(\cdot)^+$ — операция проектирования вектора на неотрицательный ортант.

Задачи P_σ и D_σ всегда разрешимы и имеют равные оптимальные значения для любого $\sigma>0$. Их единственные оптимальные векторы x^σ и y^σ в паре образуют (также единственную) седловую точку $[x^\sigma,y^\sigma]$ функции $L(x,y;\sigma)$ относительно области $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m$.

Решениям x^σ и y^σ пары двойственных задач P_σ и D_σ можно придать следующую содержательную интерпретацию. Введем расширенные множества

$$X(\Delta b) = \{x\colon Ax = b + \Delta b,\ x \geq 0\} \quad \text{и} \quad Y(\Delta c) = \{y\colon A^T y \leq c + \Delta c\}$$

и определим минимальные по норме векторы коррекции

$$\widehat{\Delta b} = \arg\min\{\|\Delta b\|\colon X(\Delta b) \neq \varnothing\} \quad \text{и} \quad \widehat{\Delta c} = \arg\min\{\|\Delta c)\|\colon Y(\Delta c) \neq \varnothing\}.$$

Тогда, как показано в [6; 8], имеют место сходимости

$$\lim_{\sigma\to+0} \alpha x^\sigma = \widehat{\Delta c}, \quad \lim_{\sigma\to+0}(-\beta y^\sigma) = \widehat{\Delta b}. \tag{2}$$

Заметим, что в собственном случае векторы $\widehat{\Delta b}$ и $\widehat{\Delta c}$ равны нулю.

Таким образом, с помощью векторов x^σ и y^σ реализуется оптимальная коррекция несобственных задач P и D по правым частям их несовместных систем ограничений. Векторы $\widehat{\Delta b}$ и $\widehat{\Delta c}$ определяют так называемую *симметрическую* [2] коррекцию НЗ ЛП, при которой задачи P и D заменяются разрешимыми задачами

$$\widehat{P}\colon\ \min\{(c + \widehat{\Delta c}, x)\colon Ax = b + \widehat{\Delta b},\ x \geq 0\}, \quad \widehat{D}\colon\ \max\{(b + \widehat{\Delta b}, y)\colon\ A^T y \leq c + \widehat{\Delta c}\},$$

также являющимися взаимодвойственными.

В данной работе этот подход будет обобщен и расширен следующим образом.

Вслед за [1; 2] разобьем матрицу ограничений задач P и D на ряд горизонтальных и вертикальных полос $A = [A_0^T|A_1^T|\ldots|A_{m_0}^T]^T = [B_0|B_1|\ldots|B_{n_0}]$ так, как это проиллюстрировано схемой 1. Соответственно векторы c, b, x и y получат представление в виде композиции векторов $c = [c_0, c_1, \ldots, c_{n_0}]$, $b = [b_0, b_1, \ldots, b_{m_0}]$, $x = [x_0, x_1, \ldots, x_{n_0}]$ и $y = [y_0, y_1, \ldots, y_{m_0}]$. Такое разбиение позволяет учесть возможное ранжирование противоречивых ограничений исходных задач по степени важности (приоритетности) их выполнения.

По аналогии с (1) введем в рассмотрение функцию Лагранжа, симметрично регуляризированную по прямым и двойственным переменным в соответствии с приведенным выше разбиением:

$$\mathcal{L}(x, y; \sigma) = \sum_{t=0}^{n_0}(c_t, x_t) - \sum_{s=0}^{m_0}(y_s, A_s x - b_s) + \sum_{t=0}^{n_0}\frac{\alpha_t}{2}\|x_t\|^2 - \sum_{s=0}^{m_0}\frac{\beta_s}{2}\|y_s\|^2, \tag{3}$$

где $\sigma = [\alpha, \beta]$, $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0}] > 0$ и $\beta = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}] > 0$.

Подобно тому как функция (1) порождает задачи P_σ и D_σ, функция (3) порождает свою пару минимаксных задач

$$\mathcal{P}_\sigma\colon\ \min_{x\geq 0}\max_y \mathcal{L}(x, y; \sigma) = \min_{x\geq 0}\Phi_\sigma(x),\ \text{где } \Phi_\sigma(x) = (c, x) + \sum_{t=0}^{n_0}\frac{\alpha_t}{2}\|x_t\|^2 + \sum_{s=0}^{m_0}\frac{1}{2\beta_s}\|A_s x - b_s\|^2,$$

$$\mathcal{D}_\sigma\colon\ \max_y \min_{x\geq 0}\mathcal{L}(x, y; \sigma) = \max_y \Psi_\sigma(y),\ \text{где } \Psi_\sigma(y) = (b, y) - \sum_{s=0}^{m_0}\frac{\beta_s}{2}\|y_s\|^2 - \sum_{t=0}^{n_0}\frac{1}{2\alpha_t}\|(B_t^T y - c_t)^+\|^2.$$

Вид функций $\Phi_\sigma(x)$ и $\Psi_\sigma(y)$ определяется из тех же соображений, что и в [6; 8].

Теорема 1. *Независимо от того, разрешимы или нет задачи P и D, задачи $\mathcal{P}_\sigma$ и $\mathcal{D}_\sigma$ для любого набора параметров $\sigma > 0$ разрешимы в единственных точках x^σ и y^σ соответственно и $\Phi_\sigma(x^\sigma) = \Psi_\sigma(y^\sigma) = \mathcal{L}(x^\sigma, y^\sigma; \sigma)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения непосредственно вытекает из общих теорем о минимаксе для выпукло-вогнутых функций (см., например, [9]).

Для описания аппроксимационных свойств предлагаемого подхода к двойственности рассмотрим следующие аналоги задач $\widehat{P}$ и $\widehat{D}$:

$$P(\Delta b, \Delta c)\colon\ \min\Big\{\sum_{t=0}^{n_0}(c_t+\Delta c_t, x_t)\colon A_s x = b_s+\Delta b_s,\ s=0,1,\dots,m_0;\ x\geq 0\Big\},$$

$$D(\Delta b, \Delta c)\colon\ \max\Big\{\sum_{s=0}^{m_0}(b_s+\Delta b_s, y_s)\colon B_t^T y \leq c_t+\Delta c_t,\ t=0,1,\dots,n_0\Big\}.$$

Теорема 2. *Решения x^σ и y^σ задач $\mathcal{P}_\sigma$ и $\mathcal{D}_\sigma$ являются одновременно решениями задач $P(\Delta b, \Delta c)$ и $D(\Delta b, \Delta c)$ при $\Delta c_t = \alpha_t x_t^\sigma$ $(t=0,1,\dots,n_0)$, $\Delta b_s = -\beta_s y_s^\sigma$ $(s=0,1,\dots,m_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для седловой точки $[x^\sigma, y^\sigma]$ выпукло-вогнутой функции (3) относительно области $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m$ выполняются стандартные условия Куна — Таккера:

$$\begin{gathered}\nabla_{x_t}\mathcal{L}(x^\sigma, y^\sigma;\sigma) = c_t - B_t^T y^\sigma + \alpha_t x_t^\sigma \geq 0 \quad (t=0,1,\dots,n_0),\\ \nabla_{y_s}\mathcal{L}(x^\sigma, y^\sigma;\sigma) = b_s - A_s x^\sigma - \beta_s y_s^\sigma = 0 \quad (s=0,1,\dots,m_0),\\ x_t^\sigma \geq 0, \quad (x_t^\sigma, \nabla_{x_t}\mathcal{L}(x^\sigma, y^\sigma;\sigma)) = 0 \quad (t=0,1,\dots,n_0).\end{gathered}$$

Из этих соотношений следует, что векторы x^σ и y^σ являются допустимыми соответственно для задач $P(\Delta c, \Delta b)$ и $D(\Delta c, \Delta b)$ при $\Delta c_t = \alpha_t x_t^\sigma$ $(t=0,1,\dots,n_0)$, $\Delta b_s = -\beta_s y_s^\sigma$ $(s=0,1,\dots,m_0)$ и для них выполнены условия дополняющей нежесткости. Следовательно, x^σ и y^σ оптимальны для этих задач.

Теорема доказана.

2. Лексикографическая коррекция несобственных задач линейного программирования 1-го рода

Перейдем к детальному исследованию аппроксимационных свойств новых схем формирования двойственности для НЗ ЛП. Для векторов коррекции, введенных в теореме 2, будут выявлены такие их свойства, которые являются обобщением утверждений (2), на более общую, лексикографическую, формулировку задачи оптимальной коррекции. Исследование будет ограничено случаем несобственности 1-го рода (т. е. неразрешимыми задачами, которые могут быть приведены к разрешимому виду путем коррекции правых частей своих ограничений). Это, с одной стороны, позволит сделать все рассуждения более прозрачными, а с другой — не сильно стеснит широту исследования, поскольку несобственность 2-го рода (т. е. задачи с неограниченной целевой функцией на непустом допустимом множестве) является дуальным отражением несобственности 1-го рода. К тому же задачи с противоречивыми ограничениями достаточно часто встречаются в приложениях и имеют хорошую интерпретацию. Что касается несобственности 3-го рода, т. е. когда одновременно противоречивы системы ограничений прямой и двойственной задач, то такие ситуации относительно редки и достаточно специфичны (в частности, известно, что свойство несобственности в этом случае неустойчиво к малым колебаниям коэффициентов матрицы A).

2.1. Постановка задачи

Пусть в схеме присутствует только горизонтальное разбиение исходных данных задач P и D. Соответственно прямая задача может быть записана в виде

$$P\colon\ \min\{(c,x)\colon A_s x = b_s\ (s=0,1,\dots,m_0),\ x\geq 0\}, \tag{4}$$

а двойственная к ней, как

$$D\colon\ \max\Big\{\sum_{s=0}^{m_0}(b_s, y_s)\colon\ \sum_{s=0}^{m_0}A_s^T y_s \le c\Big\}.$$

Всюду ниже будет считаться выполненным условие непустоты допустимой области двойственной задачи

$$Y_D = \Big\{y = [y_0, y_1, \dots, y_{m_0}]\colon\ \sum_{s=0}^{m_0}A_s^T y_s \le c\Big\} \ne \varnothing. \tag{5}$$

Это условие гарантирует, что задача (4) может оказаться либо разрешимой (при совместности ее ограничений), либо несобственной, но только 1-го рода (если ее ограничения противоречивы), так как в этом случае она может быть приведена к разрешимому виду путем коррекции правых частей своих ограничений.

Сформулируем задачу лексикографической [10;11] коррекции задачи (4) как задачу индуктивного построения конечной последовательности непустых выпуклых замкнутых множеств

$$X_0 = \operatorname{Arg\,min}\{\|A_0x - b_0\|^2\colon x \ge 0\},\quad X_1 = \operatorname{Arg\,min}\{\|A_1x - b_1\|^2\colon x \in X_0\}, \dots,$$
$$X_{m_0} = \operatorname{Arg\,min}\{\|A_{m_0}x - b_{m_0}\|^2\colon x \in X_{m_0-1}\}, \tag{6}$$

последнее из которых и будет замещать собой пустую допустимую область задачи P. Соответственно сама задача P будет заменена на

$$\widehat{P}\colon\ \min\{(c, x)\colon x \in X_{m_0}\}. \tag{7}$$

Построение множеств (6) эквивалентно последовательному решению серии задач поиска евклидовых проекций векторов $b_0, b_1, \dots, b_{m_0}$ на выпуклые замкнутые множества

$$U_0 = \{u\colon u = A_0x,\ x \ge 0\},\ U_1 = \{u\colon u = A_1x,\ x \in X_0\}, \dots, U_{m_0} = \{u\colon u = A_{m_0}x,\ x \in X_{m_0-1}\}.$$

Следовательно, найдутся единственные векторы

$$\widehat{u}_0 = \pi_{U_0}(b_0) - b_0,\quad \widehat{u}_1 = \pi_{U_1}(b_1) - b_1, \dots, \widehat{u}_{m_0} = \pi_{U_{m_0}}(b_{m_0}) - b_{m_0} \tag{8}$$

такие, что множества (6) можно представить в виде

$$X_0 = \{x\colon A_0x - b_0 = \widehat{u}_0,\ x \ge 0\},\quad X_1 = \{x\colon A_1x - b_1 = \widehat{u}_1,\ x \in X_0\}, \dots,$$
$$X_{m_0} = \{x\colon A_{m_0}x - b_{m_0} = \widehat{u}_{m_0},\ x \in X_{m_0-1}\};$$

здесь $\pi_B(\cdot)$ — оператор проектирования на B.

В частности, заключительное множество серии определяется как

$$X_{m_0} = \{x \ge 0\colon A_0x - b_0 = \widehat{u}_0,\ A_1x - b_1 = \widehat{u}_1, \dots, A_{m_0}x - b_{m_0} = \widehat{u}_{m_0}\},$$

в силу чего задача (7) может рассматриваться как задача, получающаяся из исходной путем корректировки правых частей ее ограничений-равенств, т. е. как задача, аппроксимирующая исходную несобственную постановку в смысле работы [2]. Соответственно ее минимальное по норме решение $\widehat{x}$ можно рассматривать в качестве обобщенного решения исходной несобственной постановки. При этом в собственном случае все $\widehat{u}_s = 0$, X_{m_0} совпадают с допустимой областью исходной задачи, $\widehat{x}$ является ее нормальным решением.

Векторы $\widehat{u}, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_{m_0}$ и обобщенное решение $\widehat{x}$ будем искать при помощи функции (3). Применительно к задаче (4) она примет вид

$$\widehat{\mathcal{L}}(x, y; \sigma) = (c, x) - \sum_{s=0}^{m_0}(y_s, A_sx - b_s) + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 - \frac{\beta_0}{2}\|y_0\|^2 - \frac{\beta_1}{2}\|y_1\|^2 - \ldots - \frac{\beta_{m_0}}{2}\|y_{m_0}\|^2,$$

где $\sigma = [\alpha,\, \beta_0,\, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}]$ — набор положительных параметров регуляризации. Соответственно несколько изменится и вид целевых функций $\Phi_\sigma(x)$ и $\Psi_\sigma(y)$ в задачах $\mathcal{P}_\sigma$ и $\mathcal{D}_\sigma$. В частности, $\Phi_\sigma(x)$ заменим на

$$\widehat{\Phi}_\sigma(x) = (c,x) + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + \sum_{s=0}^{m_0} \frac{1}{2\beta_s}\|A_s x - b_s\|^2.$$

Предметом дальнейшего исследования станет прямая задача $\mathcal{P}_\sigma$, т. е. задача

$$\min_{x\geq 0} \widehat{\Phi}_\sigma(x), \tag{9}$$

а целью — нахождение условий на параметры регуляризации σ, которые гарантировали бы сходимость ее решения x^σ к нормальному решению $\widehat{x}$ аппроксимирующей задачи (7).

2.2. Вспомогательные построения и оценки

Пусть имеется параметрическое семейство выпуклых полиэдральных множеств вида

$$Z(u) = \{z \in \mathbb{R}^s \colon Mz = u,\ z \geq 0\},$$

где матрица M размера $r \times s$ фиксирована и имеет полный строчный ранг, $u \in \mathbb{R}^r$ — параметр.

Лемма 1. *При любом фиксированном z_0 отображение $\eta\colon u \to \pi_{Z(u)}(z_0)$ непрерывно на множестве $\Omega = \{u \colon Z(u) \neq \varnothing\}$.*

Доказательство. В самом деле, вектор $z_u = \pi_{Z(u)}(z_0)$ является оптимальным вектором задачи квадратичного программирования $\min\{\|z - z_0\|^2 \colon Mz = u,\ z \geq 0\}$ с сильно выпуклой целевой функцией. Как показано, например, в [12], оптимальный вектор такой задачи непрерывно зависит от правых частей ее ограничений.

Обратимся теперь к задаче ЛП (7), заменив в ней фиксированные правые части ограничений на параметры

$$\min\{(c,x) \colon A_0 x - b_0 = u_0,\ A_1 x - b_1 = u_1, \ldots, A_{m_0} x - b_{m_0} = u_{m_0},\ x \geq 0\}. \tag{10}$$

В силу условия (5) функция оптимума этой задачи $\upsilon_0(\cdot)$ выпукла и кусочно-линейна на выпуклом многогранном множестве Ω_0 всех таких наборов $u = [u_0, u_1, \ldots, u_{m_0}]$, которые обеспечивают совместность ее ограничений. При этом оптимальный вектор коррекции $\widehat{u} = [\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_{m_0}]$, определяемый соотношениями (8), (7), лежит в Ω_0 и $\upsilon_0(\widehat{u}) = (c, \widehat{x})$.

Пусть $\widehat{x}(u)$ — минимальное по норме решение задачи (10).

Лемма 2. *Отображение $\eta\colon u \to \widehat{x}(u)$ непрерывно на Ω_0.*

Доказательство. Обсуждаемое отображение является суперпозицией двух отображений. Первое из этих отображений переводит исходный вектор $u \in \Omega_0$ в “расширенный” вектор $w = [\upsilon_0(u), u]$, второе переводит вектор w в минимальный по норме элемент оптимального множества задачи (10), которое можно представить в виде

$$\widehat{X}(u) = \{x \colon (c,x) = \upsilon_0(u),\ A_0 x - b_0 = u_0,\ A_1 x - b_1 = u_1, \ldots, A_{m_0} x - b_{m_0} = u_{m_0},\ x \geq 0\}.$$

Непрерывность первого отображения следует из непрерывности функции $\upsilon_0(\cdot)$, второго — из леммы 1. В итоге отображение η также оказывается непрерывным.

Лемма доказана.

Далее обратимся к задачам (6), также заменяя в них фиксированные правые части ограничений на параметры

$$\min\{\|A_i x - b_i\|^2 \colon A_0 x - b_0 = u_0,\ A_1 x - b_1 = u_1, \ldots, A_{i-1} x - b_{i-1} = u_{i-1},\ x \geq 0\}. \tag{11}$$

Известно [12; 13], что функции оптимума $\upsilon_i(u)$ этих задач конечны, непрерывны и выпуклы на множествах всех таких векторов $u = [u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}]$, которые обеспечивают совместность их ограничений. Для простоты обозначений будем считать, что функции $\upsilon_i(\cdot)$ зависят от всего набора векторов u_s. Это позволит сохранить для их области определения единое обозначение Ω_0. Как и ранее, оптимальный вектор коррекции $\widehat{u} = [\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_{m_0}] \in \Omega_0$ и $\upsilon_i(\widehat{u}) = \|\widehat{u}_i\|^2$ при $i = 1, \ldots, m_0$.

Хотя задачи (11) нелинейны, их оптимальные множества $\widehat{X}_i(u)$, как уже отмечалось выше, полиэдральны и описываются системами неравенств и уравнений вида

$$\widehat{X}_i(u) = \{x\colon A_0x - b_0 = u_0,\ A_1x - b_1 = u_1, \ldots, A_{i-1}x - b_{i-1} = u_{i-1},\ A_ix - b_i = \widehat{u}_i(u),\ x \geq 0\},$$

где $\widehat{u}_i(u) = \pi_{Z_i(u)}(b_i) - b_i$, $Z_i(u) = \{z\colon z = A_ix,\ x \in X_i(u)\}$, $X_i(u)$ — допустимое множество задачи (11).

Пусть $\widehat{x}(u;i)$ — минимальное по норме решение задачи (11). По аналогии с леммой 2 можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 3. *Каждое из отображений $\eta_i\colon u \to \widehat{x}(u;i)$, $i = 1, \ldots, m_0$, непрерывно на Ω_0.*

Доказательство. Каждое из обсуждаемых отображений является суперпозицией пяти непрерывных отображений. Первое из них переводит исходный вектор $u \in \Omega_0$ в выпуклое полиэдральное множество $X_i(u)$, второе переводит $X_i(u)$ в выпуклое полиэдральное множество $Z_i(u)$, третье переводит $Z_i(u)$ в $\widehat{u}_i(u) = \pi_{Z_i(u)}(b_i) - b_i$, четвертое переводит $\widehat{u}_i(u)$ в $\widehat{X}_i(u)$ и пятое переводит $\widehat{X}_i(u)$ в вектор $\widehat{x}(u;i)$. Непрерывность первого, третьего, четвертого и пятого отображений следует из леммы 1, второго — из его линейности.

Лемма доказана.

Вернемся к задаче (10). Оценим значение ее целевой функции в произвольной точке $x \geq 0$.

Лемма 4. *Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи* (7). *Существует такая константа N_0, что при всех $x \geq 0$ выполняется неравенство*

$$(c, \widehat{x} - x) \leq N_0 \sum_{s=0}^{m_0} \|A_sx - b_s - \widehat{u}_s\|.$$

Доказательство. В самом деле, поскольку задача (7) разрешима, то разрешима и задача, двойственная к ней:

$$\widehat{D}\colon\ \max\Big\{\sum_{s=0}^{m_0} (\widehat{u}_s, y_s)\colon\ \sum_{s=0}^{m_0} A_s^T y_s \leq c,\ y = [y_0, y_1, \ldots, y_{m_0}]\Big\}.$$

Пусть $\widehat{y} = [\widehat{y}_0, \widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_{m_0}]$ — ее минимальный по норме оптимальный вектор. Поскольку всякий оптимальный вектор двойственной задачи ЛП является субградиентом функции оптимума прямой задачи, то $\upsilon_0(u) \geq \upsilon_0(\widehat{u}) + \sum_{s=0}^{m_0} (\widehat{y}_s, u_s - \widehat{u}_s)$. Но вектор x удовлетворяет ограничениям задачи (10) при $u_s(x) = A_sx - b_s$ $(s = 0, \ldots, m_0)$. Следовательно,

$$(c, x) \geq \upsilon_0(u(x)) \geq (c, \widehat{x}) + \sum_{s=0}^{m_0} (\widehat{y}_s, A_sx - b_s - \widehat{u}_s) \geq (c, \widehat{x}) - N_0 \sum_{s=0}^{m_0} \|A_sx - b_s - \widehat{u}_s\|,$$

где $N_0 = \max_s \|\widehat{y}_s\|$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Наконец, рассмотрим задачи ЛП вида

$$\min\{(A_ix - b_i, \widehat{u}_i)\colon A_0x - b_0 = u_0,\ A_1x - b_1 = u_1, \ldots, A_{i-1}x - b_{i-1} = u_{i-1},\ x \geq 0\}. \tag{12}$$

Эти задачи получаются из задач (11) путем линеаризации последних в точке $\widehat{x}$. Функции оптимума $w_i(u)$ этих задач (которые для простоты обозначений также будем считать зависящими от полного набора векторов u_s) являются выпуклыми и кусочно-линейными на Ω_0. При этом, как и ранее, $\widehat{u} = [\widehat{u}, \widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_{m_0}] \in \Omega_0$ и $w_i(\widehat{u}) = \|\widehat{u}_i\|^2$ при $i = 1, \ldots, m_0$.

Приведем оценку снизу для целевой функции задачи (12) в произвольной точке $x \geq 0$.

Лемма 5. *Константу N_0 из предыдущей леммы можно сделать настолько большой, что при всех $x \geq 0$ и всех $i = 1, \ldots, m_0$ будут выполнены также неравенства*

$$\|\widehat{u}_i\|^2 - (A_i x - b_i, \widehat{u}_i) \leq N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|A_s x - b_s - \widehat{u}_s\|.$$

Доказательство данной леммы дословно следует схеме, использованной при доказательстве леммы 4.

В заключении раздела оценим поведение отклонений $\|A_i x - b_i - \widehat{u}_i\|$.

Лемма 6. *Пусть константа N_0 определена в предыдущей лемме. Тогда при всех $x \geq 0$ и всех $i = 1, \ldots, m_0$ выполнены неравенства*

$$\|A_i x - b_i - \widehat{u}_i\|^2 \leq \|A_i x - b_i\|^2 - \|\widehat{u}_i\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|A_s x - b_s - \widehat{u}_s\|.$$

Доказательство. Достаточно проследить следующую цепочку соотношений со ссылкой на лемму 5:

$$\|A_i x - b_i - \widehat{u}_i\|^2 = \|A_i x - b_i\|^2 + \|\widehat{u}_i\|^2 - 2(A_i x - b_i, \widehat{u}_i) \leq \|A_i x - b_i\|^2 - \|\widehat{u}_i\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|A_s x - b_s - \widehat{u}_s\|.$$

Лемма доказана.

Подчеркнем, что здесь отклонения для систем уравнений с большими индексами оценены через такие же отклонения для систем уравнений с меньшими индексами.

2.3. Сходимость по ограничениям

Всюду ниже будем предполагать, что параметры регуляризации α, β_0, β_1, $\ldots, \beta_{m_0}$ являются бесконечно малыми положительными величинами и

$$\gamma_s = \beta_{s-1}/\beta_s \to 0 \quad (0 < s \leq m_0). \tag{13}$$

Для удобства дальнейшего изучения промасштабируем целевую функцию задачи (9):

$$\widetilde{\Phi}_\omega(x) = 2\beta_0 \widehat{\Phi}_\sigma(x) = \|A_0 x - b_0\|^2 + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|A_s x - b_s\|^2 + \omega_{m_0+1}(c, x) + \omega_{m_0+2}\|x\|^2;$$

здесь введены новые параметры $\omega_1 = \beta_0/\beta_1$, $\omega_2 = \beta_0/\beta_2, \ldots, \omega_{m_0} = \beta_0/\beta_{m_0}$, $\omega_{m_0+1} = 2\beta_0$, $\omega_{m_0+2} = \alpha\beta_0$. В силу условий (13) они также являются бесконечно малыми положительными величинами и

$$\omega_s/\omega_{s-1} \to 0 \quad (s = 2, 3, \ldots, m_0 + 2). \tag{14}$$

Сосредоточимся на анализе свойств последовательности x^σ решений задач (9). Покажем вначале, что $\|A_s x^\sigma - b_s - \widehat{u}_s\| \to 0$ $(0 \leq s \leq m)$, где $\widehat{u}_s$ взяты из (8), (7). Для этого воспользуемся методом математической индукции. Базой этой индукции служит следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть параметры регуляризации* α, β_0, $\beta_1, \ldots, \beta_{m_0}$ *являются бесконечно малыми положительными величинами и выполнено условие* (13). *Тогда оптимальный вектор* x^σ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношению*

$$\delta_0(\sigma) = \|A_0 x^\sigma - b_0 - \widehat{u}_0\| \to 0.$$

Доказательство. Выпишем несколько вспомогательных неравенств. Во-первых, вектор $b_0 + \widehat{u}$ является евклидовой проекцией вектора b_0 на выпуклое замкнутое множество $U_0 = \{u \colon u = A_0 x,\ x \geq 0\}$, в силу чего

$$\|A_0 x^\sigma - b_0 - \widehat{u}_0\|^2 \leq \|A_0 x^\sigma - b_0\|^2 - \|\widehat{u}_0\|^2.$$

Во-вторых, по определению $\widetilde{\Phi}_\omega(x^\sigma) = \min_{x \geq 0} \widetilde{\Phi}_\omega(x) \leq \widetilde{\Phi}_\omega(\widehat{x})$, откуда вытекает неравенство

$$\|A_0 x^\sigma - b_0\|^2 - \|\widehat{u}_0\|^2 \leq \omega_{m_0+1}((c, \widehat{x}) - (c, x^\sigma)) + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\widehat{u}_s\|^2 - \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|A_s x^\sigma - b_s\|^2 + \omega_{m_0+2} \|\widehat{x}\|^2.$$

В-третьих, по лемме 4

$$\omega_{m_0+1}((c, \widehat{x}) - (c, x^\sigma)) \leq \omega_{m_0+1} N_0 \Big(\|A_0 x^\sigma - b_0 - \widehat{u}_0\| + \sum_{s=1}^{m_0} \|A_s x^\sigma - b_s\| + \sum_{s=1}^{m_0} \|\widehat{u}_s\| \Big).$$

В-четвертых, выделяя полные квадраты, получаем

$$\omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \|A_s x^\sigma - b_s\| - \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|A_s x^\sigma - b_s\|^2$$

$$= \omega_{m_0+1} \Big[N_0^2 \sum_{s=1}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} - \sum_{s=1}^{m_0} \Big(\sqrt{\frac{\omega_s}{\omega_{m_0+1}}} \|A_s x^\sigma - b_s\| - N_0 \sqrt{\frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}} \,\Big)^2 \Big] \leq \omega_{m_0+1} N_0^2 \sum_{s=1}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}. \quad (15)$$

Складывая эти четыре неравенства, приходим к соотношению

$$\|A_0 x^\sigma - b_0 - \widehat{u}_0\|^2$$
$$\leq \omega_{m_0+1} N_0 \|A_0 x^\sigma - b_0 - \widehat{u}_0\| + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\widehat{u}_s\|^2 + \omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \Big(\|\widehat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \Big) + \omega_{m_0+2} \|\widehat{x}\|^2.$$

В силу условий (13), (14) найдется такая константа N_1, что три последних слагаемых выше могут быть оценены как

$$\sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\widehat{u}_s\|^2 + \omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \Big(\|\widehat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \Big) + \omega_{m_0+2} \|\widehat{x}\|^2 \leq N_1 \omega_1.$$

Поэтому $\|A_0 x^\sigma - b_0 - \widehat{u}_0\|^2 \leq \omega_{m_0+1} N_0 \|A_0 x^\sigma - b_0 - \widehat{u}_0\| + N_1 \omega_1$ и, следовательно, найдется такая константа N_2, что

$$\delta_0(\sigma) = \|A_0 x^\sigma - b_0 - \widehat{u}_0\| \leq \frac{\omega_{m_0+1} N_0}{2} + \sqrt{\Big(\frac{\omega_{m_0+1} N_0}{2} \Big)^2 + N_1 \omega_1} \leq N_2 \sqrt{\omega_1} \to 0.$$

Здесь мы также воспользовались условиями (13), (14).

Лемма доказана.

Перейдем к обоснованию шага индукции.

Лемма 8. *Пусть выполнены предположения предыдущей леммы и оптимальный вектор* x^σ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношениям*

$$\delta_s(\sigma) = \|A_s x^\sigma - b_s - \widehat{u}_s\| \to 0 \quad (s = 0, 1, \dots, k < m_0 - 1). \tag{16}$$

Тогда $\quad \delta_{k+1}(\sigma) = \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\| \to 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widehat{x}(u^\sigma; k+1)$ — минимальное по норме решение задачи (11) с номером $i = k+1$, отвечающее правым частям $u_s = u_s^\sigma = A_s x^\sigma - b_s$ $(s = 0, 1, \dots, m_0)$. Фактически это решение зависит только от первых k блоков вектора u^σ. По предположению индукции эти компоненты сходятся к соответствующим компонентам вектора $\widehat{u}$, что по лемме 3 обеспечивает равномерную по σ ограниченность векторов $\widehat{x}(u^\sigma; k+1)$ и в силу непрерывности функции оптимума $\upsilon_{k+1}(\cdot)$ сходимость $\tau_{k+1}(\sigma) := \upsilon_{k+1}(u^\sigma) - \|\widehat{u}_{k+1}\|^2 \to 0$.

Далее, как и при доказательстве предыдущей леммы, выпишем ряд неравенств. Во-первых, в соответствии с леммой 6 и условиями (16)

$$\|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\|^2 \le \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1}\|^2 - \|\widehat{u}_{k+1}\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{k} \|A_s x^\sigma - b_s - \widehat{u}_s\|$$
$$= \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1}\|^2 - \|\widehat{u}_{k+1}\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{k} \delta_s(\sigma).$$

Во-вторых, по определению $\widetilde{\Phi}_\omega(x^\sigma) = \min\limits_{x \ge 0} \widetilde{\Phi}_\omega(x) \le \widetilde{\Phi}_\omega(\widehat{x}(u^\sigma; k+1))$, откуда, с учетом совпадения первых $k+1$ слагаемых у $\widetilde{\Phi}_\omega(x^\sigma)$ и $\widetilde{\Phi}_\omega(\widehat{x}(u^\sigma; k+1))$, имеем неравенство

$$\|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1}\|^2 \le \upsilon_{k+1}(u^\sigma) + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}}((c, \widehat{x}(u^\sigma; k+1)) - (c, x^\sigma))$$
$$+ \frac{\omega_{m_0+2}}{\omega_{k+1}}(\|\widehat{x}(u^\sigma; k+1)\|^2 - \|x^\sigma\|^2) + \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s \widehat{x}(u^\sigma; k+1) - b_s\|^2 - \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s x^\sigma - b_s\|^2.$$

В-третьих, по лемме 4

$$\frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}}((c, \widehat{x}) - (c, x^\sigma)) \le \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \Big(\sum_{s=0}^{k+1} \delta_s(\sigma) + \sum_{s=k+2}^{m_0} (\|A_s x^\sigma - b_s\| + \|\widehat{u}_s\|) \Big).$$

В-четвертых, по полной аналогии с (15)

$$\frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \sum_{s=k+2}^{m_0} \|A_s x^\sigma - b_s\| - \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s x^\sigma - b_s\|^2 \le \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0^2 \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}.$$

Складывая эти четыре неравенства, приходим к оценке

$$\|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\|^2 \le \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\| + \upsilon_{k+1}(u^\sigma) - \|\widehat{u}_{k+1}\|^2$$
$$+ N_0 \Big(2 + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} \Big) \sum_{s=0}^{k} \delta_s(\sigma) + \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s \widehat{x}(u^\sigma; k+1) - b_s\|^2$$
$$+ \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \sum_{s=k+2}^{m_0} \Big(\|\widehat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \Big). \tag{17}$$

Раньше уже отмечалось, что в силу предположений индукции и непрерывности функции $\upsilon_{k+1}(\cdot)$ имеет место сходимость $\tau_{k+1}(\sigma) = \upsilon_{k+1}(u^\sigma) - \|\widehat{u}_{k+1}\|^2 \to 0$. Кроме того, в силу условий (14) и равномерной по x^σ ограниченности векторов $\widehat{x}(u^\sigma; k+1)$ найдутся такие константы N_3, N_4, N_5, что

$$N_0\Big(2 + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}}\Big) \le N_3, \qquad \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s \widehat{x}(u^\sigma; k+1) - b_s\|^2 \le \frac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}} N_4,$$

$$N_0 \sum_{s=k+2}^{m_0} \Big(\|\widehat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}\Big) \le N_5.$$

Следовательно, оценку (17) можно переписать как

$$\|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\|^2 \le \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\| + \tau_{k+1}(\sigma)$$

$$+ N_3 \sum_{s=0}^{k} \delta_s(\sigma) + \frac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}} N_4 + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_5 \le \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\| + \theta_{k+1}(\sigma), \qquad (18)$$

где

$$\theta_{k+1}(\sigma) = \tau_{k+1}(\sigma) + N_3 \sum_{s=0}^{k} \delta_s(\sigma) + \frac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}} N_4 + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_5 \to 0.$$

Неравенство (18) является квадратным относительно $\|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\|$. Решая его и учитывая условия (14), убеждаемся в существовании такой константы N_6, что

$$\delta_{k+1} = \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\| \le \frac{N_0\omega_{m_0+1}}{2\omega_{k+1}} + \sqrt{\Big(\frac{N_0\omega_{m_0+1}}{2\omega_{k+1}}\Big)^2 + \theta_{k+1}(\sigma)} \le N_6\sqrt{\theta_{k+1}(\sigma)} \to 0.$$

Лемма доказана.

Леммы 7, 8 показывают, что оптимальный вектор x^σ задачи (9) удовлетворяет соотношениям $\delta_s(\sigma) = \|A_s x^\sigma - b_s - \widehat{u}_s\| \to 0$ $(0 \le s < m_0)$.

Осталось оценить величину $\|A_{m_0}x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\|$.

Лемма 9. *Пусть выполнены предположения предыдущей леммы. Тогда оптимальный вектор x^σ задачи* (9) *удовлетворяет соотношению* $\delta_{m_0}(\sigma) = \|A_{m_0}x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\| \to 0$.

Доказательство. Достаточно повторить выкладки из доказательства предыдущей леммы применительно к индексу $k = m - 1$, опуская при этом те суммы, у которых нижний индекс суммирования превосходит верхний (этих сумм в рассматриваемом случае просто нет). В результате получим аналог неравенства (17) в виде

$$\|A_{m_0}x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\|^2 \le \frac{N_0\omega_{m_0+1}}{2\omega_{m_0}} \|A_{m_0}x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\| + \theta_{m_0}(\sigma),$$

где в силу леммы 8 и непрерывности функции оптимума $\upsilon_{m_0}(\cdot)$

$$\theta_{m_0}(\sigma) = \upsilon_{m_0}(u^\sigma) - \|\widehat{u}_{m_0}\|^2 + N_3 \sum_{s=0}^{m_0-1} \delta_s(\sigma) \to 0.$$

Решая это квадратное неравенство относительно $\|A_{m_0}x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\|$, получаем искомое

$$\delta_{m_0} = \|A_{m_0}x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\| \le N_0\frac{\omega_{m_0+1}}{2\omega_{m_0}} + \sqrt{\Big(\frac{N_0\omega_{m_0+1}}{2\omega_{m_0}}\Big)^2 + \theta_{m_0}(\sigma)} \le N_6\sqrt{\theta_{m_0}(\sigma)} \to 0.$$

Доказательство завершено.

Две последние леммы (с учетом леммы Хоффмана [14]) позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть параметры регуляризации* α, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}$ *являются бесконечно малыми положительными величинами и выполнено условие* (13). *Тогда оптимальный вектор* x^σ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношению* $\rho(x^\sigma, X_{m_0}) \to 0$.

Таким образом, последовательность $\{x^\sigma\}$ является обобщенным допустимым планом лексикографически оптимально скорректированной задачи (7).

2.4. Сходимость к нормальному решению

Исследуем поведение величин (c, x^σ).

Лемма 10. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда оптимальный вектор* x^σ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношению* $(c, x^\sigma - \widehat{x}) \to 0$.

Доказательство. Пусть $\widehat{x}(u^\sigma)$ — минимальное по норме решение задачи (10), отвечающее правым частям $u_s = u_s^\sigma = A_s x^\sigma - b_s$ $(s = 0, 1, \ldots, m_0)$. Поскольку вектор x^σ допустим для задачи (11) с теми же самыми правыми частями ограничений, то $(c, x^\sigma) \geq \upsilon_0(u^\sigma)$. Вместе с тем $\widetilde{\Phi}_\omega(x^\sigma) = \min\limits_{x \geq 0} \widetilde{\Phi}_\omega(x) \leq \widetilde{\Phi}_\omega(\widehat{x}(u^\sigma))$, откуда, с учетом того что первые $m+1$ слагаемых у $\widetilde{\Phi}_\omega(x^\sigma)$ и $\widetilde{\Phi}_\omega(\widehat{x}(u^\sigma))$ одинаковы, получаем

$$0 \leq (c, x^\sigma) - \upsilon_0(u^\sigma) \leq \frac{\omega_{m_0+2}}{\omega_{m_0+1}} (\|\widehat{x}(u^\sigma)\|^2 - \|x^\sigma\|^2). \tag{19}$$

Осталось перейти к пределу в левой и правой частях этого соотношения и учесть теорему 3, равномерную ограниченность решений $\widehat{x}(u^\sigma)$, непрерывность функции оптимума $\upsilon_0(\cdot)$ и условия на параметры регуляризации (14).

Лемма доказана.

В завершение анализа предложенной схемы регуляризации покажем сходимость оптимальных векторов задачи (9) к нормальному решению задачи (7).

Лемма 11. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда оптимальный вектор* x^σ *задачи* (9) *сходится к* $\widehat{x}$ *— нормальному решению задачи* (7).

Доказательство. В самом деле, поскольку уже доказано, что $(c, x^\sigma) \to (c, \widehat{x})$ и $u_s^\sigma = A_s x^\sigma - b_s \to \widehat{u}_s$ $(s = 0, 1, \ldots, m_0)$, то по лемме Хоффмана $\rho(x^\sigma, \widehat{X}_{m_0}) \to 0$, где $\widehat{X}_{m_0}$ — оптимальное множество задачи (7). Вместе с тем из (19) и леммы 2 имеем $\|x^\sigma\| \leq \|\widehat{x}(u^\sigma)\| \to \|\widehat{x}\|$, что возможно, только если $x^\sigma \to \widehat{x}$.

Доказательство завершено.

Соединяя воедино утверждения теорем 1–3 и лемм 10, 11, можно сформулировать итоговое утверждение раздела.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $[x^\sigma, y^\sigma]$ *— седловая точка симметрично регуляризованной функции Лагранжа* (3) *относительно области* $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m$. *Тогда вектор* x^σ *является решением задачи* (9) *и выполняются соотношения:*

$$x^\sigma \to \widehat{x}, \quad -\beta_s y_s^\sigma = A_s x^\sigma - b_s = u_s^\sigma \to \widehat{u}_s \quad (s = 0, 1, \ldots, m_0),$$

где $\widehat{x}$ *— нормальное решение задачи* (7), *векторы* $\widehat{u}_s$ *— из соотношений* (7), (8).

3. Заключение

Предложен и исследован новый подход к лексикографической коррекции несобственных задач линейного программирования. В основе подхода лежит многоступенчатая симметричная регуляризация классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным. Получающаяся функция может быть положена в основу формирования новых схем двойственности для задач такого типа. Приведены условия сходимости метода, дана содержательная интерпретация получаемого решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Еремин И.И.** Двойственность в линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 180 с.
4. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
5. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. **Скарин В.Д.** Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 3. С. 439–448.
7. **Попов Л.Д.** Линейная коррекция несобственных минимаксных выпукло-вогнутых задач по максиминному критерию // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 9. С. 1100–1110.
8. **Скарин В.Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
9. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
10. **Еремин И.И.** О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 124–129.
11. **Федоров В.В.** Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
12. **Guddat J.** Stability in convex quadratic programming // Mathematische Operationsforschung und Statistik. 1976. Vol. 8. P. 223–245.
13. **Dorn W.S.** Duality in quadratic programming // Buart. Appl. Math. 1960. № 18. P. 407–413.
14. **Hoffman A.J.** On approximate solutions of systems of linear inequalities // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1952. Vol. 49. P. 263–265.

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 11.03.2015

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: skavd@imm.uran.ru