ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.542

О p-СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ С НОРМАЛЬНЫМИ СОМНОЖИТЕЛЯМИ

В. С. Монахов, И. К. Чирик

Получены “p-аналоги” известных признаков сверхразрешимости конечной группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B. Найдены новые достаточные условия сверхразрешимости конечной группы при более жестких условиях, чем сверхразрешимость нормальных сомножителей.

Ключевые слова: конечная группа, p-сверхразрешимая группа, p-разрешимая группа, MNP-группа, t-группа.

V. S. Monakhov, I. K. Chirik. On the p-supersolvability of a finite factorizable group with normal factors.

We obtain “p-analogs” of known criteria for the supersolvability of a finite group $G = AB$ with normal supersolvable subgroups A and B. In addition, new sufficient conditions for the supersolvability of a finite group are found under stronger conditions than the supersolvability of normal factors.

Keywords: finite group, p-supersolvable group, p-solvable group, MNP-group, t-group.

Посвящается В. В. Кабанову в связи с 70-летием!

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1; 2].

В 1953 г. Хупперт [3] показал, что группа, являющаяся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, в общем случае не является сверхразрешимой. Соответствующие примеры известны [1, с. 159-160]. Поэтому для получения сверхразрешимости группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B необходимы дополнительные ограничения.

В 1957 г. Бэр [4, с. 186] установил сверхразрешимость группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что ее коммутант G' — нильпотентная подгруппа.

П р и м е р [4, с. 186]. Пусть $E_{p^2} = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ — элементарная абелева группа порядка p^2, простое число $p \not\equiv 1 \pmod 4$,

$$D = \langle c, d \mid c^4 = d^2 = 1,\ c^d = c^3\rangle$$

— диэдральная группа порядка 8, которая действует на E_{p^2} следующим образом:

$$a^c = b^{-1},\quad b^c = a,\quad a^d = b,\quad b^d = a.$$

Пусть $G = [E_{p^2}]D_8$ — подгруппа из голоморфа E_{p^2}. Подгруппы

$$A = [E_{p^2}](\langle c^2\rangle \times \langle d\rangle),\quad B = [E_{p^2}](\langle c^2\rangle \times \langle cd\rangle)$$

сверхразрешимы, нормальны и $G = AB$. Поскольку $a^{c^2} = a^{-1}$, то коммутант $G' = [E_{p^2}]\langle c^2\rangle$ ненильпотентен. Поэтому группа G несверхразрешима.

Результат Бэра развили А. Ф. Васильев и Т. И. Васильева в 1997 г. Они установили [5, следствие 3] сверхразрешимость группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что в G существует нильпотентная нормальная подгруппа W такая, что в G/W все силовские подгруппы абелевы.

В 1971 г. в работе Фризен [6] установлена сверхразрешимость группы $G = AB$ при условии, что A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы взаимно простых индексов.

В настоящей работе получены “p-аналоги” этих результатов. Кроме того, получены новые признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ при более жестких условиях, чем сверхразрешимость нормальных сомножителей A и B.

Пусть p — простое число. Группа называется p-разрешимой, если порядки ее главных факторов либо являются степенью p, либо не делятся на p. Группа называется p-сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов либо равны p, либо не делятся на p. Через $p\mathfrak{S}$ обозначим класс всех p-разрешимых, а через $p\mathfrak{U}$ класс всех p-сверхразрешимых групп. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной. Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так: $G = [A]B$.

Через $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; Z_m и E_{p^t} — циклическая и элементарная абелева группы порядков m и p^t соответственно; $\mathrm{O}_p(G)$ и $\mathrm{O}_{p'}(G)$ — наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно; $r_p(G)$ и $l_p(G)$ — p-ранг и p-длина p-разрешимой группы G соответственно, а $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G.

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1 [2, VI.9]. 1) *Класс $p\mathfrak{U}$ — наследственная насыщенная формация.*

2) *Каждая минимальная нормальная подгруппа p-сверхразрешимой группы является либо p'-подгруппой, либо подгруппой порядка p. В частности, p-ранг p-сверхразрешимой группы равен* 1.

3) *Пусть N — нормальная в G подгруппа и $G/N \in p\mathfrak{U}$. Если N циклическая или $N \in \{Z(G), \mathrm{O}_{p'}(G), \Phi(G)\}$, то $G \in p\mathfrak{U}$.*

Лемма 2 [2, VI.1]. 1) *Класс $p\mathfrak{S}$ — наследственная радикальная насыщенная формация.*

2) *Если N — нормальная в группе G подгруппа, $N \in p\mathfrak{S}$ и $G/N \in p\mathfrak{S}$, то $G \in p\mathfrak{S}$.*

3) *Каждая минимальная нормальная в p-разрешимой группе G подгруппа является либо p'-подгруппой, либо элементарной абелевой p-подгруппой.*

Лемма 3. *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда*:

1) *если $G \neq 1$, то $1 \neq \mathrm{O}_p(G)\,\mathrm{O}_{p'}(G) = \mathrm{O}_p(G) \times \mathrm{O}_{p'}(G) = \mathrm{O}_{p,p'}(G) \cap \mathrm{O}_{p',p}(G)$;*

2) *$C_G(\mathrm{O}_p(G) \times \mathrm{O}_{p'}(G)) \subseteq \mathrm{O}_p(G) \times \mathrm{O}_{p'}(G)$;*

3) *$\mathrm{O}_{p'}(G/\Phi(G)) = \mathrm{O}_{p'}(G)\Phi(G)/\Phi(G)$ и $\mathrm{O}_p(G/\Phi(G)) = \mathrm{O}_p(G)\Phi(G)/\Phi(G)$;*

4) *$C_G(\mathrm{O}_{p,p'}(G)) \subseteq \mathrm{O}_{p,p'}(G)$ и $C_G(\mathrm{O}_{p',p}(G)) \subseteq \mathrm{O}_{p',p}(G)$.*

Доказательство. 1) В неединичной p-разрешимой группе по лемме 2 минимальные нормальные подгруппы являются p'-подгруппами или элементарными абелевыми p-подгруппами, поэтому $\mathrm{O}_p(G)\,\mathrm{O}_{p'}(G) \neq 1$. Так как $\mathrm{O}_p(G)$ и $\mathrm{O}_{p'}(G)$ — две нормальные в G подгруппы взаимно простых порядков, то $\mathrm{O}_p(G)\,\mathrm{O}_{p'}(G) = \mathrm{O}_p(G) \times \mathrm{O}_{p'}(G)$. Понятно, что

$$\mathrm{O}_p(G) \times \mathrm{O}_{p'}(G) \subseteq \mathrm{O}_{p,p'}(G) \cap \mathrm{O}_{p',p}(G).$$

Если $X = \mathrm{O}_{p,p'}(G) \cap \mathrm{O}_{p',p}(G)$, то X — нормальная в G p-разложимая подгруппа, поэтому $X \subseteq \mathrm{O}_p(G) \times \mathrm{O}_{p'}(G)$. В итоге имеем равенство

$$\mathrm{O}_p(G) \times \mathrm{O}_{p'}(G) = \mathrm{O}_{p,p'}(G) \cap \mathrm{O}_{p',p}(G).$$

2) Пусть $\mathrm{O}_p(G) \times \mathrm{O}_{p'}(G) = K$, $C_G(K) = C$. Предположим, что $CK/K \neq 1$, и пусть L/K — минимальная нормальная в G/K подгруппа, содержащаяся в CK/K. По тождеству Дедекинда $L = (L \cap C)K$.

Допустим, что L/K — p-подгруппа. Тогда $L = L_pK$ для силовской p-подгруппы L_p из L. Из равенства $L = (L \cap C)K$ ввиду [2, VI.4.7] получаем, что $L_p = PK_p$, где P — силовская p-подгруппа из $L \cap C$, а K_p — силовская p-подгруппа из K. Но теперь $L = PK$, поэтому P нормальна в $L \cap C$, а $L \cap C$ нормальна в G. Отсюда следует, что

$$P \subseteq \mathrm{O}_p(L \cap C) \subseteq \mathrm{O}_p(G) \subseteq K, \quad L = K,$$

противоречие.

Пусть теперь L/K — p'-подгруппа. Тогда $L = L_{p'}K$ для p'-холловой подгруппы $L_{p'}$ из L. Из равенства $L = (L \cap C)K$ ввиду [2, VI.4.6] получаем, что $L_{p'} = TK_{p'}$, где T — p'-холлова подгруппа из $L \cap C$, а $K_{p'}$ — p'-холлова подгруппа из K. Но теперь $L = TK$, поэтому T нормальна в $L \cap C$, а $L \cap C$ нормальна в G. Отсюда следует, что

$$T \subseteq \mathrm{O}_{p'}(L \cap C) \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G) \subseteq K, \quad L = K,$$

противоречие.

Поэтому допущение неверно и $CK/K = 1$, т. е. $C \subseteq K$. Утверждение 2) доказано.

3) Ясно, что $\mathrm{O}_{p'}(G)\Phi(G)/\Phi(G) \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G/\Phi(G))$. Проверим обратное включение. Пусть $\mathrm{O}_{p'}(G/\Phi(G)) = H/\Phi(G)$. Тогда $H = H_{p'}\Phi(G)$ для p'-холловой подгруппы $H_{p'}$ из H. По лемме Фраттини $G = N_G(H_{p'})\Phi(G) = N_G(H_{p'})$, т. е. $H_{p'}$ нормальна в G. Теперь

$$H_{p'} \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G), \quad \mathrm{O}_{p'}(G/\Phi(G)) = H/\Phi(G) \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G)\Phi(G))/\Phi(G).$$

В итоге имеет требуемое равенство.

Аналогично проверяется, что $\mathrm{O}_p(G/\Phi(G)) = \mathrm{O}_p(G)\Phi(G)/\Phi(G)$.

4) См. [7, IX.1.3].

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — p-сверхразрешимая группа, P — силовская p-подгруппа в G, H — p'-холлова подгруппа в G. Если $O_{p'}(G) = 1$, то*

1) *подгруппа P нормальна в G и $F(G) = P$;*

2) *если $\Phi(G) = 1$, то $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_t$, где P_i — нормальная в G подгруппа простого порядка для каждого i; в частности, подгруппа P элементарная абелева;*

3) *подгруппа H абелева экспоненты, делящей $p - 1$;*

4) *группа G сверхразрешима.*

Доказательство. 1) Согласно утверждению 2) леммы 1 $r_p(G) = 1$. Так как $l_p(G) \leq r_p(G)$ [2, VI.6.6] и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то подгруппа P нормальна в G. Понятно, что $F(G) = P$.

2) Пусть $\Phi(G) = 1$. В этом случае подгруппа Фиттинга $F(G)$ является прямым произведением абелевых минимальных нормальных в G подгрупп [1, 4.24]. Так как $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то все прямые сомножители будут подгруппами порядка p.

3) Коммутант G' является p-нильпотентной подгруппой [2, VI.9.1; 8, 2.1.6, с. 70]. Поскольку $\mathrm{O}_{p'}(G') \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то G' — p-подгруппа и H абелева.

По утверждению 3) леммы 3 $\mathrm{O}_{p'}(G/\Phi(G)) = 1$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $\Phi(G)$ — p-группа и по индукции $H\Phi(G)/\Phi(G) \simeq H$ — абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$. Далее считаем, что $\Phi(G) = 1$. Из утверждения 2) доказываемой леммы следует, что

$$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n,$$

где все подгруппы P_i нормальны в группе G и $|P_i| = p$.

Фактор-группа $G/C_G(P_i)$ изоморфна некоторой подгруппе из группы $\mathrm{Aut}(P_i)$, поэтому $G/C_G(P_i)$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Ясно, что

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_G(P_i) = C_G(P).$$

Поскольку $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$ и P абелева, то $C_G(P) = P$ по утверждению 2) леммы 3. Но группа $G/\bigcap_{i=1}^{n} C_G(P_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения

$$G/C_G(P_1) \times \ldots \times G/C_G(P_n),$$

поэтому $H \simeq G/P$ будет абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$.

4) Используя индукцию по порядку группы G, можно считать ввиду утверждения 3) леммы 3, что $\Phi(G) = 1$, поэтому P элементарная абелева. Из утверждения 2) следует, что

$$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n,$$

все подгруппы P_i нормальны в группе G и $|P_i| = p$. Ясно, что $P = F(G)$ и нормальный ряд

$$1 \subseteq P_1 \subseteq P_1 \times P_2 \subseteq \ldots < P_1 \times \ldots \times P_i \subseteq \ldots \subseteq P = F(G)$$

состоит из нормальных в G подгрупп таких, что факторы

$$(P_1 \times \ldots \times P_i)/(P_1 \times \ldots \times P_{i-1})$$

имеют простые порядки. По [2, VI.9.9] группа G сверхразрешима.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Предположим, что p-разрешимая группа G не принадлежит $p\mathfrak{U}$, но $G/K \in p\mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $Z(G) = \mathrm{O}_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;

2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = F(G) = \mathrm{O}_p(G) = C_G(N)$*;

3) *G — примитивная группа; $G = [N]M$, где M — максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром*;

4) *N — элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$*;

5) *если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть N — нормальная в G неединичная подгруппа и

$$N \in \{Z(G), \mathrm{O}_{p'}(G), \Phi(G)\}.$$

По условию $G/N \in p\mathfrak{U}$. Из утверждения 3) леммы 1 следует, что $G \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Поэтому

$$Z(G) = \mathrm{O}_{p'}(G) = \Phi(G) = 1.$$

2) Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию

$$G/N_1 \in p\mathfrak{U},\ G/N_2 \in p\mathfrak{U},$$

а поскольку $p\mathfrak{U}$ — формация, то

$$G \simeq G/(N_1 \cap N_2) \in p\mathfrak{U},$$

противоречие. Значит, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. В p-разрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа является либо p'-подгруппой, либо абелевой p-подгруппой. Так как $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то N будет p-подгруппой. В группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает с произведением всех абелевых минимальных нормальных подгрупп [1, теорема 4.24], поэтому

$$N = F(G) = \mathrm{O}_p(G).$$

Из [9, лемма 2] получаем, что $N = C_G(N)$.

3) Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M, не содержащая подгруппу N. Ясно, что $G = MN$. Если $\mathrm{Core}_G M \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что

$$N \subseteq \mathrm{Core}_G M, \ G = MN = M,$$

противоречие. Поэтому $\mathrm{Core}_G M = 1$ и G — примитивная группа с примитиватором M. Из того, что N — минимальная нормальная в G подгруппа и $G = NM$ следует, что $N \cap M = 1$ и $G = [N]M$.

4) Поскольку G — p-разрешимая группа и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то N — элементарная абелева подгруппа порядка p^n и $n > 1$ по утверждению 3) леммы 1.

5) Предположим, что подгруппа M абелева. Так как N — минимальная нормальная в G подгруппа, то M действует неприводимо на N. По [10, лемма 4.1] подгруппа M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если группа G является p-сверхразрешимой для любого $p \in \pi(G)$, то G — сверхразрешимая группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G и $r \in \pi(N)$. Так как G является r-сверхразрешимой, то $|N| = r$. По индукции фактор-группа G/N сверхразрешима. Следовательно, G — сверхразрешимая группа.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $G' = [A, B]A'B'$;

2) *если* $(|G : A|, |G : B|) = 1$, *то* $G' = A'B'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть x и y — произвольные элементы группы G. Тогда

$$x = ab, \quad y = cd, \quad a, c \in A, \quad b, d \in B.$$

Для коммутаторов известны следующие тождества [1, лемма 4.1]:

$$[uv, w] = [u, w]^v [v, w]; \quad [u, vw] = [u, w][u, v]^w.$$

Применим эти тождества при вычислении $[x, y]$:

$$[x, y] = [ab, cd] = [a, cd]^b [b, cd] = ([a, d][a, c]^d)^b ([b, d][b, c]^d).$$

Ясно, что

$$[a, d] \in [A, B], \quad [a, c] \in A', \quad [b, d] \in B', \quad [b, c] \in [B, A].$$

Поскольку подгруппы A, B, A', A' и $[A, B] = [B, A]$ нормальны в G, то $[x, y] \in [A, B]A'B'$ и $G' = [A, B]A'B'$.

2) Если $|G:A| = n$, $|G:B| = m$, то $g^n \in A$ и $g^m \in B$ для любого элемента $g \in G$. По условию n и m — взаимно простые числа, значит существуют целые числа k и l такие, что $1 = nk + ml$. Теперь

$$g = g^{nk+ml} = (g^n)^k (g^m)^l = (g^m)^l (g^n)^k,$$

т. е. каждый элемент g из группы G можно записать в виде $g = ab = ba$, где $a \in A$ и $b \in B$.

Пусть теперь $x \in A$, $y \in B$ — произвольные элементы и $y^{-1}x = ab = ba$, где $a \in A$ и $b \in B$. Тогда

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}aby = ax^{-1}[x^{-1}, a][b^{-1}, y^{-1}]yb,$$

где $[x^{-1}, a] \in A'$, $[b^{-1}, y^{-1}] \in B'$. Полагая $w = ax^{-1}[x^{-1}, a][b^{-1}, y^{-1}]xa^{-1}$, получим, что $w \in A'B'$ и $[x, y] = wax^{-1}yb$. Так как

$$(x^{-1}y) = (y^{-1}x)^{-1} = (ab)^{-1} = (ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1},$$

то $[x, y] = wax^{-1}yb = waa^{-1}b^{-1}b = w \in A'B'$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть A и B — неединичные p-сверхразрешимые нормальные подгруппы группы G. Через P обозначим силовскую p-подгруппу группы G, и пусть H и K — p'-холловы подгруппы из A и B соответственно такие, что $HK = KH$. Предположим, что $G = AB$ и $O_{p'}(G) = 1$. Если G примитивна, то справедливы следующие утверждения*:

1) *$A = [P]H$, где $P = F(G) = \mathrm{O}_p(G)$ — минимальная нормальная в G подгруппа, H — абелева подгруппа экспоненты, делящей $p - 1$;*

2) *$B = [P]K$, где K — абелева подгруппа экспоненты, делящей $p - 1$;*

3) *$HK = KH$ — нильпотентная p'-холлова подгруппа группы G, подгруппы H и K нормальны в HK;*

4) *HK — максимальная в G подгруппа и $\mathrm{Core}_G(HK) = 1$;*

5) *A и B сверхразрешимы.*

Доказательство. В силу [2, VI.4.6] подгруппы H и K существуют и $HK = KH$ является p'-холловой подгруппой группы G.

1)–2) Пусть P_1 — силовская p-подгруппа в A. Так как A нормальна в G, то $\mathrm{O}_{p'}(A) \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G) = 1$ и $A = [P_1]H$, подгруппа H абелева экспоненты, делящей $p-1$ по лемме 4. Поскольку $A \neq 1$, то $P_1 \neq 1$ и P_1 нормальна в G. По условию группа G примитивна, поэтому $\Phi(G) = 1$ и $F(G)$ — единственная в G минимальная нормальная подгруппа [1, 4.40]. Значит, $P_1 = F(G) = \mathrm{O}_p(G)$. Так как группа G p-разрешима и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то $C_G(P_1) = P_1$ по лемме 3.

Пусть P_2 — силовская p-подгруппа в B. Поскольку B нормальна в G, то $\mathrm{O}_{p'}(B) \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G) = 1$ и $B = [P_2]K$, подгруппа K абелева экспоненты, делящей $p - 1$ по лемме 4. Так как $B \neq 1$, то $P_2 \neq 1$ и P_2 нормальна в G. По условию группа G примитивна, поэтому $\Phi(G) = 1$ и $F(G)$ — единственная в G минимальная нормальная подгруппа [1, 4.40]. Значит $P_2 = F(G) = \mathrm{O}_p(G) = P_1 = C_G(P_1)$. Так как P_1P_2 — силовская p-подгруппа группы G, то $P_1 = P_2 = P$ [2, VI.4.6].

3) Так как $H = A \cap HK$ и A нормальна в G, то H нормальна в HK. Аналогично, $K = B \cap HK$ нормальна в HK. Поэтому HK нильпотентна.

4) Поскольку P — минимальная нормальная в G подгруппа и $G = [P](HK)$, то HK максимальна в G. Равенство $\mathrm{Core}_G(HK) = 1$ следует из того, что G примитивна.

5) A и B — сверхразрешимые подгруппы по лемме 4.

Лемма доказана.

Пусть $s\mathfrak{A}$ — формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда $s\mathfrak{A}$-корадикал $G^{s\mathfrak{A}}$ группы G является наименьшей нормальной в G подгруппой такой, что все силовские подгруппы в фактор-группе $G/G^{s\mathfrak{A}}$ абелевы. В терминологии [5] подгруппа $G^{s\mathfrak{A}}$ — обобщенный коммутант группы G. Как обычно, G' — коммутант группы G. Понятно, что $G^{s\mathfrak{A}} \subseteq G'$ в любой группе G. Для нильпотентной группы G выполняется равенство $G^{s\mathfrak{A}} = G'$.

Лемма 9. *Если G — разрешимая примитивная группа с нильпотентным примитиватором, то $G^{s\mathfrak{A}} = G'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = [N]M$ — разрешимая примитивная группа с нильпотентным примитиватором M. Так как N — единственная минимальная нормальная в G подгруппа, то $N \subseteq G^{s\mathfrak{A}} \subseteq G'$. Поскольку $G/N \simeq M$ нильпотентна, то $(G/N)^{s\mathfrak{A}} = (G/N)'$. По свойствам корадикалов

$$(G/N)^{s\mathfrak{A}} = G^{s\mathfrak{A}}/N, \quad (G/N)' = G'/N, \quad G^{s\mathfrak{A}} = G'.$$

Лемма доказана.

2. Признаки p-сверхразрешимости группы

Теорема 1. *Пусть A и B — нормальные p-сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если существует p-нильпотентная нормальная подгруппа W такая, что в G/W все силовские подгруппы абелевы, то G p-сверхразрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Ясно, что группа G является p-разрешимой, подгруппы A и B неединичны и их порядки делятся на p. Пусть N — неединичная нормальная в G подгруппа. Тогда

$$G/N = (AN/N) \cdot (BN/N), \quad AN/N \simeq A/A \cap N, \quad BN/N \simeq B/B \cap N,$$

$$WN/N \simeq W/W \cap N, \quad (G/N)/(WN/N) \simeq G/WN \simeq (G/W)/(WN/W),$$

подгруппы AN/N и BN/N нормальны в G/N и p-сверхразрешимы, подгруппа WN/N нормальна в G/N и p-нильпотентна, и в фактор-группе $(G/N)/(WN/N)$ все силовские подгруппы абелевы. Поэтому условия теоремы наследуются каждой фактор-группой, и группа G/N p-сверхразрешима по индукции. Из леммы 5 получаем, что группа G примитивна,

$$\mathrm{O}_{p'}(G) = Z(G) = \Phi(G) = 1, \quad F(G) = \mathrm{O}_p(G) = C_G(\mathrm{O}_p(G)) \simeq E_{p^n}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

и $\mathrm{O}_p(G)$ — единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Теперь можно применить лемму 8, сохраняя все ее обозначения. В частности, p'-холлова подгруппа HK в группе G по этой лемме нильпотентна и является максимальной в G подгруппой с единичным ядром. По лемме 9 $G^{s\mathfrak{A}} = G'$.

По условию существует p-нильпотентная подгруппа W такая, что все силовские подгруппы в G/W абелевы. Поскольку

$$\mathrm{O}_{p'}(W) \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G) = 1,$$

то W — p-группа и $W = P = F(G)$. Теперь нильпотентная p'-холлова подгруппа HK группы G будет абелевой максимальной подгруппой. По лемме 5 подгруппа HK циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|HK|}$. Из того, что H и K — подгруппы экспоненты, делящей $p-1$, следует, что порядок HK делит $p - 1$. Но теперь $n = 1$, противоречие с (1).

Теорема доказана.

Полагая в теореме $W = G'$, получаем

Следствие 1.1. *Пусть A и B — нормальные p-сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если коммутант G' p-нильпотентен, то G p-сверхразрешима.* □

Следствие 1.2. *Пусть A и B — нормальные p-сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Ввиду леммы 7 коммутант G' равен $A'B'$. Как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что $A' = A_p$, $B' = B_p$ и G' — p-группа. Теперь группа G p-сверхразрешима по следствию 1.1. □

Следствие 1.3. *Пусть A и B — нормальные p-сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если в $A \cap B$ силовская p-подгруппа циклическая, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Как и при доказательстве теоремы, получаем, что $F(G) = G_p \subseteq A \cap B$. Теперь подгруппа $F(G)$ циклическая и группа G p-сверхразрешима по лемме 1. □

Следствие 1.4. *Пусть A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если A холлова, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Из равенства $G = AB$ следует, что $|G : B| = |A : A \cap B|$. Поэтому $|G : B|$ делит $|A|$. Так как подгруппа A холлова, то $(|G : A|, |A|) = 1$. Теперь индексы $|G : A|$ и $|G : B|$ взаимно просты, и группа G будет p-сверхразрешимой по следствию 1.2 для каждого $p \in \pi(G)$. По лемме 6 группа G сверхразрешима. □

Из теоремы 1 вытекают также результаты работ [4–6]. Сформулируем эти утверждения.

Следствие 1.5. *Пусть A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима* [4; 11, теорема 1.1.13].

2) *Если $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то G сверхразрешима* [6; 11, теорема 4.3.4].

3) *Если группа G является расширением нильпотентной группы с помощью группы, у которой все силовские подгруппы абелевы, то G сверхразрешима* [5, следствие 3].

Доказательство. Так как подгруппы A и B сверхразрешимы, то они p-сверхразрешимы для каждого $p \in \pi(G)$.

1) Если коммутант G' нильпотентен, то он будет p-нильпотентен для каждого $p \in \pi(G)$ и группа G будет p-сверхразрешима по следствию 1.1. Теперь по лемме 6 группа G сверхразрешима.

2) Пусть $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Тогда G будет p-сверхразрешимой по следствию 1.2 для каждого $p \in \pi(G)$. По лемме 6 группа G сверхразрешима.

3) Пусть W — нормальная в G подгруппа и все силовские в фактор-группе G/W абелевы. По теореме 1 группа G будет p-сверхразрешимой для каждого $p \in \pi(G)$. По лемме 6 группа G сверхразрешима. □

3. Два признака сверхразрешимости группы

В 1980 г. в работе Сринивасан [12] установлена сверхразрешимость группы при условии, что любая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы нормальна в группе. Статья [12] нашла отклик во многих работах (см., например, [13–17]). Группы, в которых любая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы нормальна во всей группе, Уолл [18] предложил называть MNP-группами. Необходимые свойства этих групп перечислены в следующей лемме.

Лемма 10 [12; 18]. *Пусть G —* MNP*-группа. Тогда*:

1) *каждая силовская подгруппа из G нормальна в G или циклическая*;

2) *G сверхразрешима*;

3) *если U — холлова подгруппа в G, то U —* MNP*-группа*; *если K — нормальная подгруппа в G, то G/K —* MNP*-группа*;

4) *группа $G = [V]\langle x\rangle$, где*

4.1) *V — нормальная в G нильпотентная холлова подгруппа*;

4.2) *образующие элементы силовских подгрупп из $\langle x\rangle$ индуцируют степенные автоморфизмы на V, порядки которых делят простые числа.*

Теорема 2. *Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Если A — MNP-группа, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G несверхразрешима. По лемме 6 существует $p \in \pi(G)$ такое, что G не p-сверхразрешима. Ввиду леммы 10 подгруппа A сверхразрешима, а значит, и p-сверхразрешима. Так как условия теоремы наследуют все фактор-группы группы G, то $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, группа G примитивна по лемме 5 и применима лемма 8. Сохраним все обозначения этих лемм.

Так как $A = [P]H$ и $P = C_G(P)$, то по утверждению 4.2) леммы 10 подгруппа H циклическая порядка, свободного от квадратов. Подгруппа H нормальна в нильпотентной подгруппе HK, где $B = [P]K$ и K абелева. Поэтому H содержится в центре подгруппы HK и HK абелева. Из того, что H и K — подгруппы экспоненты, делящей $p-1$, следует, что порядок HK делит $p-1$. Теперь подгруппа HK циклическая, и P имеет простой порядок по утверждению 5) леммы 5. Значит, группа G p-сверхразрешима по лемме 1, противоречие.

Теорема доказана.

Каждая нильпотентная группа является MNP-группой. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть A и B — нормальные в G подгруппы и $G = AB$. Если A нильпотентна, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.*

Следствие 2.2. *Пусть $G = A_1A_2 \dots A_n$, где A_i нормальна в G для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Если A_j — MNP-группа для каждого $j = 2, 3 \dots, n$ и подгруппа A_1 сверхразрешима, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. По теореме 2 подгруппа A_1A_2 сверхразрешима, затем $A_1A_2A_3 = (A_1A_2)A_3$ сверхразрешима, и т. д. Через конечное число шагов получаем, что группа G сверхразрешима. $\square$

Группа, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна, называется t-группой. Строение разрешимых t-групп изучил Гашюц [19], в частности, разрешимые t-группы сверхразрешимы

Теорема 3. *Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Если A — разрешимая* t*-группа, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G несверхразрешима. По лемме 6 существует $p \in \pi(G)$ такое, что G не p-сверхразрешима. Ввиду [19] подгруппа A сверхразрешима, а значит, и p-сверхразрешима. Так как условия теоремы наследуют все фактор-группы группы G, то $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, группа G примитивна по лемме 5 и применима лемма 8. Сохраним все обозначения этих лемм.

Так как $B = [P]K$ сверхразрешима и $\mathrm{O}_{p'}(B) \subseteq \mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то в P существует подгруппа P_1 простого порядка p, нормальная в B. Подгруппа P_1 субнормальна в $A = [P]H$, а A является t-группой. Значит, P_1 нормальна в A, поэтому P_1 нормальна в G. Так как P — минимальная нормальная в G подгруппа, то $P_1 = P$ и G p-сверхразрешима по утверждению 2) леммы 1, противоречие.

Теорема доказана.

Аналогично следствию 2.1 доказывается

Следствие 3.1. *Пусть $G = A_1A_2 \dots A_n$, где A_i нормальна в G для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Если A_j — разрешимая* t*-группа для каждого $j = 2, 3 \dots, n$ и подгруппа A_1 сверхразрешима, то группа G сверхразрешима.*

Следствие 3.2. *Пусть A и B — нормальные подгруппы группы и $G = AB$. Если все силовские подгруппы в A циклические, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.*

Доказательство. По [20, лемма 1.4] подгруппа A является t-группой и G сверхразрешима по теореме 3.

З а м е ч а н и е 1. Обозначим через $\mathrm{MNP}(G)$ произведение всех MNP-подгрупп, нормальных в G. По следствию 2.2 подгруппа $\mathrm{MNP}(G)$ сверхразрешима. Поскольку каждая нильпотентная группа является MNP-группой, то $\mathrm{MNP}(G)$ содержит подгруппу Фиттинга $F(G)$ группы G. Если G разрешима, то $C_G(\mathrm{MNP}(G)) \le Z(F(G)) \le \mathrm{MNP}(G)$.

З а м е ч а н и е 2. Обозначим через $\mathrm{T}(G)$ произведение всех t-подгрупп, нормальных в G. По следствию 3.1 подгруппа $\mathrm{T}(G)$ сверхразрешима. Если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \le \mathrm{T}(G)$. Поэтому $C_G(\mathrm{T}(G)) \le Z(F(G)) \le \mathrm{T}(G)$ в разрешимой группе G с $\Phi(G) = 1$.

Эти два замечания позволяют в любой разрешимой группе наряду с подгруппой Фиттинга использовать нормальные сверхразрешимые подгруппы $\mathrm{MNP}(G)$ и $\mathrm{T}(G)$.

4. Факторизация минимальной не p-сверхразрешимой группы

Несверхразрешимая группа, все собственные подгруппы которой сверхразрешимы, называется минимальной несверхразрешимой группой.

В 2012 г. Го Вэньбинь и А. С. Кондратьев [21] показали, что минимальная несверхразрешимая группа G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп в точности тогда, когда $G/F(G)$ — примарная минимальная неабелева группа. Это результат они распространили [22, теорема B] на минимальную не p-сверхразрешимую группу $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B.

Мы изучим подобную факторизацию с p-сверхразрешимыми подгруппами A и B.

Минимальные несверхразрешимые группы описаны в [23–26]. Если G — группа, то $G^{\mathfrak{U}}$ — сверхразрешимый корадикал, т. е. наименьшая нормальная в G подгруппа со сверхразрешимой фактор-группой $G/G^{\mathfrak{U}}$.

Лемма 11. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа, $\Phi(G) = 1$ и $P = G^{\mathfrak{U}}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *группа G разрешима и $|\pi(G)| \le 3$* [23, теорема 22];

2) *подгруппа P является силовской p-подгруппой для некоторого $p \in \pi(G)$ и минимальной нормальной в G подгруппой порядка $> p$* [24, теорема 1 (a)];

3) *p'-холлова подгруппа T группы G примарная циклическая или минимальная неабелева группа* [24, теорема 2 (b)];

4) *если $|\pi(T)| = 2$, то T — нециклическая группа с циклическими силовскими подгруппами* [25].

Из этой леммы вытекает

Лемма 12. *Группа G является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой с нециклическими силовскими подгруппами тогда и только тогда, когда G — минимальная несверхразрешимая группа G, у которой фактор-группа $G/F(G)$ — примарная минимальная неабелева группа.*

Приведем другое доказательство результата [21].

Теорема 4. *Если G — минимальная несверхразрешимая группа и G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, то G — бипримарная группа с нециклическими силовскими подгруппами.*

Обратно, если G — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами, то G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = [P]T$ — минимальная несверхразрешимая группа и G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Подгруппа P

нециклическая по лемме 11. По [2, VI.4.7] можно считать, что $P = (P \cap A)(P \cap B)$. Предположим, что $\Phi(G) = 1$. Тогда P — минимальная нормальная в G подгруппа по лемме 11. Поэтому $P \subseteq A \cap B$. Теперь $A = [P](A \cap T)$, $B = [P](B \cap T)$ и можно считать, что $T = (A \cap T)(B \cap T)$. Так как A и B нормальны в G, то $A \cap T$ нормальна в T, $B \cap T$ нормальна в T.

Если $|\pi(T)| = 2$, то $T = [R]Q$, где R и Q — циклические силовские r- и q-подгруппы по лемме 11. Так как примарная циклическая группа не факторизуется собственными подгруппами, то можно считать, что $(A \cap T) = R$, $(B \cap T) = Q$. Но теперь $Q = B \cap T$ нормальна в T, что невозможно, поскольку T нециклическая.

Пусть $|\pi(T)| = 1$. Тогда T нециклическая.

Если $\Phi(G) \neq 1$, то для фактор-группы $G/\Phi(G)$ утверждение справедливо. Поэтому $G/\Phi(G)$ — бипримарная группа с нециклическими силовскими подгруппами. Следовательно, G — бипримарная группа с нециклическими силовскими подгруппами.

Обратно, пусть $G = [P]T$ — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами. Тогда в T существуют две различные максимальные подгруппы T_1 и T_2. Ясно, что $G = ([P]T_1)([P]T_2)$, где $[P]T_1$ и $[P]T_2$ — нормальные в G сверхразрешимые подгруппы.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Если G — минимальная не p-сверхразрешимая группа и G является произведением двух нормальных p-сверхразрешимых подгрупп, то $G/\mathrm{O}_{p'}(G)$ — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами.*

Обратно, если G — группа и $G/\mathrm{O}_{p'}(G)$ — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами, то G является произведением двух нормальных p-сверхразрешимых подгрупп.

Доказательство. Пусть G — минимальная не p-сверхразрешимая группа, $G = AB$, где A и B — нормальные p-сверхразрешимые подгруппы. Применим индукцию по порядку группы. Так как $G/\mathrm{O}_{p'}(G)$ не p-сверхразрешима, то можно считать, что $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Поскольку A и B — нормальные в G подгруппы, то $\mathrm{O}_{p'}(A) = \mathrm{O}_{p'}(B) = 1$. Из леммы 4 получаем, что подгруппы A и B сверхразрешимы, группа G p-замкнута, а p'-холловы подгруппы в A и в B абелевы. Так как $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, то $F(G) = P$, где P — силовская p-подгруппа группы G. Поскольку фактор-группа G/P нильпотентна, то группа G q-сверхразрешима для всех $q \in \pi(G) \backslash \{p\}$. По лемме 6 каждая собственная в G подгруппа сверхразрешима. Теперь из теоремы 4 следует, что G — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами.

Обратно, пусть $\overline{G} = G/\mathrm{O}_{p'}(G)$ — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами. Из теоремы 4 следует, что $\overline{G} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, где $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — нормальные в $\overline{G}$ сверхразрешимые подгруппы. Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $\overline{A} = A/\mathrm{O}_{p'}(G)$ и $\overline{B} = B/\mathrm{O}_{p'}(G)$. Тогда A и B — p-сверхразрешимые нормальные в G подгруппы и $G = AB$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
2. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin etc.: Springer. 1967. 793 S.
3. **Huppert B.** Monomialle darstellung endlicher gruppen // Nagoya Math. J. 1953. Vol. 3. P. 93–94.
4. **Baer R.** Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 115–187.
5. **Васильев А.Ф., Васильева Т.И.** О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. № 11(426). С. 10–14.
6. **Friesen D.** Products of normal supersolvable subgroups. Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 30, № 1. P. 46–48.

7. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin etc.: Springer, 1982. 531 p.
8. **Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.** Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010. 334 p. (De Gruyter Expositions in Mathematics; vol. 53.)
9. **Монахов В.С., Шпырко О.А.** О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп // Вестн. МГУ им. М. В. Ломоносова. Математика. Механика. 2009. Том 6. С. 3–8.
10. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М. : Наука, 1978. 272 с.
11. Between nilpotent and solvable / H. G. Bray [et al.]. Passaic: Polygonal Publ. House, 1982. 231 p.
12. **Srinivasan S.** Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups // Israel J. Math. 1980. Vol. 35. P. 210–214.
13. **Asaad M., Ramadan M., Shaalan A.** Influence of π-quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of fitting subgroup of a finite group // Arch. Math. 1991. Vol. 56. P. 521–527.
14. **Asaad M., Heliel A.A.** On S-quasinormal embedded subgroups of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2001. Vol. 165. P. 129–135.
15. **Ballester-Bolinches A.** Permutably embedded subgroups of finite soluble groups // Arch. Math. 1995. Vol. 65. P. 1–7.
16. **Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M.C.** Sufficient conditions for supersolvability of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 1998. Vol. 127. P. 113–118.
17. **Monakhov V.S., Trofimuk A.A.** Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups // J. Group Theory. 2014. Vol. 17, № 5. P. 889–895.
18. **Wall G.L.** Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal // Israel J. Math. 1982. Vol. 43. P. 166–168.
19. **Gaschutz W.** Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist // J. Reine Angew. Math. 1957. Vol. 198. P. 87–92.
20. **Лемешев И.В., Монахов В.С.** Признаки разрешимости конечных групп с ограничениями на кофакторы максимальных подгрупп // Проблемы физики, математики и техники. 2012. № 2 (11). С. 88–94.
21. **Guo W., Kondrat'ev A. S.** New examples of finite non-supersolvable groups factored by two normal supersolvable subgroups // Internat. Conf. "Mal'tsev meeting": collect. abstr. / Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University. Novosibirsk, 2012. P. 95.
22. **Guo W., Kondratiev A.S.** Finite minimal non-supersolvable groups decomposable into the product of two normal supersolvable subgroups // Commun. Math. Stat. 2015. Vol. 3. P. 285–290.
23. **Huppert B.** Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
24. **Doerk K.** Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Bd. 91. S. 198–205.
25. **Нагребецкий В.Т.** О конечных минимальных несверхразрешимых группах // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 104–108.
26. **Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.** On minimal non-supersoluble groups // Rev. Math. Iberoamericana. 2007. Vol. 23, № 1. P. 127–142.

Монахов Виктор Степанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Поступила 29.12.2014

Чирик Ирина Константиновна
преподаватель
Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь
e-mail: chyrykira@mail.ru