ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.17

О РАСШИРЕНИЯХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 4[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением $\leq t$ для данного натурального числа t. Ранее эта задача была решена для $t = 3$. В предыдущей работе первого автора начата программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением r, где $3 < r \leq 4$. В указанной работе получена редукция к локально исключительным графам. В данной работе найдены параметры исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 4. Кроме того, доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — исключительные непсевдогеометрические сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4, имеет степень, не большую 729.

Ключевые слова: спектр графа, сильно регулярный граф, дистанционно регулярный граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. On extensions of strongly regular graphs with eigenvalue 4.

J. Koolen posed the problem of studying distance regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue $\leq t$ for a given positive integer t. This problem was solved earlier for $t = 3$. A program of studying distance regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue r, $3 < r \leq 4$, was started by the first author in his preceding paper. In this paper, a reduction to local exceptional graphs is performed.

In the present work we find parameters of exceptional strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 4. In addition, we prove that a distance regular graph in which neighborhoods of vertices are exceptional nonpseudogeometric strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 4 has degree at most 729.

Keywords: graph spectrum, strongly regular graph, distance regular graph.

1. Введение и предварительные результаты

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, каждое его ребро лежит в λ треугольниках и $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2.

Связный граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным графом* с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}$, если для любого целого i $(0 \leq i \leq d)$ и для любых вершин $u, w \in \Gamma$, находящихся на расстоянии i друг от друга, выполняются равенства $|\Gamma_{i+1}(u) \cap [w]| = b_i$ и $|\Gamma_{i-1}(u) \cap [w]| = c_i$. Очевидно, что дистанционно регулярный граф вполне регулярен с параметрами $k = b_0, \lambda = k - b_1 - 1, \mu = c_2$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется α-*частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит точно $s+1$ точку, каждая

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 14-11-00061).

точка лежит точно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a,l)\in P\times\mathcal{L}$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$ или pG_α). В случае $\alpha=1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s,t)$. *Точечный граф* геометрии определяется на множестве точек P; две точки смежны, если они лежат на одной прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$ и неглавными собственными значениями $s-\alpha$, $-(t+1)$. Сильно регулярный граф, параметры которого можно представить в таком виде для некоторых натуральных чисел α,s,t, называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением $\le t$ для данного натурального числа t. Ранее эта задача была решена для $t=3$ (см. [1–3]). В работе [4] начата программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением r, где $3<r\le 4$. Там была получена редукция к локально исключительным графам.

Предложение 1 [4, теорема]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением t, $3<t\le 4$, u — вершина графа Γ . Тогда $[u]$ — исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением 4 или верно одно из следующих утверждений*:

(1) $[u]$ — *объединение изолированных 5-клик*;

(2) $[u]$ — *псевдогеометрический граф для $pG_{s-4}(s,s-4)$ и либо*

(*i*) Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(112,36,10,12)$, $(135,64,28,32)$, *или* $(357,256,180,192)$ *и* $s=5,7$ *или* 15 *соответственно, либо*

(*ii*) $s=5$ *и* Γ — *граф Джонсона* $J(12,6)$ *или его стандартное частное*;

(3) $[u]$ — *дополнение псевдогеометрического графа для* $pG_5(s,4)$, Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(156,30,4,6)$, $(190,99,48,55)$, $(210,99,48,45)$, $(1248,1044,868,900)$ *и* $s=5,10,10,35$ *соответственно или* $s=10$ *и* Γ — *граф Тэйлора*;

(4) $[u]$ — *граф в половинном случае с параметрами* $(4l+1,2l,l-1,l)$, $l\in\{13,15,16,18,20\}$ *и* Γ — *граф Тэйлора.*

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин являются исключительными непсевдогеометрическими сильно регулярными графами с неглавным собственным значением 4. Если u — вершина графа Γ, то верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(27,16,10,8)$, $(63,32,16,16)$, $(135,64,28,32)$, $(189,88,37,44)$, $(243,112,46,56)$, $(279,128,52,64)$ *или* $(351,160,64,80)$ *и* Γ *является графом Тэйлора*;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(85,14,3,2)$ *и либо* Γ *имеет массив пересечений* $\{85,70,1;1,14,85\}$, *либо* $\mu\in\{5,7,10\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(169,56,15,20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{169,112,1;1,56,169\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(204,28,2,4)$ *и* $\mu\in\{5,6,7,10,12,14,15,17,20,21,25,28,30,35,42,50\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(232,33,2,5)$ *и* $\mu\in\{9,11,12,16,18,22,24,29,33,36,44,48,58,66\}$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(243,22,1,2)$ *и* $\mu\in\{4,5,6,9,10,11,12,15,18,20,22,27,30,33,36,44,45,54,55,60\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(289,72,11,20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{289,216,1;1,72,289\}$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(325,54,3,10)$ *и* $\mu\in\{45,50,54,65,75,78,90\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(352,26,0,2)$ *и* $\mu\in\{4,5,8,10,11,13,16,20,22,25,26,32,40,44,50,52,55,65,80\}$;

(6) $[u]$ *имеет параметры* $(352,36,0,4)$ *и* $\mu\in\{8,10,11,12,14,15,16,18,20,21,22,24,28,30,32,33,35,36,40,42,44,45,48,55,56,60,63,66,70,72,77,80,84,88,90\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(378,52,1,8)$ *и* $\mu\in\{35,39,42,45,50,54,63,65,70,75,78,90,91,105\}$;

(7) $[u]$ *имеет параметры* $(441, 88, 7, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(505, 84, 3, 16)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(625, 104, 3, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$;

(8) $[u]$ *имеет параметры* $(676, 108, 2, 20)$ *и* $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(729, 112, 1, 20)$ *и* $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$.

Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* $\theta_1 = 4$, θ_2, Δ *— регулярный подграф из* Γ *степени* μ *на* w *вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu - 4)v/(k - 4) \le w \le (\mu - \theta_2)v/(k - \theta_2)$;

(2) *если* X_i *— множество вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ, $x_i = |X_i|$, *то* $x_0 \cdot w \le (v - x_0)(v - w)(4 - \theta_2)^2/(2k - 4 - \theta_2)^2$;

(3) *если* $x_0 = w$, *то* $w \le v(4 - \theta_2)/(2k - 2\theta_2)$.

Доказательство. Из [5] имеем $\theta_2 \le \mu - (k - \mu)w/(v - w) \le 4$, поэтому $(\mu - 4)(v - w) \le (k - \mu)w \le (\mu - \theta_2)(v - w)$. Отсюда $(\mu - 4)v/(k - 4) \le w \le (\mu - \theta_2)v/(k - \theta_2)$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Тогда по [6, предложение 4.6.1] $x_0 \cdot w \le (v - x_0)(v - w)(4 - \theta_2)^2/(2k - 4 - \theta_2)^2$.

Если $x_0 = w$, то $w(2k - 4 - \theta_2) \le (v - w)(4 - \theta_2)$ и $w \le v(4 - \theta_2)/(2k - 2\theta_2)$.

Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* (v', k', λ', μ') *и неглавными собственными значениями* $\theta_1 = 4, \theta_2$, u, w *— вершины из* Γ *с* $d(u, w) = 2$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \le \mu \le (\mu' - \theta_2)v'/(k' - \theta_2)$;

(2) *если* X_i *— множество вершин из* $[w] - [u]$, *смежных точно с* i *вершинами из* $[u] \cap [w]$, $x_i = |X_i|$, *то* $x_0 \cdot \mu \le (v' - x_0)(v' - \mu)(4 - \theta_2)^2/(2k' - 4 - \theta_2)^2$;

(3) *если* $x_0 = \mu$, *то* $\mu \le v'(4 - \theta_2)/(2k' - 2\theta_2)$.

Доказательство. Все утверждения следуют из леммы 1.1, примененной к подграфу $\Delta = [u] \cap [w]$ из $[w]$.

Лемма доказана.

Лемма 1.3 [7, теорема 20]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* $d \ge 3$ *и степени* $k > 2$. *Если* $k_2 \le 3k/2$ *(равносильно* $c_2 \ge 2b_1/3$*), то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $d = 3$ *и* Γ *— двудольный граф или граф Тэйлора*;

(2) Γ *— граф Джонсона* $J(7, 3)$ *или 4-куб.*

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* $d \ge 3$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* (v', k', λ', μ') *и неглавными собственными значениями* $4, -m$. *Если* $\theta_0 = k > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ *— собственные значения графа* Γ, *то* $\theta_1 \le b_1/(m - 1) - 1$ *и* $\theta_d \ge -b_1/5 - 1$.

Доказательство. По теореме Тервиллигера [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $-m \ge b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $4 \le b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Поэтому $\theta_1 \le b_1/(m - 1) - 1$ и $\theta_d \ge -b_1/5 - 1$.

Лемма доказана.

2. Исключительные графы с собственным значением 4

В этом разделе найдены параметры исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 4 (теорема 2 — для псевдогеометрических графов и теорема 3 — для оставшихся графов).

Сильно регулярный граф Γ с неглавным собственным значением $m-1$ назовем *исключительным*, если он не принадлежит следующему списку:

(1) объединение изолированных m-клик;

(2) псевдогеометрический граф для $pG_t(t+m-1,t)$;

(3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_m(s,m-1)$;

(4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu+1,2\mu,\mu-1,\mu),\sqrt{4\mu+1}=m-1$.

Отметим, что в числе найденных параметров исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 4 имеется 515 наборов параметров, из них 164 отвечают псевдогеометрическим графам.

Теорема 2. *Пусть Γ — исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-4}(s,t)$. Тогда параметры (s,t) лежат в одном из следующих списков*:

(1) $(5,3)$, $(5,5)$, $(5,7)$, $(5,10)$, $(5,15)$, $(5,19)$, $(5,20)$, $(5,25)$, $(6,1)$, $(6,5)$, $(6,7)$, $(6,9)$, $(6,10)$, $(6,15)$, $(6,16)$, $(6,23)$, $(6,25)$, $(6,30)$, $(6,37)$, $(7,9)$, $(7,15)$, $(7,27)$, $(7,30)$, $(7,51)$, $(7,75)$;

(2) $(8,3)$, $(8,7)$, $(8,10)$, $(8,13)$, $(8,15)$, $(8,19)$, $(8,25)$, $(8,31)$, $(8,35)$, $(8,40)$, $(8,55)$, $(8,67)$, $(8,85)$, $(8,115)$, $(9,4)$, $(9,7)$, $(9,10)$, $(9,13)$, $(9,15)$, $(9,19)$, $(9,25)$, $(9,31)$, $(9,35)$, $(9,40)$, $(9,55)$, $(9,67)$, $(9,85)$, $(9,115)$, $(9,175)$;

(3) $(10,15)$, $(10,39)$, $(10,45)$, $(10,105)$, $(11,28)$, $(11,35)$, $(11,105)$, $(12,34)$, $(12,60)$, $(12,190)$, $(13,99)$, $(13,135)$, $(14,9)$, $(14,15)$, $(14,16)$, $(14,23)$, $(14,25)$, $(14,30)$, $(14,37)$, $(14,55)$, $(14,65)$, $(14,79)$, $(14,100)$, $(14,135)$, $(14,205)$, $(15,55)$, $(15,187)$, $(16,63)$, $(16,75)$, $(16,165)$;

(4) $(18,175)$, $(19,33)$, $(19,75)$, $(19,90)$, $(19,147)$, $(20,100)$, $(21,51)$, $(22,225)$, $(23,133)$, $(24,19)$, $(24,35)$, $(24,45)$, $(24,55)$, $(24,70)$, $(24,95)$, $(24,115)$, $(24,145)$, $(24,195)$, $(24,295)$, $(26,55)$, $(27,115)$, $(27,184)$, $(28,198)$, $(31,243)$, $(32,91)$, $(32,105)$, $(32,259)$;

(5) $(33,435)$, $(34,63)$, $(34,114)$, $(34,135)$, $(34,165)$, $(35,310)$, $(36,328)$, $(38,255)$, $(39,91)$, $(39,203)$, $(39,385)$, $(40,405)$, $(43,468)$, $(44,94)$, $(44,160)$, $(44,490)$, $(47,559)$, $(48,275)$, $(48,583)$, $(49,135)$, $(49,387)$, $(51,235)$, $(51,658)$, $(52,684)$, $(54,175)$, $(54,325)$;

(6) $(59,231)$, $(64,99)$, $(64,255)$, $(64,315)$, $(64,411)$, $(69,156)$, $(69,455)$, $(74,217)$, $(74,735)$, $(84,352)$, $(90,645)$, $(99,171)$, $(104,275)$, $(104,450)$, $(104,775)$, $(114,869)$, $(114,1375)$, $(119,667)$, $(120,435)$, $(134,598)$, $(139,1107)$, $(144,343)$, $(144,1155)$, $(174,1445)$, $(184,846)$, $(189,1591)$, $(194,1159)$.

Теорема 3. *Пусть Γ — исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением 4. Если Γ не является псевдогеометрическим графом, то его параметры лежат в одном из следующих списков*:

(1) $(27,16,10,8)$, $(49,32,21,20)$, $(57,42,31,30)$, $(64,36,20,20)$, $(85,14,3,2)$, $(85,64,48,48)$, $(96,76,60,60)$, $(100,44,18,20)$, $(105,64,38,40)$, $(115,96,80,80)$, $(120,34,8,10)$, $(120,84,58,60)$, $(121,48,17,20)$, $(133,32,6,8)$, $(133,88,57,60)$, $(136,60,24,28)$, $(144,52,16,20)$, $(162,112,76,80)$, $(169,56,15,20)$, $(175,144,118,120)$, $(183,52,11,16)$, $(190,84,33,40)$, $(190,144,108,112)$, $(204,28,2,4)$, $(209,156,115,120)$;

(2) $(216,172,136,140)$, $(217,128,72,80)$, $(225,64,13,20)$, $(232,33,2,5)$, $(235,192,156,160)$, $(243,22,1,2)$, $(243,220,199,200)$, $(244,108,42,52)$, $(256,68,12,20)$, $(280,124,48,60)$, $(285,64,8,16)$, $(286,95,24,35)$, $(289,72,11,20)$, $(297,256,220,224)$, $(300,104,28,40)$, $(300,184,108,120)$, $(320,132,46,60)$, $(324,68,7,16)$, $(324,76,10,20)$, $(325,54,3,10)$, $(325,264,213,220)$, $(342,308,277,280)$, $(343,228,147,160)$, $(352,26,0,2)$, $(352,36,0,4)$, $(352,156,60,76)$, $(352,312,276,280)$;

(3) $(361,80,9,20)$, $(364,88,12,24)$, $(364,242,156,170)$, $(375,154,53,70)$, $(375,204,103,120)$, $(378,52,1,8)$, $(391,140,39,56)$, $(391,208,102,120)$, $(392,46,0,6)$, $(392,340,294,300)$, $(400,84,8,20)$, $(441,88,7,20)$, $(441,256,140,160)$, $(456,130,24,42)$, $(456,280,164,184)$, $(460,204,78,100)$, $(475,384,308,320)$, $(484,92,6,20)$, $(495,304,178,200)$, $(497,186,55,78)$, $(497,256,120,144)$, $(505,84,3,16)$, $(507,368,262,280)$, $(511,442,381,390)$, $(512,292,156,180)$, $(529,96,5,20)$, $(540,154,28,50)$, $(540,484,433,440)$, $(540,490,444,450)$, $(552,76,0,12)$;

(4) $(568,252,96,124)$, $(595,144,18,40)$, $(595,396,255,280)$, $(625,104,3,20)$, $(630,544,468,480)$, $(630,592,556,560)$, $(637,576,520,528)$, $(640,284,108,140)$, $(649,576,510,520)$, $(657,256,80,112)$, $(657,328,147,180)$, $(664,170,24,50)$, $(665,384,208,240)$, $(667,96,0,16)$, $(676,108,2,20)$, $(676,225,54,85)$, $(704,228,52,84)$, $(715,224,48,80)$, $(729,112,1,20)$, $(729,208,37,68)$, $(729,448,262,296)$, $(730,324,123,160)$, $(731,480,304,336)$, $(760,264,68,104)$, $(760,414,208,246)$;

(5) $(768,708,652,660)$, $(784,116,0,20)$, $(784,522,336,370)$, $(800,204,28,60)$, $(800,564,388,420)$, $(837,760,689,700)$, $(847,576,380,416)$, $(847,752,666,680)$, $(875,304,78,120)$, $(924,312,76,120)$, $(925,374,123,170)$, $(925,448,192,240)$, $(925,704,528,560)$, $(931,480,224,272)$, $(976,858,752,770)$, $(1000,444,168,220)$, $(1008,532,256,308)$, $(1026,400,124,176)$, $(1027,342,81,130)$, $(1027,576,300,352)$, $(1045,384,108,160)$, $(1080,364,88,140)$, $(1080,664,388,440)$, $(1105,1024,948,960)$, $(1140,469,158,217)$, $(1140,544,228,288)$, $(1156,480,164,224)$, $(1156,616,300,360)$, $(1156,1092,1031,1040)$, $(1176,550,224,286)$;

(6) $(1189,1152,1116,1120)$, $(1197,460,139,200)$, $(1210,884,633,680)$, $(1216,540,204,268)$, $(1225,704,378,440)$, $(1275,784,458,520)$, $(1276,816,500,560)$, $(1288,858,552,610)$, $(1296,740,394,460)$, $(1331,532,171,240)$, $(1365,704,328,400)$, $(1365,992,706,760)$, $(1431,1276,1135,1160)$, $(1445,684,283,360)$, $(1450,1104,828,880)$, $(1463,612,211,288)$, $(1463,688,282,360)$, $(1513,1428,1347,1360)$, $(1519,1012,651,720)$, $(1521,1408,1302,1320)$, $(1540,684,258,340)$, $(1540,1368,1212,1240)$, $(1540,1404,1278,1300)$, $(1548,952,556,632)$, $(1587,832,396,480)$, $(1596,1276,1010,1060)$, $(1616,1140,784,852)$, $(1680,1012,576,660)$;

(7) $(1681,1152,766,840)$, $(1701,1600,1504,1520)$, $(1716,840,364,456)$, $(1750,704,228,320)$, $(1805,1144,693,780)$, $(1863,1568,1312,1360)$, $(1937,1792,1656,1680)$, $(1944,1876,1810,1820)$, $(1958,1236,745,840)$, $(2002,851,300,407)$, $(2002,928,372,480)$, $(2009,1152,616,720)$, $(2015,1824,1648,1680)$, $(2025,1104,553,660)$, $(2025,1408,952,1040)$, $(2058,935,364,475)$, $(2058,1936,1820,1840)$, $(2080,924,348,460)$, $(2080,1694,1368,1430)$, $(2080,1764,1488,1540)$, $(2080,1980,1884,1900)$, $(2133,1066,475,590)$, $(2185,1638,1207,1290)$, $(2201,2112,2026,2040)$, $(2205,1824,1498,1560)$, $(2226,1600,1124,1216)$, $(2295,1984,1708,1760)$, $(2380,1404,778,900)$, $(2450,1264,588,720)$;

(8) $(2466,1972,1561,1640)$, $(2500,1904,1428,1520)$, $(2523,1222,521,658)$, $(2584,2132,1746,1820)$, $(2640,1624,948,1080)$, $(2738,1632,916,1056)$, $(2745,2688,2632,2640)$, $(2809,1488,717,868)$, $(2835,2704,2578,2600)$, $(2883,2112,1516,1632)$, $(2905,1664,888,1040)$, $(2916,1540,739,896)$, $(2924,1738,972,1122)$, $(2976,2856,2740,2760)$, $(3025,1764,963,1120)$, $(3025,2304,1728,1840)$, $(3025,2688,2382,2440)$, $(3081,1408,552,720)$, $(3136,2090,1344,1490)$, $(3174,2672,2236,2320)$, $(3240,1804,928,1100)$, $(3249,2436,1795,1920)$, $(3256,2380,1704,1836)$, $(3267,2116,1315,1472)$, $(3336,2668,2112,2220)$, $(3380,2604,1978,2100)$, $(3403,1890,969,1150)$, $(3565,2304,1428,1600)$, $(3589,3496,3405,3420)$, $(3718,3540,3369,3400)$, $(3741,2240,1264,1456)$;

(9) $(3875,2980,2259,2400)$, $(4000,2604,1628,1820)$, $(4005,2496,1480,1680)$, $(4048,3876,3710,3740)$, $(4200,2964,2038,2220)$, $(4200,3952,3716,3760)$, $(4332,4260,4189,4200)$, $(4545,3124,2083,2288)$, $(4557,4288,4032,4080)$, $(4720,4004,3378,3500)$, $(4860,3784,2908,3080)$, $(5041,3696,2655,2860)$, $(5076,4060,3214,3380)$, $(5104,4536,4020,4120)$, $(5125,3904,2928,3120)$, $(5292,4576,3940,4064)$, $(5336,3960,2884,3096)$, $(5365,5184,5008,5040)$, $(5551,4736,4020,4160)$, $(5577,4216,3135,3348)$, $(5590,4347,3336,3535)$, $(5671,4032,2796,3040)$, $(5832,5593,5362,5405)$, $(6069,5920,5774,5800)$, $(6137,4602,3391,3630)$;

(10) $(6232,5580,4984,5100)$, $(6241,5376,4610,4760)$, $(6292,5592,4956,5080)$, $(6392,5478,4672,4830)$, $(6480,5890,5344,5450)$, $(6670,6384,6108,6160)$, $(6727,6080,5484,5600)$, $(6732,5512,4476,4680)$, $(6816,5452,4316,4540)$, $(6903,5152,3776,4048)$, $(7290,6304,5428,5600)$, $(7315,5724,$

4423, 4680), (7372, 7182, 6996, 7030), (7750, 6804, 5953, 6120), (7777, 7680, 7584, 7600), (7840, 6164, 4788, 5060), (7889, 6528, 5362, 5592), (7965, 7744, 7528, 7568), (8668, 7490, 6444, 6650), (8905, 8064, 7288, 7440), (8955, 7744, 6668, 6880), (9045, 7106, 5515, 5830), (9559, 8496, 7530, 7720), (9856, 9636, 9420, 9460), (10660, 10336, 10020, 10080), (10759, 10560, 10364, 10400), (10935, 9940, 9019, 9200), (11340, 9384, 7708, 8040);

(11) (11584, 9828, 8292, 8596), (11661, 10560, 9544, 9744), (11845, 10304, 8928, 9200), (11881, 10032, 8421, 8740), (12615, 11024, 9598, 9880), (12825, 12544, 12268, 12320), (12986, 11872, 10836, 11040), (13225, 11136, 9320, 9680), (13300, 11594, 10068, 10370), (13366, 11088, 9132, 9520), (13377, 11176, 9275, 9652), (13482, 12688, 11932, 12080), (14399, 13248, 12172, 12384), (14553, 13696, 12880, 13040), (15052, 13148, 11442, 11780), (15842, 13888, 12132, 12480), (16281, 14080, 12124, 12512), (16731, 14980, 13379, 13696), (17227, 15840, 14544, 14800), (17408, 16900, 16404, 16500), (17545, 16592, 15681, 15860), (18620, 17028, 15547, 15840), (21120, 19012, 17076, 17460), (21204, 18928, 16852, 17264), (21568, 19908, 18352, 18660);

(12) (22100, 19404, 16978, 17460), (23409, 20608, 18082, 18584), (23409, 21280, 19309, 19700), (24565, 22784, 21108, 21440), (24753, 21760, 19064, 19600), (25480, 22572, 19936, 20460), (25480, 23244, 21168, 21580), (27000, 25004, 23128, 23500), (27405, 25792, 24256, 24560), (27840, 26404, 25028, 25300), (29403, 27328, 25372, 25760), (29575, 26784, 24208, 24720), (30430, 28224, 26148, 26560), (31487, 28938, 26557, 27030), (32046, 30160, 28364, 28720), (35344, 32340, 29544, 30100), (37024, 35260, 33564, 33900), (39432, 36680, 34084, 34600), (41250, 38779, 36428, 36895), (43616, 40612, 37776, 38340), (48514, 45216, 42100, 42720), (49011, 45760, 42684, 43296), (51120, 48484, 45958, 46460), (53075, 49504, 46128, 46800), (60401, 57600, 54904, 55440), (60502, 57620, 54849, 55400);

(13) (64533, 60736, 57120, 57840), (73125, 71104, 69128, 69520), (73440, 69874, 66448, 67130), (76000, 71064, 66388, 67320), (77315, 72384, 67708, 68640), (80601, 75392, 70456, 71440), (81125, 76704, 72478, 73320), (82369, 79872, 77436, 77920), (87451, 83952, 80566, 81240), (99705, 94864, 90213, 91140), (111476, 107016, 102700, 103560), (113400, 110044, 106768, 107420), (116699, 112480, 108384, 109200), (133570, 129204, 124953, 125800), (154575, 150304, 146128, 146960), (169128, 162652, 156376, 157628), (212832, 205492, 198356, 199780), (225885, 218304, 210928, 212400), (235586, 228960, 222484, 223776), (314116, 304440, 295004, 296888), (317628, 309880, 302284, 303800), (328560, 320276, 312160, 313780), (404587, 394212, 384051, 386080), (485815, 473774, 461973, 464330).

Отметим также, что в ходе вычислений возникали параметры (57, 42, 31, 30), (1189, 1152, 1116, 1120), (3159, 1408, 532, 704). Однако графы с такими параметрами не существуют.

Следствие 1. *Пусть* Γ — *вполне регулярный граф диаметра, большего* 2, *в котором окрестности вершин сильно регулярны. Тогда их параметры не принадлежат пп.* (7)–(13) *заключения теоремы* 3.

Множество параметров сильно регулярного графа со спектром $k^1, (n-5)^f, -5^{v-f-1}$ назовем *исключительным*, если $\mu \notin \{20, 25\}$ и выполнены следующие ограничения из [9]:

(1) условие Крейна: $\mu(n-20) \le 4(n-5)(n+20)$;

(2) абсолютная граница: $v \le f(f+3)/2$ ($v \le f(f+1)/2$, если $\mu(n-20) \ne 4(n-5)(n+20)$);

(3) μ-граница: $\mu \le 5^3 \cdot 7$ (в случае равенства имеем $n = 20 \cdot 9$);

(4) граница для числа 3-лап: $n \le 10(\mu+1)+4$.

Доказательство теорем 2 и 3 осуществляется с помощью компьютерных вычислений. Задается максимальное значение $\mu = 875$. Ему отвечает $n = 180$. Проверяется допустимость полученных параметров.

Шаг алгоритма. Если $\mu = 0$, то останавливаем работу, в противном случае уменьшаем значение μ на 1. Находим максимальное $n = 10(\mu+1)+4$. Ищем допустимые параметры. Если $\mu + n - 10 > 0$, то уменьшаем n на 1, в противном случае переходим к следующему шагу. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1.

Пусть до конца раздела Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — исключительные графы с параметрами (v',k',λ',μ') и неглавными собственными значениями 4, θ_2. Тогда $\mu \le b_1 = v'-k'-1$.

Лемма 2.1. *Параметры* (v',k',λ',μ') *не принадлежат пп.* (8)–(13) *заключения теоремы* 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметры (v',k',λ',μ') принадлежат одному из пп. (8)–(13) заключения теоремы 3. С учетом неравенств $(\mu'-4)v'/(k'-4) \le \mu \le v'-k'-1$ граф Γ имеет параметры $(3081,1408,552,720)$. В этом случае $v'-k'-1=1672$ и $\mu \le 1672$. Далее, $716\cdot 3081/1404 \le \mu$, поэтому $1571 \le \mu \le 1672$ и μ делит $3081\cdot 1672$. Отсюда $\mu=1672$ и Γ — граф Тэйлора. Противоречие с тем, что в графе Тэйлора верно равенство $k'=2\mu'$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если параметры* (v',k',λ',μ') *принадлежат п.* (7) *заключения теоремы* 3, *то верно одно из утверждений*:

(1) *окрестности вершин имеют параметры* $(1750,704,228,320)$ *и* $\mu=875$;

(2) *окрестности вершин имеют параметры* $(2002,851,300,407)$ *и* $\mu\in\{1001,1012\}$;

(3) *окрестности вершин имеют параметры* $(2058,935,364,475)$ *и* $\mu\in\{1071,1078\}$;

(4) *окрестности вершин имеют параметры* $(2080,924,348,460)$ *и* $\mu\in\{1040,1050,1056,1092,1100,1120,1144\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметры (v',k',λ',μ') принадлежат п. (7) заключения теоремы 3. С учетом неравенств $(\mu'-4)v'/(k'-4) \le \mu \le v'-k'-1$ леммы 1.2 граф Γ имеет параметры $(1750,704,228,320)$, $(2002,851,300,407)$, $(2002,928,372,480)$, $(2058,935,364,475)$ или $(2080,924,348,460)$. Так как $k'\ne 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v'-k'-1$.

В случае параметров $(1750,704,228,320)$ имеем $\theta_2=-96$, $v'-k'-1=1045$ и $\mu\le 1045$. Далее, $316\cdot 1750/700 \le \mu \le 416\cdot 1750/800$, поэтому $790\le\mu\le 910$ и μ делит $1750\cdot 1045$. Отсюда $\mu=875$.

В случае параметров $(2002,851,300,407)$ имеем $\theta_2=-111$, $v'-k'-1=1150$ и $\mu\le 1150$. Далее, $403\cdot 2002/847 \le \mu \le 518\cdot 2002/962$, поэтому $953\le\mu\le 1078$ и μ делит $2002\cdot 1150$. Отсюда $\mu\in\{1001,1012\}$.

В случае параметров $(2002,928,372,480)$ имеем $v'-k'-1=1073$ и $\mu\le 1073$. Далее, $476\cdot 2002/924\le\mu$, поэтому $1032\le\mu<1073$ и μ не делит $2002\cdot 1073$.

В случае параметров $(2080,924,348,460)$ имеем $\theta_2=-116$, $v'-k'-1=1155$ и $\mu\le 1155$. Далее, $456\cdot 2080/920 \le \mu \le 576\cdot 2080/1040$, поэтому $1031\le\mu\le 1152$ и μ делит $2080\cdot 1155$. Отсюда $\mu\in\{1040,1050,1056,1092,1100,1120,1144\}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Графы из заключения леммы* 2.2 *не существуют.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае параметров $(1750,704,228,320)$ и $\mu=875$ имеем $b_1=1045$, $k_2=2090$ и $\theta_2=-96$, поэтому $875x_0 \le (1750-x_0)875\cdot 100^2/1500^2$ и $226x_0\le 1750$. Отсюда $x_0\le 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $2090\cdot 7$, но не меньше $875k_3$. Значит, $k_3\le 16$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 15 и указанное число ребер не меньше $1735k_3$. Поэтому $k_3\le 8$. Если w_1,w_2 — различные вершины из Γ_3, то $|\Gamma_2\cap[w_i]|\ge 1743$, поэтому $[w_1]\cap[w_2]$ содержит не менее $2\cdot 1743-2090=1396$ вершин из Γ_2, противоречие. В случае $k_3=1$ антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами (1921,1750,1579,1750), противоречие.

В случае параметров $(2002,851,300,407)$ и $\mu=1001$ имеем $b_1=1150$, $k_2=2300$ и $\theta_2=-111$, поэтому $1001x_0\le(2002-x_0)1001\cdot 115^2/1809^2$ и $(1809^2+115^2)x_0\le 2002\cdot 115^2$. Отсюда $x_0\le 8$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $2300\cdot 8$, но не меньше $1001k_3$. Значит, $k_3\le 18$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 17 и указанное число ребер не меньше $1735k_3$. Поэтому $k_3 \le 9$. Если w_1, w_2 — различные вершины из Γ_3, то $|\Gamma_2 \cap [w_i]| \ge 1994$, поэтому $[w_1] \cap [w_2]$ содержит не менее $2 \cdot 1994 - 2300 = 1688$ вершин из Γ_2, противоречие. В случае $k_3 = 1$ антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами (2152,2002,1852,2002), противоречие. Аналогичное противоречие получится в случаях $\mu \in \{1012, 1100\}$.

В случае параметров $(2058, 935, 364, 475)$ и $\mu = 1071$ имеем $b_1 = 1122$, $k_2 = 2156$ и $\theta_2 = -115$, поэтому $1071x_0 \le (2058 - x_0)987 \cdot 119^2/1981^2$ и $(3 \cdot 283^2 + 47 \cdot 17)x_0 \le 2058 \cdot 47 \cdot 17$. Отсюда $x_0 \le 6$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $2156 \cdot 6$, но не меньше $1071k_3$. Значит, $k_3 \le 12$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 11 и указанное число ребер не меньше $2047k_3$. Поэтому $k_3 \le 6$. Если $w \in \Gamma_3$, $y \in \Gamma_2 \cap \Gamma_2(w)$, то $[y]$ содержит по 1071 вершин из $[u]$ и из $[w]$, противоречие. Аналогичное противоречие получится в случае $\mu = 1078$.

В случае параметров $(2080, 924, 348, 460)$ и $\mu = 1040$ имеем $b_1 = 1155$, $k_2 = 2310$ и $\theta_2 = -116$, поэтому $1040x_0 \le (2080 - x_0)1040 \cdot 120^2/1960^2$ и $(49^2 + 3^2)x_0 \le 2080 \cdot 3^2$. Отсюда $x_0 \le 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $2310 \cdot 7$, но не меньше $1040k_3$. Значит, $k_3 \le 15$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 14 и указанное число ребер не меньше $2066k_3$. Поэтому $k_3 \le 7$. Если w_1, w_2 — различные вершины из Γ_3, то $|\Gamma_2 \cap [w_i]| \ge 2074$, поэтому $[w_1] \cap [w_2]$ содержит не менее $2 \cdot 2074 - 2310 = 1838$ вершин из Γ_2, противоречие. В случае $k_3 = 1$ антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами (2196,2080,1964,2080), противоречие. Аналогичное противоречие получится в случаях $\mu \in \{1050, 1056, 1092, 1100, 1120, 1144\}$.

Лемма 2.3 и следствие 1 доказаны.

3. Расширения исключительных графов, пп. (5), (6)

В этом разделе получена следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф диаметра, большего* 2, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из пп.* (5), (6) *заключения теоремы* 3, u *— вершина графа* Γ. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(784, 116, 0, 20)$ *и* $\mu \in \{112, 116, 161, 184, 196, 203, 232\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(800, 204, 28, 60)$ *и* $\mu \in \{224, 238, 250, 272, 280\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(875, 304, 78, 120)$ *и* $\mu \in \{350, 375, 399\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(924, 312, 76, 120)$ *и* $\mu \in \{364, 429\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1000, 444, 168, 220)$ *и* $\mu = 500$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(1026, 400, 124, 176)$ *и* $\mu \in \{450, 475, 513\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1027, 342, 81, 130)$ *и* $\mu \in \{468, 474\}$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(1045, 384, 108, 160)$ *и* $\mu \in \{475, 484\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1080, 364, 88, 140)$ *и* $\mu \in \{429, 440, 450, 468, 495\}$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(1140, 469, 158, 217)$ *и* $\mu \in \{536, 570, 600\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1156, 480, 164, 224)$ *и* $\mu \in \{540, 578, 612\}$;

(6) $[u]$ *имеет параметры* $(1197, 460, 139, 200)$ *и* $\mu \in \{532, 552\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1216, 540, 204, 268)$ *и* $\mu \in \{600, 608\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1331, 532, 171, 240)$ *и* $\mu = 627$;

(7) $[u]$ *имеет параметры* $(1463, 612, 211, 288)$ *и* $\mu = 770$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1540, 684, 258, 340)$ *и* $\mu \in \{770, 798, 825, 836\}$.

Следствие 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из условия теоремы* 4, u *— вершина графа* Γ. *Тогда* $[u]$ *имеет параметры* $(784, 116, 0, 20)$.

До конца раздела предполагается, что Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), удовлетворяющий условию теоремы 4, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями $\theta_1 = 4, \theta_2$. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и положим $\Gamma_i = \Gamma_i(u)$, $k_i = |\Gamma_i|$.

Лемма 3.1. *Пусть параметры* (v', k', λ', μ') *выбраны в п.* (6) *заключения теоремы* 3, u — *вершина графа* Γ. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(1197, 460, 139, 200)$ *и* $\mu \in \{532, 552\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(1331, 532, 171, 240)$ *и* $\mu = 627$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(1463, 612, 211, 288)$ *и* $\mu = 770$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(1216, 540, 204, 268)$ *и* $\mu \in \{600, 608\}$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(1540, 684, 258, 340)$ *и* $\mu \in \{770, 798, 825, 836\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (6) заключения теоремы 3. С учетом неравенств $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \le \mu \le (\mu' - \theta_2)v'/(k' - \theta_2)$ и $\mu \le v' - k' - 1$ граф Γ имеет параметры $(1197, 460, 139, 200)$, $(1331, 532, 171, 240)$, $(1463, 612, 211, 288)$, $(1463, 688, 282, 360)$, $(1540, 684, 258, 340)$. Так как в графе Тэйлора имеем $k' = 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

В случае параметров $(1197, 460, 139, 200)$ имеем $\theta_2 = -65$, $v' - k' - 1 = 736$ и $\mu \le 736$. Далее, $196 \cdot 1197/456 \le \mu \le 265 \cdot 1197/525$, поэтому $515 \le \mu \le 604$ и μ делит $kb_1 = 1197 \cdot 736$. Отсюда $\mu \in \{532, 552\}$.

В случае параметров $(1216, 540, 204, 268)$ имеем $\theta_2 = -68$, $v' - k' - 1 = 675$ и $\mu \le 675$. Далее, $264 \cdot 1216/536 \le \mu \le 336 \cdot 1216/608$, поэтому $599 \le \mu \le 672$ и μ делит $kb_1 = 1216 \cdot 675$. Отсюда $\mu \in \{600, 608\}$.

В случае параметров $(1331, 532, 171, 240)$ имеем $\theta_2 = -73$, $v' - k' - 1 = 798$ и $\mu \le 798$. Далее, $236 \cdot 1331/528 \le \mu \le 313 \cdot 1331/605$, поэтому $595 \le \mu \le 688$ и μ делит $kb_1 = 1331 \cdot 798$. Отсюда $\mu = 627$.

В случае параметров $(1445, 684, 283, 360)$ имеем $v' - k' - 1 = 760$ и $\mu < 760$. Далее, $356 \cdot 1445/680 \le \mu$, поэтому $757 \le \mu < 760$ и μ делит $kb_1 = 1445 \cdot 760$. Подходящих значений μ нет, противоречие.

В случае параметров $(1463, 612, 211, 288)$ имеем $\theta_2 = -81$, $v' - k' - 1 = 850$ и $\mu \le 850$. Далее, $284 \cdot 1463/608 \le \mu \le 369 \cdot 1463/693$, поэтому $684 \le \mu \le 779$ и μ делит $kb_1 = 1463 \cdot 850$. Отсюда $\mu = 770$.

В случае параметров $(1463, 688, 282, 360)$ имеем $v' - k' - 1 = 774$ и $\mu < 774$. Далее, $356 \cdot 1463/684 \le \mu$, поэтому $762 \le \mu < 774$ и μ делит $1463 \cdot 774$. Подходящих значений μ нет, противоречие.

В случае параметров $(1540, 684, 258, 340)$ имеем $\theta_2 = -86$, $v' - k' - 1 = 855$ и $\mu < 855$. Далее, $336 \cdot 1540/680 \le \mu \le 426 \cdot 1540/770$, поэтому $761 \le \mu \le 852$ и μ делит $1540 \cdot 855$. Отсюда $\mu \in \{770, 798, 825, 836\}$.

Лемма доказана.

Для любого графа Γ из заключения леммы 3.1 имеем $\mu > 2b_1/3$ и ввиду леммы 1.3 Γ не является дистанционно регулярным графом.

Лемма 3.2. *Пусть параметры* (v', k', λ', μ') *выбраны в п.* (5) *заключения теоремы* 3, u — *вершина графа* Γ. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(784, 116, 0, 20)$ *и* $\mu \in \{112, 116, 161, 184, 196, 203, 232\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(800, 204, 28, 60)$ *и* $\mu \in \{224, 238, 250, 272, 280\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(875, 304, 78, 120)$ *и* $\mu \in \{350, 375, 399\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(924, 312, 76, 120)$ *и* $\mu \in \{364, 429\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(1000, 444, 168, 220)$ *и* $\mu = 500$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(1026, 400, 124, 176)$ *и* $\mu \in \{450, 475, 513\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1027, 342, 81, 130)$ *и* $\mu \in \{468, 474\}$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(1045, 384, 108, 160)$ *и* $\mu \in \{475, 484\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1080, 364, 88, 140)$ *и* $\mu \in \{429, 440, 450, 468, 495\}$;

(6) $[u]$ *имеет параметры* $(1140, 469, 158, 217)$ *и* $\mu \in \{536, 570, 600\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(1156, 480, 164, 224)$ *и* $\mu \in \{540, 578, 612\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (5) заключения теоремы 3. С учетом неравенств $(\mu'-4)v'/(k'-4) \le \mu \le (\mu'-\theta_2)v'/(k'-\theta_2)$ и $\mu \le v'-k'-1$ граф Γ имеет параметры $(784,116,0,20)$, $(800,204,28,60)$, $(875,304,78,120)$, $(924,312,76,120)$, $(925,374,123,170)$, $(1000,444,168,220)$, $(1026,400,124,176)$, $(1027,342,81,130)$, $(1045,384,108,160)$, $(1080,364,88,140)$, $(1140,469,158,217)$, $(1156,480,164,224)$ и $(1176,550,224,286)$. Так как в графе Тэйлора имеем $k'=2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v'-k'-1$.

В случае параметров $(784,116,0,20)$ имеем $\theta_2=-24$, $v'-k'-1=667$ и $\mu<667$. Далее, $16\cdot 784/112 \le \mu \le 44\cdot 784/140$, поэтому $112\le\mu\le 246$ и μ делит $kb_1=784\cdot 667$. Отсюда $\mu\in\{112,116,161,184,196,203,232\}$.

В случае параметров $(800,204,28,60)$ имеем $\theta_2=-36$, $v'-k'-1=595$ и $\mu<595$. Далее, $56\cdot 800/200 \le \mu \le 96\cdot 800/240$, поэтому $224\le\mu\le 320$ и μ делит $kb_1=800\cdot 595$. Отсюда $\mu\in\{224,238,250,272,280\}$.

В случае параметров $(875,304,78,120)$ имеем $\theta_2=-46$, $v'-k'-1=570$ и $\mu<570$. Далее, $116\cdot 875/300 \le \mu \le 166\cdot 875/350$, поэтому $339\le\mu\le 415$ и μ делит $kb_1=875\cdot 570$. Отсюда $\mu\in\{350,375,399\}$.

В случае параметров $(924,312,76,120)$ имеем $\theta_2=-48$, $v'-k'-1=611$ и $\mu<611$. Далее, $116\cdot 924/308 \le \mu \le 168\cdot 924/360$, поэтому $348\le\mu\le 431$ и μ делит $kb_1=924\cdot 611$. Отсюда $\mu\in\{364,429\}$.

В случае параметров $(925,374,123,170)$ имеем $\theta_2=-51$, $v'-k'-1=550$ и $\mu<550$. Далее, $166\cdot 925/370 \le \mu \le 221\cdot 925/425$, поэтому $415\le\mu\le 481$ и μ делит $kb_1=925\cdot 550$. Подходящих значений μ нет.

В случае параметров $(1000,444,168,220)$ имеем $\theta_2=-56$, $v'-k'-1=555$ и $\mu<555$. Далее, $216\cdot 1000/440 \le \mu \le 276\cdot 1000/500$, поэтому $491\le\mu\le 552$ и μ делит $kb_1=1000\cdot 555$. Отсюда $\mu=500$.

В случае параметров $(1026,400,124,176)$ имеем $\theta_2=-56$, $v'-k'-1=625$ и $\mu<625$. Далее, $172\cdot 1026/396 \le \mu \le 232\cdot 1026/456$, поэтому $446\le\mu\le 522$ и μ делит $kb_1=1026\cdot 625$. Отсюда $\mu\in\{450,475,513\}$.

В случае параметров $(1027,342,81,130)$ имеем $\theta_2=-53$, $v'-k'-1=684$ и $\mu<684$. Далее, $126\cdot 1027/338 \le \mu \le 183\cdot 1027/395$, поэтому $383\le\mu\le 475$ и μ делит $kb_1=1027\cdot 684$. Отсюда $\mu\in\{468,474\}$.

В случае параметров $(1045,384,108,160)$ имеем $\theta_2=-56$, $v'-k'-1=660$ и $\mu<660$. Далее, $156\cdot 1045/380 \le \mu \le 216\cdot 1045/440$, поэтому $429\le\mu\le 513$ и μ делит $kb_1=1045\cdot 660$. Отсюда $\mu\in\{475,484\}$.

В случае параметров $(1080,364,88,140)$ имеем $\theta_2=-56$, $v'-k'-1=715$ и $\mu<715$. Далее, $136\cdot 1080/360 \le \mu \le 196\cdot 1080/420$, поэтому $408\le\mu\le 504$ и μ делит $kb_1=1080\cdot 715$. Отсюда $\mu\in\{429,440,450,468,495\}$.

В случае параметров $(1140,469,158,217)$ имеем $\theta_2=-63$, $v'-k'-1=670$ и $\mu<670$. Далее, $213\cdot 1140/465 \le \mu \le 280\cdot 1140/532$, поэтому $523\le\mu\le 600$ и μ делит $kb_1=1140\cdot 670$. Отсюда $\mu\in\{536,570,600\}$.

В случае параметров $(1156,480,164,224)$ имеем $\theta_2=-64$, $v'-k'-1=675$ и $\mu<675$. Далее, $220\cdot 1156/476 \le \mu \le 288\cdot 1156/544$, поэтому $535\le\mu\le 612$ и μ делит $kb_1=1156\cdot 675$. Отсюда $\mu\in\{540,578,612\}$.

В случае параметров $(1176,550,224,286)$ имеем $v'-k'-1=625$ и $\mu<625$. Далее, $282\cdot 1176/546\le\mu$, поэтому $608\le\mu<625$ и μ делит $kb_1=1176\cdot 625$. Подходящих значений μ нет, противоречие.

Лемма 3.2 и теорема 4 доказаны.

Если Γ — дистанционно регулярный граф из заключения леммы 3.2, то в силу неравенства $\mu<2b_1/3$ окрестности вершин в Γ имеют параметры $(784,116,0,20)$, $(800,204,28,60)$, $(875,304,78,120)$, $(924,312,76,120)$ или $(1080,364,88,140)$.

Лемма 3.3. *Если Γ — дистанционно регулярный граф из заключения теоремы 4, то окрестности вершин в Γ имеют параметры* $(784,116,0,20)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае параметров $(875, 304, 78, 120)$ и $\mu = 350$ имеем $b_1 = 570$, $k_2 = 1425$ и $\theta_2 = -46$, поэтому $350x_0 \le (875-x_0)525\cdot 50^2/650^2$ и $(2\cdot 13^2+3)x_0 \le 875\cdot 3$. Отсюда $x_0 \le 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $1425 \cdot 7$, но не меньше $350k_3$. Значит, $k_3 \le 28$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 27 и указанное число ребер не меньше $848k_3$. Поэтому $k_3 \le 10$. Если z_1, z_2 — различные вершины из Γ_3, то $|\Gamma_2 \cap [z_i]| \ge 866$, поэтому $[z_1] \cap [z_2]$ содержит не менее $2\cdot 866 - 1425 = 307$ вершин, но не более 350 вершин из Γ_2. В случае $k_3 > 2$ для третьей вершины z_3 из Γ_3 подграф $\Gamma_2 \cap [z_3]$ содержит не более 364 вершин из $[z_1]$, $[z_2]$ и не более 43 вершин вне $[z_1] \cup [z_2]$, противоречие. В случае $k_3 = 1$ для антиподальных вершин u, u^* подграф $\Gamma - (u^\perp \cup (u^*)^\perp)$ содержит 550 вершин, поэтому антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами ((1151,875,654,700), противоречие. Итак, $k_3 = 2$. Положим $\Gamma_3(u) = \{z_1, z_2\}$, $\Gamma_3(z_1) = \{u, w_1\}$ и $\Gamma_3(z_2) = \{u, w_2\}$.

Если вершины z_1, z_2 не смежны, то Γ_2 содержит 350 вершин из $[z_1] \cap [z_2]$, по 525 вершин из $[z_1] - [z_2]$, $[z_2] - [z_1]$ и 25 вершин вне $[z_1] \cup [z_2]$. Противоречие с тем, что $\Gamma_2 \cap [w_1]$ содержит не более 25 вершин вне $[z_1] \cup [z_2]$ и не более 350 вершин из $[z_2]$. Если вершины z_1, z_2 смежны, то Γ_2 содержит 304 вершины из $[z_1] \cap [z_2]$ и по 570 вершин из $[z_1] - [z_2]$, $[z_2] - [z_1]$, противоречие.

Случаи параметров $(924, 312, 76, 120)$ и $(1080, 364, 88, 140)$ рассматриваются аналогично.

В случае параметров $(800, 204, 28, 60)$ верно равенство $b_1 = 595$ и по лемме 3.2 имеем $\mu \in \{238, 250, 272, 280\}$, соответственно b_2 не больше 1, 2, 11, 11. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \le 16$ и $\theta_d \ge -120$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ, то $\mu = 280$ и b_2 делится на 8, противоречие с тем, что $\theta_1 > 22$.

Лемма 3.3 и следствие 2 доказаны.

4. О расширениях исключительных графов, пп. (3), (4)

В этом разделе получена следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф диаметра, большего* 2*, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из пп.* (3), (4) *заключения теоремы* 3*,* u *— вершина графа* Γ*. Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(361, 80, 9, 20)$ *и* $\mu = 95$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(364, 88, 12, 24)$ *и* $\mu \in \{100, 110, 130\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(378, 52, 1, 8)$ *и* $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(391, 140, 39, 56)$*, и* $\mu = 170$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(392, 46, 0, 6)$ *и* $\mu \in \{23, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 46, 49, 56, 60, 69, 70, 84, 92, 98, 105\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(400, 84, 8, 20)$ *и* $\mu \in \{84, 90, 100, 105, 112, 120, 125, 126, 140\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(441, 88, 7, 20)$ *и* $\mu \in \{88, 96, 98, 99, 112, 126, 132, 144, 147, 154\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(456, 130, 24, 42)$ *и* $\mu \in \{150, 152, 156\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(484, 92, 6, 20)$ *и* $\mu \in \{92, 121\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(505, 84, 3, 16)$ *и* $\mu \in \{84, 100, 101, 105, 140, 150\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(529, 96, 5, 20)$ *и* $\mu \in \{108, 138, 144\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(540, 154, 28, 50)$ *и* $\mu \in \{180, 189, 198, 210, 220, 225\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(552, 76, 0, 12)$ *и* $\mu \in \{69, 75, 76, 92, 95, 100, 114, 115, 120, 138, 150, 152\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(595, 144, 18, 40)$ *и* $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(595, 144, 18, 40)$ *и* $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(625, 104, 3, 20)$ *и* $\mu \in \{104, 125, 130, 200\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(664, 170, 24, 50)$ *и* $\mu = 232$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(667, 96, 0, 16)$ *и* $\mu \in \{95, 114, 115, 138, 145, 174, 190\}$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(676, 108, 2, 20)$ *и* $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(676, 225, 54, 85)$ *и* $\mu = 300$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(704, 228, 52, 84)$ *и* $\mu = 304$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(715, 224, 48, 80)$ *и* $\mu \in \{275, 286\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(729, 112, 1, 20)$ *и* $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(729, 208, 37, 68)$ *и* $\mu \in \{260, 270\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(760, 264, 68, 104)$ *и* $\mu \in \{330, 342\}$.

Следствие 3. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из пп.* (3),4) *заключения теоремы* 3, u — *вершина графа* Γ. *Тогда* $[u]$ *имеет параметры* $(378, 52, 1, 8)$, $(391, 140, 39, 56)$, $(400, 84, 8, 20)$, $(441, 88, 7, 20)$, $(505, 84, 3, 16)$, $(540, 154, 28, 50)$, $(595, 144, 18, 40)$, $(625, 104, 3, 20)$, $(676, 108, 2, 20)$ *или* $(729, 112, 1, 20)$.

Пусть до конца раздела Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы, параметры (v', k', λ', μ') которых лежат в списках из условия теоремы 5. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и положим $\Gamma_i = \Gamma_i(u)$, $k_i = |\Gamma_i|$.

Лемма 4.1. *Пусть параметры* (v', k', λ', μ') *выбраны в п.* (3) *заключения теоремы* 3, u — *вершина графа* Γ. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(361, 80, 9, 20)$ *и* $\mu = 95$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(364, 88, 12, 24)$ *и* $\mu \in \{100, 110, 130\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(378, 52, 1, 8)$ *и* $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(391, 140, 39, 56)$ *и* $\mu = 170$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(392, 46, 0, 6)$ *и* $\mu \in \{23, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 46, 49, 56, 60, 69, 70, 84, 92, 98, 105\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(400, 84, 8, 20)$ *и* $\mu \in \{84, 90, 100, 105, 112, 120, 125, 126, 140\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(441, 88, 7, 20)$ *и* $\mu \in \{88, 96, 98, 99, 112, 126, 132, 144, 147, 154\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(456, 130, 24, 42)$ *и* $\mu \in \{150, 152, 156\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(484, 92, 6, 20)$ *и* $\mu \in \{92, 121\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(505, 84, 3, 16)$ *и* $\mu \in \{84, 100, 101, 105, 140, 150\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(529, 96, 5, 20)$ *и* $\mu \in \{108, 138, 144\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(540, 154, 28, 50)$ *и* $\mu \in \{180, 189, 198, 210, 220, 225\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(552, 76, 0, 12)$ *и* $\mu \in \{69, 75, 76, 92, 95, 100, 114, 115, 120, 138, 150, 152\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (3) заключения теоремы 3. С учетом неравенств из леммы 1.2 и $\mu \le v' - k' - 1$ граф $[u]$ имеет параметры $(361, 80, 9, 20)$, $(364, 88, 12, 24)$, $(375, 154, 53, 70)$, $(378, 52, 1, 8)$, $(391, 140, 39, 56)$, $(392, 46, 0, 6)$, $(400, 84, 8, 20)$, $(441, 88, 7, 20)$, $(456, 130, 24, 42)$, $(460, 204, 78, 100)$, $(484, 92, 6, 20)$, $(497, 186, 55, 78)$, $(505, 84, 3, 16)$, $(512, 292, 156, 180)$, $(529, 96, 5, 20)$, $(540, 154, 28, 50)$ или $(552, 76, 0, 12)$. Так как в графе Тэйлора имеем $k' = 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

В случае параметров $(361, 80, 9, 20)$ имеем $\theta_2 = -15$, $v' - k' - 1 = 280$ и $\mu < 280$. Далее, $16 \cdot 361/76 < \mu < 35 \cdot 361/95$, поэтому $77 \le \mu \le 132$ и μ делит $kb_1 = 361 \cdot 280$. Отсюда $\mu = 95$ и $x_0 \le 10$.

В случае параметров $(364, 88, 12, 24)$ имеем $\theta_2 = -16$, $v' - k' - 1 = 275$ и $\mu < 275$. Далее, $20 \cdot 364/84 < \mu < 40 \cdot 364/104$, поэтому $87 \le \mu \le 139$ и μ делит $kb_1 = 364 \cdot 275$. Отсюда $\mu \in \{91, 100, 110, 130\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 6, 8, 4.

В случае параметров $(375, 154, 53, 70)$ имеем $\theta_2 = -21$, $v' - k' - 1 = 220$ и $\mu < 220$. Далее, $66 \cdot 375/150 < \mu < 91 \cdot 375/175$, поэтому $166 \le \mu \le 194$ и μ делит $kb_1 = 375 \cdot 220$. Подходящих значений μ нет, противоречие.

В случае параметров $(378, 52, 1, 8)$ имеем $\theta_2 = -11$, $v' - k' - 1 = 325$ и $\mu < 325$. Далее, $4 \cdot 378/48 < \mu < 19 \cdot 378/63$, поэтому $32 \le \mu \le 113$ и μ делит $kb_1 = 378 \cdot 325$. Отсюда $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$ и соответственно x_0 не больше 5, 16, 20, 24, 28, 30, 29, 29, 28, 25, 24, 17, 16, 6.

В случае параметров $(391, 140, 39, 56)$ имеем $\theta_2 = -21$, $v' - k' - 1 = 250$ и $\mu < 250$. Далее, $52 \cdot 391/136 < \mu < 77 \cdot 391/161$, поэтому $150 \le \mu \le 186$ и μ делит $kb_1 = 391 \cdot 250$. Отсюда $\mu = 170$ и $x_0 \le 2$.

В случае параметров $(392, 46, 0, 6)$ имеем $\theta_2 = -10$, $v' - k' - 1 = 345$ и $\mu < 345$. Далее, $2 \cdot 392/42 < \mu < 16 \cdot 392/56$, поэтому $19 \le \mu \le 111$ и μ делит $kb_1 = 392 \cdot 345$. Отсюда $\mu \in \{20, 21, 23, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 46, 49, 56, 60, 69, 70, 84, 92, 98, 105\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0, 8, 14, 28, 32, 38, 42, 42, 43, 42, 40, 38, 33, 32, 22, 16, 11, 6.

В случае параметров $(400, 84, 8, 20)$ имеем $\theta_2 = -16$, $v' - k' - 1 = 315$ и $\mu < 315$. Далее, $16 \cdot 400/80 < \mu < 36 \cdot 400/100$, поэтому $81 \le \mu \le 143$ и μ делит $kb_1 = 400 \cdot 315$. Отсюда

$\mu \in \{84, 90, 100, 105, 112, 120, 125, 126, 140\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 6, 11, 12, 12, 10, 8, 8, 2.

В случае параметров $(441, 88, 7, 20)$ имеем $\theta_2 = -17$, $v' - k' - 1 = 352$ и $\mu < 352$. Далее, $16 \cdot 441/84 < \mu < 37 \cdot 441/105$, поэтому $85 \leq \mu \leq 155$ и μ делит $kb_1 = 441 \cdot 352$. Отсюда $\mu \in \{88, 96, 98, 99, 112, 126, 132, 144, 147, 154\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 8, 10, 10, 14, 12, 10, 5, 4.

В случае параметров $(456, 130, 24, 42)$ имеем $\theta_2 = -22$, $v' - k' - 1 = 325$ и $\mu < 325$. Далее, $38 \cdot 456/126 < \mu < 64 \cdot 456/152$, поэтому $138 \leq \mu \leq 191$ и μ делит $kb_1 = 456 \cdot 325$. Отсюда $\mu \in \{150, 152, 156, 190\}$ и соответственно x_0 не больше 2, 3, 5, 0.

В случае параметров $(460, 204, 78, 100)$ имеем $\theta_2 = -26$, $v' - k' - 1 = 255$ и $\mu < 255$. Далее, $96 \cdot 460/200 < \mu < 126 \cdot 460/230$, поэтому $221 \leq \mu \leq 251$ и μ делит $kb_1 = 460 \cdot 255$. Отсюда $\mu = 230$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров $(484, 92, 6, 20)$ имеем $\theta_2 = -18$, $v' - k' - 1 = 391$ и $\mu < 391$. Далее, $16 \cdot 484/88 < \mu < 38 \cdot 484/110$, поэтому $89 \leq \mu \leq 167$ и μ делит $kb_1 = 484 \cdot 391$. Отсюда $\mu \in \{92, 121\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 16.

В случае параметров $(497, 186, 55, 78)$ имеем $\theta_2 = -27$, $v' - k' - 1 = 310$ и $\mu < 310$. Далее, $74 \cdot 497/182 < \mu < 105 \cdot 497/213$, поэтому $203 \leq \mu \leq 244$ и μ делит $kb_1 = 497 \cdot 310$. Отсюда $\mu = 217$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров $(505, 84, 3, 16)$ имеем $\theta_2 = -17$, $v' - k' - 1 = 420$ и $\mu < 420$. Далее, $12 \cdot 505/80 < \mu < 33 \cdot 505/101$, поэтому $76 \leq \mu \leq 164$ и μ делит $kb_1 = 505 \cdot 420$. Отсюда $\mu \in \{84, 100, 101, 105, 140, 150\}$ и соответственно x_0 не больше 8, 20, 20, 21, 13, 8.

В случае параметров $(529, 96, 5, 20)$ имеем $\theta_2 = -19$, $v' - k' - 1 = 432$ и $\mu < 432$. Далее, $16 \cdot 529/92 < \mu < 39 \cdot 529/115$, поэтому $93 \leq \mu \leq 179$ и μ делит $kb_1 = 529 \cdot 432$. Отсюда $\mu \in \{108, 138, 144\}$ и соответственно x_0 не больше 12, 17, 16.

В случае параметров $(540, 154, 28, 50)$ имеем $\theta_2 = -26$, $v' - k' - 1 = 385$ и $\mu < 385$. Далее, $46 \cdot 540/150 < \mu < 76 \cdot 540/180$, поэтому $166 \leq \mu \leq 227$ и μ делит $kb_1 = 540 \cdot 385$. Отсюда $\mu \in \{175, 180, 189, 198, 210, 220, 225\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 2, 5, 6, 5, 2, 1.

В случае параметров $(552, 76, 0, 12)$ имеем $\theta_2 = -16$, $v' - k' - 1 = 475$ и $\mu < 475$. Далее, $8 \cdot 552/72 < \mu < 28 \cdot 552/92$, поэтому $62 \leq \mu \leq 167$ и μ делит $kb_1 = 552 \cdot 475$. Отсюда $\mu \in \{69, 75, 76, 92, 95, 100, 114, 115, 120, 138, 150, 152\}$ и соответственно x_0 не больше 12, 20, 21, 30, 31, 32, 29, 29, 27, 19, 12, 10.

Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п.* (4) *заключения теоремы* 3*, u — вершина графа Γ. Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(595, 144, 18, 40)$ *и* $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(625, 104, 3, 20)$ *и* $\mu \in \{104, 125, 130, 200\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(664, 170, 24, 50)$ *и* $\mu = 232$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(667, 96, 0, 16)$ *и* $\mu \in \{95, 114, 115, 138, 145, 174, 190\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(676, 108, 2, 20)$ *и* $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(676, 225, 54, 85)$ *и* $\mu = 300$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(704, 228, 52, 84)$ *и* $\mu = 304$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(715, 224, 48, 80)$ *и* $\mu \in \{275, 286\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(729, 112, 1, 20)$ *и* $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(729, 208, 37, 68)$ *и* $\mu \in \{260, 270\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(760, 264, 68, 104)$ *и* $\mu \in \{330, 342\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (4) заключения теоремы 3. С учетом неравенств из леммы 1.2 и $\mu \leq v' - k' - 1$ граф $[u]$ имеет параметры $(568, 252, 96, 124)$, $(595, 144, 18, 40)$, $(625, 104, 3, 20)$, $(640, 284, 108, 140)$, $(657, 256, 80, 112)$, $(664, 170, 24, 50)$, $(667, 96, 0, 16)$, $(676, 108, 2, 20)$, $(676, 225, 54, 85)$, $(704, 228, 52, 84)$, $(715, 224, 48, 80)$, $(729, 112, 1, 20)$, $(729, 208, 37, 68)$, $(730, 324, 123, 160)$ или $(760, 264, 68, 104)$. Так как в графе Тэйлора имеем $k' = 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

В случае параметров $(568, 252, 96, 124)$ имеем $\theta_2 = -32$, $v' - k' - 1 = 315$ и $\mu < 315$. Далее, $120 \cdot 568/248 < \mu < 156 \cdot 568/284$, поэтому $275 \leq \mu \leq 311$ и μ делит $kb_1 = 568 \cdot 315$. Отсюда

$\mu \in \{280, 284\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0.

В случае параметров $(595, 144, 18, 40)$ имеем $\theta_2 = -26$, $v' - k' - 1 = 450$ и $\mu < 450$. Далее, $36 \cdot 595/140 < \mu < 66 \cdot 595/170$, поэтому $154 \leq \mu \leq 230$ и μ делит $kb_1 = 595 \cdot 450$. Отсюда $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$ и соответственно x_0 не больше 6, 8, 7, 2.

В случае параметров $(625, 104, 3, 20)$ имеем $\theta_2 = -21$, $v' - k' - 1 = 520$ и $\mu < 520$. Далее, $16 \cdot 625/100 < \mu < 41 \cdot 625/125$, поэтому $101 \leq \mu \leq 204$ и μ делит $kb_1 = 625 \cdot 520$. Отсюда $\mu \in \{104, 125, 130, 200\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 20, 22, 2.

В случае параметров $(640, 284, 108, 140)$ имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 355$ и $\mu < 355$. Далее, $136 \cdot 640/280 < \mu < 176 \cdot 640/320$, поэтому $311 \leq \mu \leq 351$ и μ делит $kb_1 = 640 \cdot 355$. Отсюда $\mu = 320$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров $(657, 256, 80, 112)$ имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 400$ и $\mu < 400$. Далее, $108 \cdot 657/252 < \mu < 148 \cdot 657/292$, поэтому $282 \leq \mu \leq 332$ и μ делит $kb_1 = 657 \cdot 400$. Отсюда $\mu \in \{292, 300\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0.

В случае параметров $(664, 170, 24, 50)$ имеем $\theta_2 = -30$, $v' - k' - 1 = 493$ и $\mu < 493$. Далее, $46 \cdot 664/166 < \mu < 80 \cdot 664/200$, поэтому $185 \leq \mu \leq 265$ и μ делит $kb_1 = 664 \cdot 493$. Отсюда $\mu = 232$ и x_0 не больше 9.

В случае параметров $(667, 96, 0, 16)$ имеем $\theta_2 = -20$, $v' - k' - 1 = 570$ и $\mu < 570$. Далее, $12 \cdot 667/92 < \mu < 36 \cdot 667/116$, поэтому $88 \leq \mu \leq 206$ и μ делит $667 \cdot 570$. Отсюда $\mu \in \{95, 114, 115, 138, 145, 174, 190\}$ и соответственно x_0 не больше 9, 27, 28, 31, 30, 19, 10.

В случае параметров $(676, 108, 2, 20)$ имеем $\theta_2 = -22$, $v' - k' - 1 = 567$ и $\mu < 567$. Далее, $16 \cdot 676/104 < \mu < 42 \cdot 676/130$, поэтому $105 \leq \mu \leq 218$ и μ делит $676 \cdot 567$. Отсюда $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 12, 19, 26, 25, 23, 19, 16.

В случае параметров $(676, 225, 54, 85)$ имеем $\theta_2 = -35$, $v' - k' - 1 = 450$ и $\mu < 450$. Далее, $81 \cdot 676/221 < \mu < 120 \cdot 676/260$, поэтому $248 \leq \mu \leq 311$ и μ делит $676 \cdot 450$. Отсюда $\mu \in \{260, 300\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 3.

В случае параметров $(704, 228, 52, 84)$ имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 475$ и $\mu < 475$. Далее, $80 \cdot 704/224 < \mu < 120 \cdot 704/264$, поэтому $252 \leq \mu \leq 319$ и μ делит $704 \cdot 475$. Отсюда $\mu \in \{275, 304\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 3.

В случае параметров $(715, 224, 48, 80)$ имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 490$ и $\mu < 490$. Далее, $76 \cdot 715/220 < \mu < 116 \cdot 715/260$, поэтому $248 \leq \mu \leq 318$ и μ делит $715 \cdot 490$. Отсюда $\mu \in \{275, 286\}$ и соответственно x_0 не больше 4, 6.

В случае параметров $(729, 112, 1, 20)$ имеем $\theta_2 = -23$, $v' - k' - 1 = 616$ и $\mu < 616$. Далее, $16 \cdot 729/108 < \mu < 43 \cdot 729/135$, поэтому $109 \leq \mu \leq 232$ и μ делит $729 \cdot 616$. Отсюда $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$ и соответственно x_0 не больше 18, 22, 29, 29, 28, 22,18, 9.

В случае параметров $(729, 208, 37, 68)$ имеем $\theta_2 = -35$, $v' - k' - 1 = 520$ и $\mu < 520$. Далее, $64 \cdot 729/204 < \mu < 103 \cdot 729/243$, поэтому $229 \leq \mu \leq 308$ и μ делит $729 \cdot 520$. Отсюда $\mu \in \{234, 243, 260, 270\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0, 7, 8.

В случае параметров $(730, 324, 123, 160)$ имеем $\theta_2 = -41$, $v' - k' - 1 = 405$ и $\mu < 405$. Далее, $156 \cdot 730/320 \leq \mu \leq 201 \cdot 730/365$, поэтому $356 \leq \mu \leq 401$ и μ делит $730 \cdot 405$. Отсюда $\mu = 365$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров $(760, 264, 68, 104)$ имеем $\theta_2 = -40$, $v' - k' - 1 = 495$ и $\mu < 495$. Далее, $100 \cdot 760/260 < \mu < 144 \cdot 760/304$, поэтому $293 \leq \mu \leq 359$ и μ делит $760 \cdot 495$. Отсюда $\mu \in \{300, 330, 342\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 4, 4.

Лемма 4.2 и теорема 5 доказаны.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 3. Если окрестности вершин в Γ имеют параметры $(392, 46, 0, 6)$, $(552, 76, 0, 12)$, $(667, 96, 0, 16)$ или $(784, 116, 0, 20)$, то ввиду [10] Γ не является дистанционно регулярным графом. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из условия теоремы 5. В случае параметров $(361, 80, 9, 20)$ имеем $\mu = 95$ и $b_2 \leq 10$, противоречие с тем, что b_2 делится на 19. В случае параметров $(364, 88, 12, 24)$ имеем $\mu \in \{100, 110, 130\}$, соответственно b_2 не больше

6, 8, 4. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \le 52/3$ и $\theta_d \ge -56$. Так как b_1b_2 делится на μ, то $\mu = 100$, $k_2 = 91 \cdot 11$ и $b_2 = 4$, противоречие с тем, что $\theta_1 > 19$.

В случае параметров $(391, 140, 39, 56)$ имеем $\mu = 170$ и $b_0 \le 2$, противоречие с тем, что b_2 делится на 17. В случае параметров $(456, 130, 24, 42)$ имеем $\mu \in \{150, 152, 156\}$ и соответственно b_2 не больше 2, 3, 5. Противоречие с тем, что $b_1 = 325$ и b_1b_2 делится на μ. В случае параметров $(484, 92, 6, 20)$ имеем $\mu \in \{92, 121\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 16. Противоречие с тем, что $b_1 = 391$ и b_1b_2 делится на μ. В случае параметров $(529, 96, 5, 20)$ имеем $\mu \in \{108, 138, 144\}$ и соответственно b_2 не больше 12, 17, 16. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \le 23$ и $\theta_d \ge -86,4$. Так как b_1b_2 делится на μ, то $\mu \in \{108, 144\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. В случае параметров $(540, 154, 28, 50)$ имеем $\mu \in \{180, 189, 198, 210, 220, 225\}$ и соответственно b_2 не больше 2, 5, 6, 5, 2, 1. Противоречие с тем, что $b_1 = 385$ и b_1b_2 не делится на μ.

В случае параметров $(664, 170, 24, 50)$ имеем $b_1 = 493$, $\mu = 232$ и b_2 не больше 9. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \le 16$ и $\theta_d \ge -99,6$. Далее, $b_2 = 8$, противоречие с тем, что $\theta_1 > 22$.

В случае параметров $(676, 225, 54, 85)$ имеем $\mu = 300$ и $b_2 \le 3$. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \le 208/17 = 12 + 4/17$ и $\theta_d \ge -91$. Далее, $b_1 = 450$, b_1b_2 делится на μ, поэтому $b_2 = 2$, $k_2 = 338 \cdot 3 = 13^2 \cdot 6$ и $c_3 = 676$. Противоречие с тем, что некоторое собственное значение графа имеет нецелую кратность.

В случае параметров $(704, 228, 52, 84)$ имеем $\mu = 304$ и b_2 не больше 3. Далее, $b_1 = 475$, b_1b_2 делится на μ, поэтому b_2 делится на 16, противоречие.

В случае параметров $(715, 224, 48, 80)$ имеем $\mu \in \{275, 286\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 6. Далее, $b_1 = 490$, b_1b_2 делится на μ, поэтому b_2 делится на 55, 143 соответственно, противоречие.

В случае параметров $(729, 208, 37, 68)$ имеем $\mu \in \{260, 270\}$ и соответственно b_2 не больше 7, 8. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \le 520/34 = 14 + 12/17$ и $\theta_d \ge -105$. Далее, $b_1 = 520$, b_1b_2 делится на μ, поэтому $\mu = 260$, $b_2 \le 7$, $k_2 = 729 \cdot 2$ и $c_3 \ge 260 - 7 + 210 = 463$. Отсюда $c_3 \in \{486, 729\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(760, 264, 68, 104)$ имеем $\mu \in \{330, 342\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 4. Далее, $b_1 = 495$, b_1b_2 делится на μ, поэтому $\mu = 330$, $b_2 = 2,4$ $k_2 = 380 \cdot 3$ и $c_3 \ge 330 - 4 + 266 = 592$. Отсюда $c_3 = 760$ и допустимых массивов пересечений нет.

Следствие 3 доказано.

5. Расширения исключительных графов, пп. (1), (2)

В этом разделе получена следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф диаметра, большего* 2, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из пп.* (1), (2) *заключения теоремы* 3, u *— вершина графа* Γ. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(27, 16, 10, 8)$, $(63, 32, 16, 16)$, $(135, 64, 28, 32)$, $(189, 88, 37, 44)$, $(243, 112, 46, 56)$, $(279, 128, 52, 64)$ *или* $(351, 160, 64, 80)$ *и* Γ *является графом Тэйлора*;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(28, 12, 6, 4)$ *и* $\mu \in \{5, 6, 7\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(85, 14, 3, 2)$ *и* $\mu \in \{5, 7, 10, 14, 17\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(112, 36, 10, 12)$ *и* $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(120, 34, 8, 10)$ *и* $\mu \in \{30, 34, 40\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(133, 32, 6, 8)$ *и* $\mu \in \{20, 25, 28, 35, 38\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(144, 52, 16, 20)$ *и* $\mu \in \{52, 56, 63\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(154, 48, 12, 16)$ *и* $\mu \in \{49, 55\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(169, 56, 15, 20)$ *и* $\mu = 56$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(176, 70, 24, 30)$ *и* $\mu \in \{77, 80\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(183, 52, 11, 16)$ *и* $\mu \in \{61, 65\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(190, 84, 33, 40)$ *и* $\mu = 95$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(196, 60, 14, 20)$ *и* $\mu \in \{60, 63, 70\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(204, 28, 2, 4)$ *и* $\mu \in \{6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 34, 35, 42, 50, 51\}$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(217, 66, 15, 22)$ *и* $\mu \in \{70, 75\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(225, 64, 13, 20)$ *и* $\mu \in \{72, 75, 80, 90\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(232, 33, 2, 5)$ *и* $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(243, 22, 1, 2)$ *и* $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$;

(6) $[u]$ *имеет параметры* $(256, 68, 12, 20)$ *и* $\mu \in \{68, 88\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры и* $\mu = 232$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(285, 64, 8, 16)$ *и* $\mu \in \{60, 66, 75, 76, 95, 100\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(286, 95, 24, 35)$ *и* $\mu = 110$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(289, 72, 11, 20)$ *и* $\mu \in \{72, 102, 108\}$;

(7) $[u]$ *имеет параметры* $(300, 104, 28, 40)$ *и* $\mu \in \{117, 125, 130\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры параметры* $(320, 132, 46, 60)$ *и* $\mu = 160$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(322, 96, 20, 32)$ *и* $\mu \in \{105, 115, 126\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(324, 68, 7, 16)$ *и* $\mu \in \{68, 81, 85, 90, 102, 108\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(324, 76, 10, 20)$ *и* $\mu \in \{76, 78, 81, 108, 114, 117\}$;

(8) $[u]$ *имеет параметры* $(325, 54, 3, 10)$ *и* $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(343, 102, 21, 34)$ *и* $\mu \in \{120, 140\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(352, 26, 0, 2)$ *и* $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(352, 36, 0, 4)$ *и* $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$.

Лемма 5.1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ)*,* Δ *— индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, \ldots, d_N$*. Тогда* $(v - N) - (kN - 2M) + (\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N} \binom{d_i}{2}) = x_0 + \sum_{i=3}^{N} \binom{i-1}{2} x_i$*, где* $x_i = x_i(\Delta)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$, и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta, b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства

$v - N = \sum x_i$, $kN - 2M = \sum i x_i$ и $\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N} \binom{d_i}{2}) = \sum \binom{i}{2} x_i$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое.

Лемма доказана.

Пусть до конца раздела Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы, параметры (v', k', λ', μ') которых лежат в списках из условия теоремы 6. Зафиксируем вершины $u, w \in \Gamma$ с $d(u, w) = 2$ и пусть X_i — множество вершин из $[w] - [u]$, смежных точно с i вершинами из $[u] \cap [w]$, $x_i = |X_i|$. Выберем вершину $z \in X_0$ и положим $y_i = |X_i \cap [z]|$. Кроме обычных уравнений для x_i, имеем $\sum y_i = k'$, $\sum i y_i = \mu' \mu$, $0 \le y_i \le x_i$, $0 \le y_0 \le x_0 - 1$. С помощью методов линейного программирования получены оценки сверху для x_0. Положим $\Gamma_i = \Gamma_i(u)$, $k_i = |\Gamma_i|$.

Лемма 5.2. *Пусть параметры* (v', k', λ', μ') *выбраны в п.* (1) *заключения теоремы* 3*. Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(27, 16, 10, 8)$*,* $(63, 32, 16, 16)$*,* $(135, 64, 28, 32)$ *или* $(189, 88, 37, 44)$ *и* Γ *является графом Тэйлора*;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(28, 12, 6, 4)$ *и* $\mu \in \{5, 6, 7\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(85, 14, 3, 2)$ *и* $\mu \in \{5, 7, 10, 14, 17\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(112, 36, 10, 12)$ *и* $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(120, 34, 8, 10)$ *и* $\mu \in \{30, 34, 40\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(133, 32, 6, 8)$ *и* $\mu \in \{20, 25, 28, 35, 38\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(144, 52, 16, 20)$ *и* $\mu \in \{52, 56, 63\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(154, 48, 12, 16)$ *и* $\mu \in \{49, 55\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(169, 56, 15, 20)$ *и* $\mu = 56$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(176, 70, 24, 30)$ *и* $\mu \in \{77, 80\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(183, 52, 11, 16)$ *и* $\mu \in \{61, 65\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(190, 84, 33, 40)$ *и* $\mu = 95$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(196, 60, 14, 20)$ *и* $\mu \in \{60, 63, 70\}$*, или* $[u]$ *имеет параметры* $(204, 28, 2, 4)$ *и* $\mu \in \{6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 34, 35, 42, 50, 51\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (1) заключения теоремы 3. В случае параметров $(27, 16, 10, 8)$, $(63, 32, 16, 16)$, $(135, 64, 28, 32)$ или $(189, 88, 37, 44)$

Γ является графом Тэйлора. В оставшихся случаях Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

С учетом неравенств из утверждения (1) леммы 1.2 и $\mu < v' - k' - 1$ граф $[u]$ имеет параметры $(27, 16, 10, 8)$, $(28, 12, 6, 4)$, $(63, 32, 16, 16)$, $(85, 14, 3, 2)$, $(96, 20, 4, 4)$, $(100, 44, 18, 20)$, $(112, 36, 10, 12)$, $(120, 34, 8, 10)$, $(133, 32, 6, 8)$, $(136, 60, 24, 28)$, $(144, 52, 16, 20)$, $(154, 48, 12, 16)$, $(156, 30, 4, 6)$, $(169, 56, 15, 20)$, $(176, 70, 24, 30)$, $(183, 52, 11, 16)$, $(190, 84, 33, 40)$, $(196, 60, 14, 20)$ или $(204, 28, 2, 4)$.

В случае параметров $(28, 12, 6, 4)$ имеем $\theta_2 = -2$, $b_1 = 15$. Ввиду леммы 1.2 имеем $0 \cdot 28/8 < \mu < 6 \cdot 28/14$. Поскольку μ делит $kb_1 = 28 \cdot 15$, то $\mu \in \{5, 6, 7, 10\}$ и соответственно x_0 не больше 6, 6, 4, 0.

В случае параметров $(85, 14, 3, 2)$ имеем $\theta_2 = -3$, $b_1 = 70$. Ввиду леммы 1.2 имеем $-2 \cdot 85/10 < \mu < 5 \cdot 85/17$. Поскольку μ делит $kb_1 = 85 \cdot 70$, то $\mu \in \{5, 7, 10, 14, 17\}$ и соответственно x_0 не больше 40, 36, 25, 17, 11.

В случае параметров $(100, 44, 18, 20)$ имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 55$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 100/40 < \mu < 26 \cdot 100/50$. Поскольку μ делит $kb_1 = 100 \cdot 55$, то $\mu \in \{44, 50\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 1. В последнем случае число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше 125, но не меньше $44k_3$. Поэтому $k_3 \leq 2$ и указанное число ребер не меньше $99k_3$. Отсюда $k_3 = 1$ и Γ разбивается антиподальными классами порядка 2. Противоречие с тем, что число вершин в Γ нечетно.

В случае параметров $(112, 36, 10, 12)$ имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 75$. Ввиду леммы 1.2 имеем $8 \cdot 112/32 < \mu < 18 \cdot 112/42$. Поскольку μ делит $kb_1 = 112 \cdot 75$, то $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 3, 3, 2.

В случае параметров $(120, 34, 8, 10)$ имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = v' - k' - 1 = 85$. Ввиду леммы 1.2 имеем $6 \cdot 120/30 < \mu < 16 \cdot 120/40$. Поскольку μ делит $kb_1 = 120 \cdot 85$, то $\mu \in \{25, 30, 34, 40\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 5, 5, 4.

В случае параметров $(133, 32, 6, 8)$ имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 100$. Ввиду леммы 1.2 имеем $4 \cdot 133/28 < \mu < 14 \cdot 133/38$. Поскольку μ делит $kb_1 = 133 \cdot 100$, то $\mu \in \{20, 25, 28, 35, 38\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 7, 9, 7, 6.

В случае параметров $(136, 60, 24, 28)$ имеем $\theta_2 = -8$, $b_1 = 75$. Ввиду леммы 1.2 имеем $24 \cdot 136/56 < \mu < 36 \cdot 136/68$. Поскольку μ делит $kb_1 = 136 \cdot 75$, то $\mu \in \{60, 68\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0.

В случае параметров $(144, 52, 16, 20)$ имеем $\theta_2 = -8$, $b_1 = 91$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 144/48 < \mu < 28 \cdot 144/60$. Поскольку μ делит $kb_1 = 144 \cdot 91$, то $\mu \in \{52, 56, 63\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 2, 1.

В случае параметров $(154, 48, 12, 16)$ имеем $\theta_2 = -8$, $b_1 = 105$. Ввиду леммы 1.2 имеем $12 \cdot 154/44 < \mu < 24 \cdot 154/56$. Поскольку μ делит $kb_1 = 154 \cdot 105$, то $\mu \in \{49, 55\}$ и соответственно x_0 не больше 3, 3.

В случае параметров $(169, 56, 15, 20)$ имеем $\theta_2 = -9$, $b_1 = 112$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 169/52 < \mu < 29 \cdot 169/65$. Поскольку μ делит $kb_1 = 169 \cdot 112$, то $\mu = 56$ и x_0 не больше 1.

В случае параметров $(176, 70, 24, 30)$ имеем $\theta_2 = -10$, $b_1 = 105$. Ввиду леммы 1.2 имеем $26 \cdot 176/66 < \mu < 40 \cdot 176/80$. Поскольку μ делит $kb_1 = 176 \cdot 105$, то $\mu \in \{70, 77, 80\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 1, 1.

В случае параметров $(183, 52, 11, 16)$ имеем $\theta_2 = -9$, $b_1 = 130$. Ввиду леммы 1.2 имеем $12 \cdot 183/48 < \mu < 25 \cdot 183/61$. Поскольку μ делит $kb_1 = 183 \cdot 130$, то $\mu \in \{61, 65\}$ и соответственно x_0 не больше 4, 4.

В случае параметров $(190, 84, 33, 40)$ имеем $\theta_2 = -11$, $b_1 = 105$. Ввиду леммы 1.2 имеем $36 \cdot 190/80 < \mu < 51 \cdot 190/95$. Поскольку μ делит $kb_1 = 190 \cdot 105$, то $\mu = 95$ и x_0 не больше 1.

В случае параметров $(196, 60, 14, 20)$ имеем $\theta_2 = -10$, $b_1 = 135$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 196/56 \leq \mu \leq 30 \cdot 196/70$. Поскольку μ делит $kb_1 = 196 \cdot 135$, то $\mu \in \{60, 63, 70\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 3, 4.

В случае параметров $(204, 28, 2, 4)$ имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 175$. Ввиду леммы 1.2 имеем

$0 \cdot 204/24 \leq \mu \leq 10 \cdot 204/34$. Поскольку μ делит $kb_1 = 204 \cdot 175$, то $\mu \in \{5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 34, 35, 42, 50, 51\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 54, 43, 34, 48, 30, 39, 39, 37, 36, 34, 30, 30, 24, 24, 18, 9, 8.

Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Пусть параметры* (v', k', λ', μ') *выбраны в п.* (2) *заключения теоремы* 3. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(243, 112, 46, 56)$, $(279, 128, 52, 64)$ *или* $(351, 160, 64, 80)$ *и* Γ *является графом Тэйлора*;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(217, 66, 15, 22)$ *и* $\mu \in \{70, 75\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(225, 64, 13, 20)$ *и* $\mu \in \{72, 75, 80, 90\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(232, 33, 2, 5)$ *и* $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(243, 22, 1, 2)$ *и* $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(256, 68, 12, 20)$ *и* $\mu \in \{68, 88\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры и* $\mu = 232$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(285, 64, 8, 16)$ *и* $\mu \in \{60, 66, 75, 76, 95, 100\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(286, 95, 24, 35)$ *и* $\mu = 110$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(289, 72, 11, 20)$ *и* $\mu \in \{72, 102, 108\}$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(300, 104, 28, 40)$ *и* $\mu \in \{117, 125, 130\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(320, 132, 46, 60)$ *и* $\mu = 160$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(322, 96, 20, 32)$ *и* $\mu \in \{105, 115, 126\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(324, 68, 7, 16)$ *и* $\mu \in \{68, 81, 85, 90, 102, 108\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(324, 76, 10, 20)$ *и* $\mu \in \{76, 78, 81, 108, 114, 117\}$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(325, 54, 3, 10)$ *и* $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(343, 102, 21, 34)$ *и* $\mu \in \{120, 140\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(352, 26, 0, 2)$ *и* $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(352, 36, 0, 4)$ *и* $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (2) заключения теоремы 3. В случае параметров $(243, 112, 46, 56)$, $(279, 128, 52, 64)$ или $(351, 160, 64, 80)$ Γ является графом Тэйлора. В оставшихся случаях Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

С учетом неравенств из утверждения (1) леммы 1.2 и $\mu < v' - k' - 1$ граф $[u]$ имеет параметры $(216, 40, 4, 8)$, $(217, 66, 15, 22)$, $(225, 64, 13, 20)$, $(232, 33, 2, 5)$, $(243, 22, 1, 2)$, $(244, 108, 42, 52)$, $(256, 68, 12, 20)$, $(279, 128, 52, 64)$, $(280, 124, 48, 60)$, $(285, 64, 8, 16)$, $(286, 95, 24, 35)$, $(289, 72, 11, 20)$, $(300, 104, 28, 40)$, $(306, 55, 4, 11)$, $(320, 132, 46, 60)$, $(322, 96, 20, 32)$, $(324, 68, 7, 16)$, $(324, 76, 10, 20)$, $(325, 54, 3, 10)$, $(343, 102, 21, 34)$, $(352, 26, 0, 2)$, $(352, 36, 0, 4)$, $(352, 156, 60, 76)$ или $(352, 180, 84, 100)$.

В случае параметров $(217, 66, 15, 22)$ имеем $\theta_2 = -11$, $b_1 = 150$. Ввиду леммы 1.2 имеем $18 \cdot 217/62 < \mu < 33 \cdot 217/77$. Поскольку μ делит $kb_1 = 217 \cdot 150$, то $\mu \in \{70, 75\}$ и соответственно x_0 не больше 2, 4.

В случае параметров $(225, 64, 13, 20)$ имеем $\theta_2 = -11$, $b_1 = 160$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 225/60 < \mu < 31 \cdot 225/75$. Поскольку μ делит $kb_1 = 225 \cdot 160$, то $\mu \in \{72, 75, 80, 90\}$ и соответственно x_0 не больше 4, 5, 4, 1.

В случае параметров $(232, 33, 2, 5)$ имеем $\theta_2 = -7$, $b_1 = 198$. Ввиду леммы 1.2 $1 \cdot 232/29 < \mu < 12 \cdot 232/40$ или $8^* \leq \mu \leq 69$. Поскольку μ делит $kb_1 = 232 \cdot 198$, то $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0, 4, 24, 28, 30, 32, 30, 28, 21, 18, 10, 2.

В случае параметров $(243, 22, 1, 2)$ имеем $\theta_2 = -5$, $b_1 = 220$. Ввиду леммы 1.2 имеем $-2 \cdot 243/18 < \mu < 7 \cdot 243/27$. Поскольку μ делит $kb_1 = 243 \cdot 220$, то $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$ и соответственно x_0 не больше 163, 148, 135, 108, 103, 100, 99, 88, 75, 69, 67, 54, 48, 45, 37, 25, 24, 11, 9, 3.

В случае параметров $(244, 108, 42, 52)$ имеем $\theta_2 = -14$, $b_1 = 135$. Ввиду леммы 1.2 имеем $48 \cdot 244/104 < \mu < 66 \cdot 244/122$. Поскольку μ делит $kb_1 = 244 \cdot 135$, то $\mu = 122$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров $(256, 68, 12, 20)$ имеем $\theta_2 = -12$, $b_1 = v'-k'-1 = 187$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 256/64 < \mu < 32 \cdot 256/80$. Поскольку μ делит $kb_1 = 256 \cdot 187$, то $\mu \in \{68, 88\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 5.

В случае параметров $(279, 128, 52, 64)$ имеем $\theta_2 = -16$, $b_1 = 150$. Ввиду леммы 1.2 имеем $60 \cdot 279/124 < \mu < 80 \cdot 279/144$, противоречие.

В случае параметров $(280, 124, 48, 60)$ имеем $\theta_2 = -16$, $b_1 = 155$. Ввиду леммы 1.2 имеем $56 \cdot 280/120 < \mu < 76 \cdot 280/140$. Поскольку μ делит $kb_1 = 280 \cdot 155$, то $\mu = 140$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров $(285, 64, 8, 16)$ имеем $\theta_2 = -12$, $b_1 = 220$. Ввиду леммы 1.2 имеем $12 \cdot 285/60 < \mu < 28 \cdot 285/76$. Поскольку μ делит $kb_1 = 285 \cdot 220$, то $\mu \in \{60, 66, 75, 76, 95, 100\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 6, 9, 9, 5, 2.

В случае параметров $(286, 95, 24, 35)$ имеем $\theta_2 = -15$, $b_1 = 190$. Ввиду леммы 1.2 имеем $31 \cdot 286/91 < \mu < 50 \cdot 286/110$. Поскольку μ делит $kb_1 = 286 \cdot 190$, то $\mu = 110$ и $x_0 \leq 2$.

В случае параметров $(289, 72, 11, 20)$ имеем $\theta_2 = -13$, $b_1 = 216$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 289/68 < \mu < 33 \cdot 289/85$. Поскольку μ делит $kb_1 = 289 \cdot 216$, то $\mu \in \{72, 102, 108\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 4, 1.

В случае параметров $(300, 104, 28, 40)$ имеем $\theta_2 = -16$, $b_1 = 195$. Ввиду леммы 1.2 имеем $36 \cdot 300/100 < \mu < 56 \cdot 300/120$. Поскольку μ делит $kb_1 = 300 \cdot 195$, то $\mu \in \{117, 125, 130\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 3, 2.

В случае параметров $(320, 132, 46, 60)$ имеем $\theta_2 = -18$, $b_1 = 187$. Ввиду леммы 1.2 имеем $56 \cdot 320/128 < \mu < 78 \cdot 320/150$. Поскольку μ делит $kb_1 = 320 \cdot 187$, то $\mu = 160$ и $x_0 \leq 1$.

В случае параметров $(322, 96, 20, 32)$ имеем $\theta_2 = -16$, $b_1 = 225$. Ввиду леммы 1.2 имеем $28 \cdot 322/92 < \mu < 48 \cdot 322/112$. Поскольку μ делит $kb_1 = 322 \cdot 225$, то $\mu \in \{105, 115, 126\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 4, 4.

В случае параметров $(324, 68, 7, 16)$ имеем $\theta_2 = -13$, $b_1 = 255$. Ввиду леммы 1.2 имеем $12 \cdot 324/64 < \mu < 29 \cdot 324/81$. Поскольку μ делит $kb_1 = 324 \cdot 255$, то $\mu \in \{68, 81, 85, 90, 102, 108\}$ и соответственно x_0 не больше 5, 11, 11, 11, 7, 4.

В случае параметров $(324, 76, 10, 20)$ имеем $\theta_2 = -14$, $b_1 = 247$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 324/72 < \mu < 34 \cdot 324/90$. Поскольку μ делит $kb_1 = 324 \cdot 247$, то $\mu \in \{76, 78, 81, 108, 114, 117\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 2, 5, 6, 4, 2.

В случае параметров $(325, 54, 3, 10)$ имеем $\theta_2 = -11$, $b_1 = 270$. Ввиду леммы 1.2 имеем $6 \cdot 325/50 < \mu < 21 \cdot 325/65$. $39^* \leq \mu \leq 105^*$. Поскольку μ делит $kb_1 = 325 \cdot 270$, то $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$ и соответственно x_0 не больше 9, 14, 17, 19, 17, 15, 9.

В случае параметров $(343, 102, 21, 34)$ имеем $\theta_2 = -17$, $b_1 = 240$. Ввиду леммы 1.2 имеем $30 \cdot 343/98 < \mu < 51 \cdot 343/119$. Поскольку μ делит $kb_1 = 343 \cdot 240$, то $\mu \in \{112, 120, 140\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 4, 2.

В случае параметров $(352, 26, 0, 2)$ имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 325$. Ввиду леммы 1.2 имеем $-2 \cdot 352/22 < \mu < 8 \cdot 352/32$. Поскольку μ делит $kb_1 = 352 \cdot 325$, то $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$ и соответственно x_0 не больше 252, 232, 184, 162, 154, 144, 144, 118, 110, 102, 100, 85, 72, 61, 52, 50, 44, 30, 9.

В случае параметров $(352, 36, 0, 4)$ имеем $\theta_2 = -8$, $b_1 = 315$. Ввиду леммы 1.2 имеем $0 \cdot 352/32 < \mu < 12 \cdot 352/44$. Поскольку μ делит $kb_1 = 352 \cdot 315$, то $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$ и соответственно x_0 не больше 88, 62, 55, 52, 58, 67, 80, 70, 65, 65, 66, 72, 62, 62, 64, 61, 58, 56, 56, 52, 49, 49, 48, 40, 40, 34, 32, 29, 25, 24, 18, 16, 11, 8, 5.

В случае параметров $(352, 156, 60, 76)$ имеем $\theta_2 = -20$, $b_1 = 195$. Ввиду леммы 1.2 имеем $72 \cdot 352/152 < \mu < 96 \cdot 352/176$. Поскольку μ делит $kb_1 = 352 \cdot 195$, то $\mu = 176$ и $x_0 = 0$.

Лемма 5.3 и теорема 5 доказаны.

6. Доказательство основной теоремы

В этом разделе доказана теорема 1.

Пусть до конца раздела Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d > 2$, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами (v', k', λ', μ') из заключения теоремы 3 и $k' \neq 2\mu'$. Пусть $\theta_0 = k > \theta_1 > ... > \theta_d$ — собственные значения графа Γ.

Лемма 6.1. *Пусть параметры* (v', k', λ', μ') *выбраны в п.* (1) *заключения теоремы* 3. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(85, 14, 3, 2)$ *и либо* Γ *имеет массив пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$, *либо* $\mu \in \{5, 7, 10\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(169, 56, 15, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(204, 28, 2, 4)$ *и* $\mu \in \{5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 35, 42, 50\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (1) заключения теоремы 3.

В случае параметров $(28, 12, 6, 4)$ имеем $\mu \in \{5, 6, 7\}$ и x_0 не больше 6, 6, 4 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 14$ и $\theta_d \geq -4$. Если $\mu = 5$, то Γ — граф Тервиллигера, противоречие. Если $\mu = 6$, то $k_2 = 70$ и $b_2 \leq 6$ четно. В этом случае допустимых массивов пересечений нет. Если $\mu = 7$, то b_2 делится на 7, противоречие.

В случае параметров $(85, 14, 3, 2)$ имеем $\mu \in \{5, 7, 10, 14, 17\}$ и b_2 не больше 40, 36, 25, 17, 11 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 34$ и $\theta_d \geq -15$. Если $\mu = 17$, то b_2 делится на 17, противоречие. Если $\mu = 14$, то $k_2 = 85 \cdot 5$, a_2 четно и $b_2 \leq 17$ нечетно. Так как $b_2 \leq 17 < 3c_2/2$, то $d \leq 4$. Если $d = 3$, то Γ имеет массив пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$. Пусть $d = 4$. Так как $b_2 \in \{15, 16, 17\}$ и $b_2 b_3$ делится на 14, то $b_2 = 16$, $b_3 = 7$, $k_3 = 85 \cdot 80/c_3$, $k_4 = 85 \cdot 80 \cdot 7/(c_3 c_4)$ и $c_3 \in \{34, 40, 50, 68\}$. С другой стороны, по лемме 1.2 имеем $7c_3 \leq 78(85 - c_3)7^2/27^2$, поэтому $c_3 \leq 36$. Итак, $c_3 = 34$ и $c_4 \in \{50, 56, 70\}$. В любом случае $\theta_1 > 46$, противоречие.

В случае параметров $(112, 36, 10, 12)$ имеем $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$ и b_2 не больше 1, 3, 3, 2 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 74$ и $\theta_d \geq -16$. Если $\mu = 30$, то b_2 четно, если $\mu = 35$, то b_2 делится на 7, если $\mu = 40$, то b_2 делится на 8, а если $\mu = 42$, то b_2 делится на 14. В любом случае имеем противоречие.

В случае параметров $(120, 34, 8, 10)$ имеем $\mu \in \{30, 34, 40\}$ и b_2 не больше 5, 5, 4 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 16$ и $\theta_d \geq -18$. Если $\mu = 30$, то b_2 делится на 6, если $\mu = 34$, то b_2 делится на 2, а если $\mu = 40$, то b_2 делится на 8. Значит, $\mu = 34$, $b_2 \in \{2, 4\}$, $k_2 = 300$ и допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(133, 32, 6, 8)$ имеем $\mu \in \{20, 25, 28, 35, 38\}$ и b_2 не больше 1, 7, 9, 7, 6 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 19$ и $\theta_d \geq -21$. Если $\mu = 28$, то b_2 делится на 7, если $\mu = 35$, то b_2 делится на 7, а если $\mu = 38$, то b_2 делится на 19. В случае $\mu = 28$ имеем $b_2 = 7$, $k_2 = 19 \cdot 25$ и $c_3 \in \{95, 133\}$. В случае $\mu = 35$ имеем $b_2 = 7$, $k_2 = 19 \cdot 20$ и $c_3 \in \{95, 133\}$. Если $\mu = 20$, то $b_2 = 1$, $k_2 = 19 \cdot 35$ и $c_3 \in \{95, 133\}$. Если $\mu = 25$, то $b_2 \leq 7$, $k_2 = 19 \cdot 28$ и либо $\theta_1 > 19$, либо $c_3 = 133$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(144, 52, 16, 20)$ имеем $\mu \in \{52, 56, 63\}$ и x_0 не больше 1, 2, 1 соответственно. Если $\mu = 52$, то b_2 делится на 4, если $\mu = 56$, то b_2 делится на 8, а если $\mu = 63$, то b_2 делится на 9. В любом случае имеем противоречие. В случае параметров $(154, 48, 12, 16)$ имеем $\mu \in \{49, 55\}$ и b_2 не больше 3, 3 соответственно. Если $\mu = 49$, то b_2 делится на 7, если $\mu = 55$, то b_2 делится на 11. В любом случае имеем противоречие.

В случае параметров $(169, 56, 15, 20)$ имеем $\mu = 56$, $b_2 = 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$.

В случае параметров $(176, 70, 24, 30)$ имеем $\mu \in \{77, 80\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 1. Противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на μ.

В случае параметров $(183, 52, 11, 16)$ имеем $\mu \in \{61, 65\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 4. Так как $b_1 b_2$ делится на μ, то $\mu = 65$, $k_2 = 183 \cdot 2$ и $c_3 = 126, 183$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. В случае параметров $(190, 84, 33, 40)$ имеем $\mu = 95$ и $b_2 = 1$, противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на 95.

В случае параметров $(196, 60, 14, 20)$ имеем $\mu \in \{60, 63, 70\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 3, 4. Далее, $b_1 = 135$ и b_1b_2 не делится на μ, противоречие.

В случае параметров $(204, 28, 2, 4)$ имеем $\mu \in \{6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 34, 35, 42, 50, 51\}$ и соответственно x_0 не больше 54, 43, 34, 48, 30, 39, 39, 37, 36, 34, 30, 30, 24, 24, 18, 9, 8. Так как $b_1 = 175$ и b_1b_2 делится на μ, то $\mu \neq 34, 51$.

Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть параметры* (v', k', λ', μ') *выбраны в п.* (2) *заключения теоремы* 3. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(232, 33, 2, 5)$ *и* $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(243, 22, 1, 2)$ *и* $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(289, 72, 11, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(325, 54, 3, 10)$ *и* $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(352, 26, 0, 2)$ *и* $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$;

(6) $[u]$ *имеет параметры* $(352, 36, 0, 4)$ *и* $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (2) заключения теоремы 3.

В случае параметров $(217, 66, 15, 22)$ имеем $\mu \in \{70, 75\}$ и соответственно b_2 не больше 2, 4. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 14$ и $\theta_d \geq -31$. Так как $b_1 = 150$ и b_1b_2 делится на μ, то $\mu = 75$, $k_2 = 217 \cdot 2$ и $c_3 \geq 75 - 4 + 68 = 139$. Отсюда $c_3 \in \{186, 217\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(225, 64, 13, 20)$ имеем $\mu \in \{72, 75, 80, 90\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 5, 4, 1. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 15$ и $\theta_d \geq -33$. Так как $b_1 = 160$ и b_1b_2 делится на μ, то $\mu = 80$, $k_2 = 225 \cdot 2$ и $c_3 \geq 80 - 4 + 66 = 142$. Отсюда $c_3 \in \{150, 180, 200, 225\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(256, 68, 12, 20)$ имеем $\mu \in \{68, 88\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 5. Противоречие с тем, что $b_1 = 187$ и b_1b_2 не делится на μ.

В случае параметров $(285, 64, 8, 16)$ имеем $\mu \in \{60, 66, 75, 76, 95, 100\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 6, 9, 9, 5, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 19$ и $\theta_d \geq -45$. Так как $b_1 = 220$ и b_1b_2 делится на μ, то $\mu = 66$, $k_2 = 95 \cdot 10$ и $c_3 \geq 66 - 6 + 66 = 126$. Отсюда $c_3 \in \{190, 285\}$, а также $c_3 \in \{150, 228\}$ при $b_2 = 6$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(286, 95, 24, 35)$ имеем $\mu = 110$ и $b_2 \leq 2$. Противоречие с тем, что $b_1 = 190$ и b_1b_2 не делится на μ. В случае параметров $(289, 72, 11, 20)$ имеем $\mu \in \{72, 102, 108\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 4, 1. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 17$ и $\theta_d \geq -44,2$. Так как $b_1 = 216$ и b_1b_2 делится на μ, то $\mu \neq 102$. Если $\mu = 72$, то Γ имеет массив пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$. Если $\mu = 108$, то допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(300, 104, 28, 40)$ имеем $\mu \in \{117, 125, 130\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 3, 2. Противоречие с тем, что $b_1 = 195$ и b_1b_2 не делится на μ. В случае параметров $(320, 132, 46, 60)$ имеем $b_1 = 187$, $\mu = 160$ и $b_2 \leq 1$, противоречие. В случае параметров $(322, 96, 20, 32)$ имеем $b_1 = 225$, $\mu \in \{105, 115, 126\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 4, 4. Противоречие с тем, что b_1b_2 не делится на μ.

В случае параметров $(324, 68, 7, 16)$ имеем $b_1 = 255$, $\mu \in \{68, 81, 85, 90, 102, 108\}$ и соответственно b_2 не больше 5, 11, 11, 11, 7, 4. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 20,25$ и $\theta_d \geq -52$. Так как b_1b_2 делится на μ, то $\mu \in \{68, 85, 90, 102\}$. Если $\mu = 68$, то $b_2 = 4$, $k_2 = 81 \cdot 15$, $c_3 \geq 68 - 4 + 70 = 134$ и $c_3 \in \{135, 162, 180, 243, 270, 324\}$. Если $\mu = 85$, то $b_2 \leq 11$, $k_2 = 324 \cdot 3$. Если $\mu = 90$, то $b_2 = 6$, $k_2 = 54 \cdot 17$. Если $\mu = 102$, то $b_2 = 2, 4, 6$, $k_2 = 162 \cdot 5$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(324, 76, 10, 20)$ имеем $b_1 = 247 = 19 \cdot 13$, $\mu \in \{76, 78, 81, 108, 114, 117\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 2, 5, 6, 4, 2. Противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на μ. В случае параметров $(343, 102, 21, 34)$ имеем $b_1 = 240$, $\mu \in \{120, 140\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 13$ и $\theta_d \geq -49$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ, то $\mu = 120$, $k_2 = 324 \cdot 2$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть параметры* (v', k', λ', μ') *выбраны в п.* (3) *заключения теоремы* 3. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(378, 52, 1, 8)$ *и* $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(441, 88, 7, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(505, 84, 3, 16)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(625, 104, 3, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(676, 108, 2, 20)$ *и* $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(729, 112, 1, 20)$ *и* $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (3) заключения теоремы 3.

В случае параметров $(378, 52, 1, 8)$ имеем $b_1 = 325$, $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$ и соответственно b_2 не больше 5, 16, 20, 24, 28, 30, 29, 29, 28, 25, 24, 17, 16, 6.

В случае параметров $(391, 140, 39, 56)$ имеем $b_1 = 250$, $\mu = 170$ и $b_2 \leq 2$. Противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на μ.

В случае параметров $(400, 84, 8, 20)$ имеем $b_1 = 315 = 5 \cdot 63$, $\mu \in \{84, 90, 100, 105, 112, 120, 125, 126, 140\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 6, 11, 12, 12, 10, 8, 8, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 20$ и $\theta_d \geq -64$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ, то $\mu \in \{90, 105, 120, 126\}$. Если $\mu = 90$, то $b_2 = 2, 4, 6$, $k_2 = 40 \cdot 35$ и $c_3 \geq 90 - 6 + 86 = 170$. Если $\mu = 105$, то $b_2 \leq 12$, $k_2 = 400 \cdot 3$, $c_3 \geq 105 - 12 + 86 = 179$. Если $\mu = 120$, то $b_2 = 8$, $k_2 = 50 \cdot 21$, $c_3 \geq 120 - 8 + 86 = 198$. Если $\mu = 126$, то $b_2 = 2, 4, 6, 8$, $k_2 = 200 \cdot 5$, $c_3 \geq 126 - 8 + 86 = 204$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(441, 88, 7, 20)$ имеем $b_1 = 352$, $\mu \in \{88, 96, 98, 99, 112, 126, 132, 144, 147, 154\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 8, 10, 10, 14, 12, 10, 5, 4. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 21$ и $\theta_d \geq -71{,}4$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ, то $\mu \in \{88, 96, 112, 132, 144\}$. Если $\mu = 88$, то $b_2 = 1$, $k_2 = 441 \cdot 4$ и Γ имеет массив пересечений $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$.

Если $\mu = 96$, то $b_2 = 3, 6$, $k_2 = 147 \cdot 11$, $c_3 \geq 96 - 6 + 90 = 180$. Если $\mu = 112$, то $b_2 = 7, 14$, $k_2 = 63 \cdot 22$, $c_3 \geq 112 - 14 + 90 = 188$. Если $\mu = 132$, то $b_2 = 3, 6, 9, 12$, $k_2 = 147 \cdot 8$, $c_3 \geq 132 - 12 + 90 = 210$. Если $\mu = 144$, то $b_2 = 9$, $k_2 = 49 \cdot 22$, $c_3 \geq 144 - 9 + 90 = 225$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(505, 84, 3, 16)$ имеем $b_1 = 420$, $\mu \in \{84, 100, 101, 105, 140, 150\}$ и соответственно b_2 не больше 8, 20, 20, 21, 13, 8. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 25{,}25$ и $\theta_d \geq -85$. Если $\mu = 84$, то $b_2 \leq 8$, $k_2 = 505 \cdot 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$.

Если $\mu = 100$, то $b_2 = 5, 10, 15, 20$, $k_2 = 101 \cdot 21$, $c_3 \geq 100 - 20 + 86 = 166$. Если $\mu = 101$, то b_2 делится на 101, противоречие. Если $\mu = 105$, то $b_2 \leq 21$, $k_2 = 505 \cdot 4$, $c_3 \geq 105 - 21 + 86 = 170$. Если $\mu = 140$, то $b_2 \leq 13$, $k_2 = 505 \cdot 3$, $c_3 \geq 140 - 13 + 86 = 213$. Если $\mu = 150$, то $b_2 = 5$, $k_2 = 101 \cdot 14$, $c_3 \geq 150 - 5 + 86 = 233$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(529, 96, 5, 20)$ имеем $b_1 = 432 = 9 \cdot 48$, $\mu \in \{108, 138, 144\}$ и соответственно b_2 не больше 12, 17, 16. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 23$ и $\theta_d \geq -87{,}4$. Если $\mu = 108$, то $b_2 \leq 12$, $k_2 = 529 \cdot 4$ и $c_3 \geq 108 - 12 + 98 = 194$. Если $\mu = 138$, то b_2 делится на 23, противоречие. Если $\mu = 144$, то $b_2 \leq 16$, $k_2 = 529 \cdot 3$ и $c_3 \geq 144 - 16 + 98 = 226$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(540, 154, 28, 50)$ имеем $b_1 = 385$, $\mu \in \{180, 189, 198, 210, 220, 225\}$ и соответственно b_2 не больше 2, 5, 6, 5, 2, 1. Если $\mu = 180$, или $\mu = 189$, или $\mu = 198$, то b_2

делится на 9, противоречие. Если $\mu = 210$, то b_2 делится на 6, противоречие. Если $\mu = 220$, то b_2 делится на 6, противоречие. Если $\mu = 225$, то b_2 делится на 9, противоречие.

В случае параметров $(595, 144, 18, 40)$ имеем $b_1 = 450$, $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$ и соответственно b_2 не больше 6, 8, 7, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 17$ и $\theta_d \geq -91$. Если $\mu = 170$, то b_2 делится на 17, противоречие. Если $\mu = 175$, то $b_2 = 7$, $k_2 = 85 \cdot 18$ и $c_3 \geq 175 - 7 + 146 = 314$. Если $\mu = 210$, то $b_2 = 7$, $k_2 = 85 \cdot 15$ и $c_3 \geq 210 - 7 + 146 = 349$. Если $\mu = 225$, то $b_2 \leq 2$, $k_2 = 595 \cdot 2$ и $c_3 \geq 225 - 2 + 146 = 369$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(625, 104, 3, 20)$ имеем $b_1 = 520$, $\mu \in \{104, 125, 130, 200\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 20, 22, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 25$ и $\theta_d \geq -105$. Если $\mu = 104$, то $b_2 = 1$, $k_2 = 625 \cdot 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$.

Если $\mu = 125$, то b_2 делится на 25, противоречие. Если $\mu = 130$, то $b_2 \leq 22$, $k_2 = 625 \cdot 4$ и $c_3 \geq 130 - 22 + 106 = 214$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. Если $\mu = 200$, то b_2 делится на 5, противоречие.

Лемма 6.3 и теорема 1 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширения // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 5. С. 501–504.
2. **Гутнова А.К., Махнев А.А.** О локально псевдо-$GQ(4,t)$-графах // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 6. С. 637–641.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 4. С. 396–400.
4. **Махнев А.А.** Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения // Изв. Гомел. гос. у-та. 2014. № 3 (84). С. 84–85. (Естеств. науки).
5. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** Spectra of graphs (course notes) [e-resource]. URL: http://homepages.cwi.nl/ aeb/math/ipm/ .
7. **Koolen J.H., Park J.** Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency // J. Comb. Theory. Ser. A. 2012. Vol. 119. P. 546–555.
8. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
9. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979. Vol. 33, iss. 1. P. 392–400.
10. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** О расширениях сильно регулярных графов без треугольников с собственным значением 4 // Междунар. конф., посвященная 100-летию со дня рождения Д. А. Супруненко: тез. докл. Минск, 2015.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 17.01.2015

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com