ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, МИНИМАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТОГО СПЕКТРА[1]

Н. В. Маслова

Пусть G — конечная группа. Множество всех простых делителей порядка группы G называется ее простым спектром и обозначается через $\pi(G)$. Группа G называется минимальной относительно простого спектра, если $\pi(G) \neq \pi(H)$ для любой собственной подгруппы H из G. Доказывается, что каждая конечная группа, минимальная относительно простого спектра, все неабелевы композиционные факторы которой изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, порождается двумя сопряженными элементами. Тем самым расширяется полученный ранее аналогичный результат для конечных групп, все максимальные подгруппы которых холловы. Кроме того, исследуется нормальное строение конечной группы, минимальной относительно простого спектра и имеющей неабелев композиционный фактор, порядок которого делится ровно на 3 различных простых числа.

Ключевые слова: конечная группа, порождаемость парой сопряженных элементов, простой спектр, минимальная относительно простого спектра группа, максимальная подгруппа, композиционный фактор.

N. V. Maslova On the finite prime spectrum minimal groups.

Let G be a finite group. The set of all prime divisors of the order of G is called the prime spectrum of G and is denoted by $\pi(G)$. A group G is called prime spectrum minimal if $\pi(G) \neq \pi(H)$ for any proper subgroup H of G. We prove that every prime spectrum minimal group all whose non-abelian composition factors are isomorphic to the groups from the set $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$ is generated by two conjugate elements. Thus, we expand the correspondent result for finite groups with Hall maximal subgroups. Moreover, we study the normal structure of a finite prime spectrum minimal group which has a simple non-abelian composition factor whose order is divisible by 3 different primes only.

Keywords: finite group, generation by a pair of conjugate elements, prime spectrum, prime spectrum minimal group, maximal subgroup, composition factor.

1. Введение

Всюду в работе мы будем употреблять термин “группа” в значении “конечная группа”.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [1; 7; 8].

Наибольшая целая степень простого числа p, делящая натуральное число j, называется *p-частью* числа j и обозначается через j_p.

Пусть G — группа. Множество всех простых делителей порядка группы G называется *простым спектром группы* G и обозначается через $\pi(G)$. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, не принадлежащих π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество всех его простых делителей. Заметим, что в этих обозначениях $\pi(|G|) = \pi(G)$ для конечной группы G.

Подгруппа H конечной группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. *Холлова подгруппа* — это π-холлова подгруппа для некоторого множества π

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Дмитрия Зимина “Династия”, Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5), проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.A03.21.0006) (теорема 1) и Российского научного фонда (проект 14-11-00061) (теорема 2).

простых чисел. Будем говорить, что G — группа с холловыми максимальными подгруппами, если каждая максимальная подгруппа группы G является холловой.

Через $S(G)$ обозначается разрешимый радикал группы G (ее наибольшая разрешимая нормальная подгруппа), через $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G (пересечение всех ее максимальных подгрупп), а через $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G.

П. Шумяцкий записал в "Коуровскую тетрадь" следующую гипотезу [2, проблема 17.125].

Гипотеза 1. *В группе G всегда найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$.*

Группу G назовем *минимальной относительно простого спектра*, если $\pi(H) \neq \pi(G)$ для любой собственной (равносильно, для любой максимальной) подгруппы H в G.

Можно показать (см. [5, лемма 5]), что гипотеза 1 эквивалентна следующей гипотезе.

Гипотеза 2. *Любая группа, минимальная относительно простого спектра, порождается двумя сопряженными элементами.*

В [5] было получено частичное подтверждение гипотезы 2. Более точно, наряду с классом групп, минимальных относительно простого спектра, был рассмотрен класс всех групп с холловыми максимальными подгруппами. Этот класс является собственным подклассом класса групп, минимальных относительно простого спектра, и любая разрешимая группа является группой с холловыми максимальными подгруппами тогда и только тогда, когда она минимальна относительно простого спектра [5, лемма 6]. В [5] было показано, что любая группа с холловыми максимальными подгруппами порождается парой сопряженных элементов.

Отметим, что доказать справедливость гипотезы 2 для групп с холловыми максимальными подгруппами удалось благодаря тому, что в работе [3] было показано, что неабелевы композиционные факторы таких групп изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, а в работе [4] получено полное описание нормального строения таких групп.

Отметим, что существуют группы, минимальные относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, не являющиеся, однако, группами с холловыми максимальными подгруппами (см. лемму 1). В настоящей работе мы доказываем следующую теорему, расширяющую основной результат работы [5].

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, минимальная относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которой изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$. Тогда группа G порождается двумя сопряженными элементами.*

Отметим, что этот результат получен снова благодаря использованию информации о нормальном строении групп, минимальных относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$. Поэтому проблема исследования нормального строения групп, минимальных относительно простого спектра, представляется естественной и интересной.

Доказана следующая

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, имеющая в качестве неабелева композиционного фактора 3-примарную конечную простую группу S. Тогда верно одно из утверждений:*

(i) *$S \in \{A_6, PSU_3(3), PSU_4(2)\}$ и группа G не минимальна относительно простого спектра.*

(ii) *$S \in \{A_5, PSL_2(7), PSL_3(3)\}$ и группа G минимальна относительно простого спектра тогда и только тогда, когда G обладает нормальным рядом*

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_n = \{1\}$$

таким, что

(1) *при* $i \geq 1$ *группа* G_i/G_{i+1} *является элементарной абелевой, изоморфной некоторой силовской подгруппе группы* G, *и* G/G_i *действует неприводимо на* G_i/G_{i+1};

(2) G_1 — *холлова подгруппа в* G_0, *и либо факторгруппа* $\bar{G} = G_0/G_1$ *изоморфна одной из простых групп* A_5 *или* $PSL_3(3)$, *либо* $O_3(\bar{G}) = \Phi(\bar{G})$ *и* $\bar{G}/\Phi(\bar{G}) \cong PSL_2(7)$.

В частности, если $S \cong PSL_2(7)$, *то группа* G *минимальна относительно простого спектра тогда и только тогда, когда* G *является группой с холловыми максимальными подгруппами.*

(iii) $S \cong PSL_2(8)$ *и если группа* G *минимальна относительно простого спектра, то ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группам из множества* $\{S\} \cup \{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod 3\}$.

(iv) $S \cong PSL_2(17)$ *и если группа* G *минимальна относительно простого спектра, то ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группам из множества* $\{S\} \cup \{Sz(2^w)\}$.

Кроме того, в случаях (iii) *и* (iv) *выполняются следующие утверждения*:

(a) *для любой простой группы* R *из множества* $\{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod 3\}$ *и* $\{Sz(2^w)\}$ *соответственно найдется минимальная относительно простого спектра группа* G, *имеющая неабелевы композиционные факторы, изоморфные* S *и* R;

(b) *для любого натурального числа* m *найдутся группы* $R_1, \ldots, R_m$ *из множества* $\{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod 3\}$ *и* $\{Sz(2^w)\}$ *соответственно и минимальная относительно простого спектра группа* G, *имеющая неабелевы композиционные факторы, изоморфные* $S, R_1, \ldots, R_m$.

2. Группы, минимальные относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$

Целью настоящего раздела является доказательство теоремы 1.

Сначала покажем непустоту класса групп, минимальных относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$, $PSL_5(2)\}$, не являющихся, однако, группами с холловыми максимальными подгруппами.

В соответствии с определением В. Гашюца [11], группа F называется *p-фраттиниевым расширением* группы G с *ядром* N, если $G \cong F/N$ для некоторой нормальной p-подгруппы $N \trianglelefteq F$ такой, что $N \leq \Phi(F)$. Если при этом ядро N является элементарной абелевой p-группой, то группа F называется *p-элементарным фраттиниевым расширением* группы G.

Лемма 1. *Существует* 5*-элементарное фраттиниево расширение* G *группы* $PSL_2(11)$ *с ядром порядка* 5^{11}. *Группа* G *минимальна относительно простого спектра, но не является группой с холловыми максимальными подгруппами.*

Доказательство. Согласно [9] существует абсолютно неприводимый $\mathbb{F}_5 PSL_2(11)$-модуль степени 11 с нетривиальной второй группой когомологий, откуда ввиду [15, теорема I.17.2] следует, что существует нерасщепляемое расширение G группы $PSL_2(11)$ с элементарным абелевым ядром L порядка 5^{11}, где факторгруппа G/L действует на L неприводимо.

Заметим, что $L = \Phi(G)$. Действительно, пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая L. Тогда $G = LM$ и, поскольку подгруппа $L \cap M$ является G-инвариантной и факторгруппа G/L действует на L неприводимо, имеем $L \cap M = 1$. Противоречие с нерасщепляемостью расширения G над L. Обратное включение очевидно. Таким образом, группа G является 5-элементарным фраттиниевым расширением группы $PSL_2(11)$ с ядром порядка 5^{11}.

Используя описание максимальных подгрупп группы $PSL_2(11)$ (см. [8]), видим, что если M — максимальная подгруппа группы G, то $\pi(|G : M|) \setminus \pi(|M|))$ непусто, однако полный прообраз в G подгруппы из $PSL_2(11)$, изоморфной D_{12}, не является холловой подгруппой в G. Таким образом, группа G минимальна относительно простого спектра, но не является группой с холловыми максимальными подгруппами.

Лемма доказана.

Приведем несколько вспомогательных результатов о строении групп, минимальных относительно простого спектра.

Лемма 2 [5, лемма 4]. *Класс групп, минимальных относительно простого спектра, замкнут относительно взятия гомоморфных образов.*

Лемма 3. *Пусть S — простая неабелева группа такая, что $\pi(S)=\pi(\mathrm{Aut}(S))$, G — группа, минимальная относительно простого спектра, такая, что $A=L_1\times\ldots\times L_n$ — минимальная неединичная нормальная подгруппа в G, где $L_i\cong S$ для всех i. Если факторгруппа G/A разрешима, то она тривиальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из доказательства [4, лемма 21].

Как известно, любой главный фактор группы является прямым произведением изоморфных простых групп. Мы скажем, что главный фактор K/L группы имеет *композиционный тип* S, если группа K/L изоморфна прямому произведению изоморфных копий простой группы S.

Лемма 4. *Пусть G — группа, минимальная относительно простого спектра. Тогда*

(1) *G имеет не более одного неабелева главного фактора данного композиционного типа*;

(2) *если X_1 и X_2 — два неизоморфных неабелевых композиционных фактора группы G, то $|\pi(X_1)\setminus\pi(X_2)|\geq 2$ и $|\pi(X_2)\setminus\pi(X_1)|\geq 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) следует из [6, лемма 9].

Допустим, что утверждение (2) не верно, и группа G, минимальная относительно простого спектра, обладает главным рядом

$$G=G_0>G_1>\cdots>G_n=\{1\}$$

таким, что главный фактор G_{i-1}/G_i имеет композиционный тип X_1, а главный фактор G_{j-1}/G_j, где $i<j$, имеет композиционный тип X_2.

Ввиду леммы 2 можно считать, что $G_j=1$, т. е. $j=n$.

Пусть для краткости $\pi_{1,2}=\pi(X_1)\setminus\pi(X_2)$, $\pi_{2,1}=\pi(X_2)\setminus\pi(X_1)$, $X=G_{i-1}$, $Y=G_i$ и $H=G_{j-1}$. Тогда H — минимальная нормальная подгруппа в группе G, H неабелева, а факторгруппа $\bar{X}:=X/Y$ — минимальная нормальная подгруппа в группе $\bar{G}:=G/Y$.

Предположим, что $|\pi_{2,1}|\leq 1$. Пусть

$$p\in\begin{cases}\pi_{2,1}, & \text{если } \pi_{2,1}\neq\varnothing;\\ \pi(H), & \text{если } \pi_{2,1}=\varnothing.\end{cases}$$

Возьмем в H силовскую p-подгруппу P и рассмотрим ее нормализатор $N_G(P)$. Заметим, что $\pi(G)=\pi(G/H)\cup\pi(H)=\pi(G/H)\cup\pi(X/Y)\cup\pi_{2,1}=\pi(G/H)\cup\pi_{2,1}$. Ввиду аргумента Фраттини $G=HN_G(P)$, откуда

$$\pi(G)=\pi(G/H)\cup\pi_{2,1}=\pi(HN_G(P)/H)\cup\pi_{2,1}=\pi(N_G(P)/N_H(P))\cup\pi_{2,1}\subseteq\pi(N_G(P))$$

и, следовательно, $N_G(P)=G$, т. е. $1\neq P\trianglelefteq G$. Но $P\neq H$, так как H — прямое произведение неабелевых простых групп. Противоречие с тем, что H — минимальная нормальная подгруппа в G.

Предположим, что $|\pi_{1,2}|\leq 1$. Пусть

$$p\in\begin{cases}\pi_{1,2}, & \text{если } \pi_{1,2}\neq\varnothing;\\ \pi(X/Y), & \text{если } \pi_{1,2}=\varnothing.\end{cases}$$

Рассмотрим в группе $\bar{X}$ силовскую p-подгруппу P. Заметим, что $N_{\bar{G}}(P)$ — собственная подгруппа в $\bar{G}$. Ввиду аргумента Фраттини $\bar{G} = \bar{X}N_{\bar{G}}(P)$. Поэтому $|\bar{G} : N_{\bar{G}}(P)| = |\bar{X} : N_{\bar{X}}(P)|$, следовательно, $\pi(|\bar{G} : N_{\bar{G}}(P)|) \subset \pi(H)$. Рассмотрим полный прообраз M в группе G подгруппы $N_{\bar{G}}(P)$. Поскольку $|G : M| = |\bar{G} : N_{\bar{G}}(P)|$ и $H \leq M$, имеем $\pi(M) = \pi(G)$. Противоречие с минимальностью группы G относительно простого спектра.

Лемма доказана.

Лемма 5 [5, предложение 5]. *Любая простая группа порождается двумя своими сопряженными элементами.*

Лемма 6 [5, предложение 6]. *Пусть $\mathfrak{Z}$ — замкнутый относительно взятия гомоморфных образов подкласс класса групп, минимальных относительно простого спектра. Допустим, что существует группа $G \in \mathfrak{Z}$, не порождающаяся никакой парой своих сопряженных элементов. Будем считать при этом, что группа G имеет наименьший возможный порядок. Тогда $S(G) = 1$.*

Доказательство теоремы 1. Пусть G — группа, минимальная относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которой изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$. Предположим, что G не порождается никакой парой своих сопряженных элементов.

Поскольку ввиду леммы 6 разрешимая группа, минимальная относительно простого спектра, порождается парой своих сопряженных элементов, группа G неразрешима.

Ввиду [8] имеем $\pi(PSL_2(7)) = \{2, 3, 7\}$, $\pi(PSL_2(11)) = \{2, 3, 5, 11\}$ и $\pi(PSL_5(2)) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$. Таким образом, $|\pi(PSL_2(11)) \setminus \pi(PSL_5(2))| = 1 < 2$, $|\pi(PSL_2(7)) \setminus \pi(PSL_2(11))| = 1 < 2$ и $|\pi(PSL_2(7)) \setminus \pi(PSL_5(2))| = 0 < 2$, поэтому ввиду п. (2) леммы 4 группа G содержит ровно один неабелев главный фактор.

Пусть A — минимальная неединичная нормальная подгруппа в факторгруппе $G/S(G)$. Поскольку $\pi(PSL_2(7)) = \pi(\mathrm{Aut}(PSL_2(7)))$, $\pi(PSL_2(11)) = \pi(\mathrm{Aut}(PSL_2(11)))$ и $\pi(PSL_5(2)) = \pi(\mathrm{Aut}(PSL_5(2)))$, ввиду леммы 3 имеем, что факторгруппа G/A тривиальна. Отсюда ввиду леммы 2 немедленно получаем, что факторгруппа $G/S(G)$ проста.

Будем считать, что группа G имеет наименьший возможный порядок. Заметим, что ввиду леммы 2 класс минимальных относительно простого спектра групп, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, замкнут относительно взятия факторгрупп. Поэтому ввиду леммы 6 группа G проста, что противоречит лемме 5.

Теорема 1 доказана.

3. Нормальное строение группы, минимальной относительно простого спектра и имеющей 3-примарный неабелев композиционный фактор

Целью настоящего раздела является доказательство теоремы 2.

Сначала приведем несколько вспомогательных результатов. Нам понадобится следующее теоретико-числовое утверждение.

Лемма 7 (теорема Героно [12]). *Пусть p и q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a и b. Тогда $(p^a, q^b) \in \{(3^2, 2^3), (2^a, q), (p, 2^b)\}$, где a — простое число и b — степень числа 2.*

Пусть G — группа, $A = L_1 \times \ldots \times L_n$ — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа в G, $L_i \cong S$, где S — простая группа, и $X \leq S$. Группа G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\Omega = \{L_1, \ldots, L_n\}$. Можно считать, что $L_1 = S$. Так как G действует транзитивно на Ω, имеем $n = |G : N_G(S)|$. Зафиксируем некоторую полную систему $\mathbf{B} = \{g_1, \ldots, g_n\}$

представителей правых смежных классов группы G по подгруппе $N_G(S)$. Тогда подгруппы S^{g_i} попарно различны, и мы, не уменьшая общности, можем считать, что $L_i = S^{g_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Для любой подгруппы $X \leq S$ положим $X_i = X^{g_i}$ и $Y(G, A, S, X, \mathbf{B}) = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$.

Лемма 8. *Пусть S — простая неабелева группа, содержащая подгруппу X такую, что класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и существует простое число $r \in \pi(S)$ такое, что $\pi(|S : X|) \subseteq \pi(X) \cup \{r\}$, и пусть G — группа, минимальная относительно простого спектра, обладающая нормальным рядом*

$$G \geq T > Z \geq \{1\}$$

таким, что $T/Z = L_1 \times \ldots \times L_n$ — минимальная неединичная нормальная подгруппа в G/Z, где $L_1 \cong S$. Тогда порядок $|Z|$ и индекс $|G : T|$ не делятся на r.

Доказательство. Рассмотрим факторгруппу G/Z, которая ввиду леммы 2 минимальна относительно простого спектра и обладает минимальной неединичной нормальной подгруппой $T/Z = L_1 \times \ldots \times L_n$. Тогда факторгруппа G/Z находится в условиях [6, лемма 4], откуда немедленно получаем, что индекс $|G : T|$ не делится на r.

Как и в доказательстве [6, лемма 4], построим подгруппу $\bar{Y} = Y(G/Z, T/Z, S, X, \mathbf{B})$ группы G/Z, которая определена по тем же правилам, что и перед настоящей леммой, и заметим, что $N_{G/Z}(\bar{Y})$ — собственная подгруппа в G/Z, $\pi(X) \subset \pi(N_{G/Z}(\bar{Y}))$ и $\pi(|G/Z : \bar{Y}|) \subset \pi(S)$. Теперь легко понять, что если r делит порядок $|Z|$, то полный прообраз Y в G подгруппы $\bar{Y}$ является собственной подгруппой в G и $\pi(Y) = \pi(G)$. Получаем противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть G — группа и K — холлова разрешимая нормальная подгруппа в G. Тогда группа G минимальна относительно простого спектра, если и только если G обладает нормальным рядом*

$$G = G_0 \geq G_1 = K \geq \ldots \geq G_n = 1$$

таким, что выполняются следующие условия:

(1) *факторгруппа G_0/G_1 тривиальна или минимальна относительно простого спектра;*

(2) *при $i \geq 1$ группа G_i/G_{i+1} является элементарной абелевой, изоморфной некоторой силовской подгруппе группы G, и G/G_i действует неприводимо на G_i/G_{i+1}.*

Доказательство. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Условие (1) следует из леммы 2. Докажем п. (2).

Рассмотрим в G минимальную неединичную нормальную подгруппу P, содержащуюся в K. Так как K разрешима, P является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi(G)$. Рассмотрим факторгруппу $\bar{G} = G/P$ и докажем, что она является p'-группой.

Пусть p делит $|\bar{G}|$. Ввиду холловости подгруппы K имеем, что p делит $\bar{K}$. Поскольку $\bar{K}$ разрешима, по теореме Холла — Чунихина в $\bar{K}$ существует холлова p'-подгруппа T, и все такие подгруппы сопряжены в $\bar{K}$. Ввиду аргумента Фраттини имеем, что $\bar{G} = \bar{K}N_{\bar{G}}(T)$, поэтому $|\bar{G} : N_{\bar{G}}(T)| = |\bar{K} : N_{\bar{K}}(T)| = p^\alpha$ для некоторого целого неотрицательного числа α.

Пусть N — полный прообраз в G факторгруппы $N_{\bar{G}}(T)$. Тогда p делит $|N|$ и $|G : N| = p^\alpha$, откуда $\pi(N) = \pi(G)$. Значит, $N = G$, т. е. $T \trianglelefteq \bar{G}$.

Пусть R — полный прообраз T в G. Тогда $R \trianglelefteq G$ и P — холлова подгруппа в R. По теореме Шура — Цассенхауза $R = P \leftthreetimes T_1$, где $T_1 \leq R$ и $T_1 \cong T$. Заметим, что T_1 является холловой p'-подгруппой в R и R разрешима. Поэтому ввиду теоремы Холла — Чунихина и аргумента Фраттини имеем $G = RN_G(T_1)$, откуда $|G : N_G(T_1)| = |R : N_R(T_1)|$ является степенью числа p. Заметим, что p делит $|N_G(T_1)|$, поэтому $\pi(N_G(T_1)) = \pi(G)$. Значит, $N_G(T_1) = G$, т. е. $T_1 \trianglelefteq \bar{G}$.

Рассмотрим факторгруппу $\tilde{G} = G/T_1$. Заметим, что факторгруппа $\tilde{K}$ является p-группой. Ввиду холловости подгруппы $\tilde{K}$ из теоремы Шура — Цассенхауза следует, что $\tilde{G} = \tilde{K} \leftthreetimes S$, где

$S \cong \tilde{G}/\tilde{K}$. Рассмотрим подгруппу $\tilde{P} \cdot S$. Заметим, что $\pi(\tilde{P} \cdot S) = \pi(\tilde{G})$. Отсюда $|G|_p = |\tilde{G}|_p = |\tilde{P}| = |P|$, что и требовалось доказать.

Применение индукции по $|\pi(K)|$ завершает доказательство п. (2).

Пусть теперь группа G обладает нормальным рядом

$$G = G_0 > G_1 = K \geq \ldots \geq G_n = 1$$

таким, что выполняются условия (1) и (2).

Докажем индукцией по n, что группа G минимальна относительно простого спектра. База индукции при $n = 1$ тривиальна.

Предположим теперь, что лемма справедлива для всех $m \leq n-1$, и рассмотрим в группе G нормальный ряд

$$G = G_0 \geq G_{n-1} > G_n = 1$$

и максимальную в G подгруппу M. Докажем, что $\pi(M) \neq \pi(G)$. Если $G_{n-1} \leq M$, то $\pi(M) = \pi(M/G_{n-1}) \cup \pi(G_{n-1})$ и, поскольку факторгруппа G/G_{n-1} минимальна относительно простого спектра, имеем $\pi(M) \neq \pi(G)$.

Предположим, что $G_{n-1} \not\leq M$. Ввиду максимальности M имеем $G = MG_{n-1}$. Так как группа G_{n-1} абелева и $M \cap G_{n-1} \trianglelefteq M$, имеем, что $M \cap G_{n-1} \trianglelefteq G$. Таким образом, поскольку G/G_{n-1} действует неприводимо на G_{n-1}, имеем, что $M \cap G_{n-1} = \{1\}$, т. е. $\pi(G_{n-1}) \not\subseteq \pi(M)$.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть G — группа, минимальная относительно простого спектра, такая, что $G/S(G) \cong PSL_2(7)$, 3 делит $|S(G)|$ и A — $3'$-холлова подгруппа в $S(G)$. Тогда $A \lhd G$.*

Доказательство. Данная лемма обобщает [4, лемма 24] и доказывается аналогично.

Лемма 11. *Пусть S — неабелева простая группа. Тогда*

(1) *порядок S делится на 6 или на 10;*

(2) *порядок S не делится на 3, если и только если S изоморфна группе $Sz(q)$ для $q > 2$.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из описания минимальных неабелевых простых групп [17, следствие 1].

Утверждение (2) следует из классификации конечных простых групп (см., например, [13]).

Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_k$ — простые группы такие, что для любой максимальной подгруппы M_i группы L_i существует простое число $p_i \in \pi(L_i) \setminus \bigcup_{j \neq i}(\pi(L_j))$ такое, что p_i не делит порядок $|M_i|$. Тогда группа $G = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_k$ минимальна относительно простого спектра.*

Доказательство. Пусть M — максимальная подгруппа в G. Тогда существует i такое, что $L_i \not\leq M$. Следовательно, $G = ML_i$, откуда с применением соответствующей теоремы о гомоморфизме получаем, что $|G : M| = |L_i : L_i \cap M|$ и

$$|M| = |G|/|L_i : L_i \cap M| = |G : L_i| \cdot |L_i \cap M|.$$

Пусть M_i — максимальная подгруппа из L_i, содержащая $M \cap L_i$. Тогда порядок $|M|$ делит $|G : L_i| \cdot |M_i|$, и существует простое число $p_i \in \pi(L_i) \setminus \bigcup_{j \neq i}(\pi(L_j))$ такое, что p_i не делит порядок $|M_i|$. Таким образом, p_i не делит порядок $|M|$.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть G — группа, имеющая в качестве неабелева композиционного фактора 3-примарную конечную простую группу S. Тогда группа G обладает главным рядом
$$G \geq T > Z \geq \{1\}$$
таким, что T/Z — главный фактор композиционного типа S.

Хорошо известно, что конечные простые неабелевы 3-примарные группы исчерпываются группами из следующего списка: A_5, $PSL_2(7)$, $PSL_2(8)$, A_6, $PSL_2(7)$, $PSL_3(3)$, $PSU_3(3)$, $PSU_4(2)$ (см., например, [14]). Далее все сведения о подгрупповом строении этих групп взяты из [8].

Если $S \in \{A_6, PSU_3(3), PSU_4(2)\}$, то п. (i) заключения теоремы 2 следует из [6, теорема 1].

Лемма 13. *Если $S \in \{A_5, PSL_2(7), PSL_3(3)\}$ и группа G минимальна относительно простого спектра, то $G/Z \cong S$ и $Z = S(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Тогда ввиду п. (1) леммы 4 группа G имеет не более одного неабелева главного фактора композиционного типа S. Докажем сначала, что группа G не содержит неабелевых композиционных факторов, не изоморфных S.

Пусть $S \cong A_5$. Тогда $\pi(S) = \{2, 3, 5\}$. Ввиду п. (2) леммы 4, если группа G содержит неабелев композиционный фактор R, не изоморфный S, то $|\pi(S) \setminus \pi(R)| \geq 2$, что противоречит п. (1) леммы 11. Поэтому группы Z и G/T разрешимы.

Если $S \in \{PSL_2(7), PSL_3(3)\}$, то S содержит подгруппу X такую, что класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и $\pi(|S : X|) \subseteq \pi(|X|) \cup \{2\}$, поэтому ввиду леммы 8 порядок $|Z|$ и индекс $|G : T|$ не делятся на 2. Таким образом, ввиду теоремы Фейта — Томпсона группы Z и G/T разрешимы.

Поскольку при $S \in \{A_5, PSL_2(7), PSL_3(3)\}$ имеем $\pi(S) = \pi(\mathrm{Aut}(S))$, факторгруппа G/Z находится в условиях леммы 3, таким образом, факторгруппа G/T тривиальна, откуда немедленно следует, что $G/Z \cong S$ и $Z = S(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 14. *Если $S \cong PSL_2(7)$, то выполняется п.* (ii) *заключения теоремы* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Ввиду леммы 13 имеем $G/Z \cong S$ и $Z = S(G)$. Рассмотрим $3'$-холлову подгруппу A в $S(G)$. Ввиду леммы 10 имеем $A \trianglelefteq G$. Заметим, что индексы максимальных подгрупп группы $PSL_2(7)$ в точности исчерпываются числами из множества $\{7, 8\}$, поэтому порядок $|S(G)|$ не делится на 2 и на 7; таким образом, A — холлова подгруппа в G.

Факторгруппа $\bar{G} := G/A$ содержит нормальную (возможно, тривиальную) 3-подгруппу $\bar{Z} = Z/A = S(G)/A$. Докажем, что $\bar{Z} = \Phi(\bar{G})$. Включение $\Phi(\bar{G}) \leq \bar{Z}$ очевидно. Проверим обратное включение. Действительно, пусть существует максимальная подгруппа $\bar{M}$ группы $\bar{G}$ такая, что $\bar{Z} \not\leq \bar{M}$. Тогда $\bar{G} = \bar{M}\bar{Z}$, и с использованием соответствующей теоремы о гомоморфизме получаем, что $|\bar{G} : \bar{M}| = |\bar{Z} : (\bar{Z} \cap \bar{M})|$. Отсюда индекс $|\bar{G} : \bar{M}|$ делит $|\bar{Z}|_3$, поэтому $\pi(\bar{M}) \supseteq \pi(|\bar{G}|/|\bar{Z}|_3) = \{2, 3, 7\} = \pi(\bar{G})$. Противоречие с минимальностью группы $\bar{G}$ относительно простого спектра.

Итак, $\bar{Z} = \Phi(\bar{G})$ и $\bar{G}/\bar{Z} \cong PSL_2(7)$, поэтому ввиду [4, предложение 2(1)] группа $\bar{G}$ является группой с холловыми максимальными подгруппами.

Поскольку A — холлова разрешимая нормальная подгруппа в G, ввиду леммы 9 группа G обладает нормальным рядом
$$G = G_0 > G_1 = A \geq \ldots \geq G_n = 1$$
таким, что выполняются следующие условия:

(1) для факторгруппы $\bar{G} = G_0/G_1 = G/A$ имеем $\Phi(\bar{G}) = O_3(\bar{G})$ и $\bar{G}/\Phi(\bar{G}) \cong PSL_2(7)$;

(2) при $i \geq 1$ группа G_i/G_{i+1} является элементарной абелевой, изоморфной некоторой силовской подгруппе группы G, и G/G_i действует неприводимо на G_i/G_{i+1}.

В частности, ввиду [4, теорема 1] G — группа с холловыми максимальными подгруппами.

Обратно, при $S \cong PSL_2(7)$ группа G, обладающая нормальным рядом, указанным в п. (ii) заключения теоремы 2, ввиду [4, теорема 1] является группой с холловыми максимальными подгруппами, в частности, минимальна относительно простого спектра.

Таким образом, выполняется п. (ii) заключения теоремы 2.

Лемма доказана.

Лемма 15. *Если $S \cong A_5$ или $S \cong PSL_3(3)$, то выполняется п.* (ii) *заключения теоремы* 2.

Доказательство. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Ввиду леммы 13 имеем $G/Z \cong S$ и $Z = S(G)$. Заметим, что для любого $p \in \pi(S)$ существует максимальная подгруппа Q группы S такая, что $\{p\} = \pi(S) \setminus \pi(Q)$. Поэтому $S(G)$ — холлова подгруппа в G. Применение леммы 9 завершает доказательство.

Обратное утверждение непосредственно следует из леммы 9 и минимальности относительно простого спектра группы S.

Лемма доказана.

Лемма 16. *Если $S \cong PSL_2(8)$, то выполняется п.* (iii) *заключения теоремы* 2.

Доказательство. Заметим, что $\pi(S) = \{2, 3, 7\}$. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Ввиду п. (2) леммы 4, если группа G содержит неабелев композиционный фактор R, не изоморфный S, то $|\pi(S) \setminus \pi(R)| \geq 2$. Из теоремы Фейта — Томпсона следует, что 3 и 7 не делят порядок $|R|$, отсюда и из п. (2) леммы 11 следует, что $R \in \{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod 3\}$.

Лемма доказана.

Лемма 17. *Если $S \cong PSL_2(17)$, то выполняется п.* (iv) *заключения теоремы* 2.

Доказательство. Заметим, что $\pi(S) = \{2, 3, 17\}$. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Ввиду п. (2) леммы 4, если группа G содержит неабелев композиционный фактор R, не изоморфный S, то $|\pi(S) \setminus \pi(R)| \geq 2$. Из теоремы Фейта — Томпсона следует, что 3 и 17 не делят порядок $|R|$, отсюда и из п. (2) леммы 11 следует, что $R \in \{Sz(2^w)\}$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 завершает следующая серия примеров. Для их построения нам понадобится вспомогательная информация о группах Судзуки. Группы $Sz(q)$ минимальны относительно простого спектра ввиду [16, следствие 5, табл. 10.7]. Все максимальные подгруппы группы $Sz(q)$, где $q = 2^w \geq 8$ и w нечетно, известны и приведены в таблице ниже (см., например, [10, табл. 8.16]), и $|Sz(q)| = q^2(q^2 + 1)(q - 1)$.

Структура подгруппы T	$\|T\|$	Примечания	$\|Sz(q) : T\|$
$[q^2].(q-1)$	$q^2(q-1)$	Параболическая	q^2+1
$D_{2(q-1)}$	$2(q-1)$		$q^2(q^2+1)/2$
$[q+(2q)^{1/2}+1].4$	$4(q+(2q)^{1/2}+1)$		$\dfrac{q^2(q^2+1)(q-1)}{4(q+(2q)^{1/2}+1)}$
$[q-(2q)^{1/2}+1].4$	$4(q-(2q)^{1/2}+1)$		$\dfrac{q^2(q^2+1)(q-1)}{4(q-(2q)^{1/2}+1)}$
${}^2B_2(q_0)$	$q_0^2(q_0-1)(q_0^2+1)$	$q = q_0^r, q_0 \geq 8,\ r$ простое	$\dfrac{q^2(q^2+1)(q-1)}{q_0^2(q_0^2+1)(q_0-1)}$

Лемма 18. *Пусть $S = PSL_2(8)$ и $R = Sz(2^w)$, где $1 < w \equiv \pm 1 \pmod 3$. Тогда группа $S \times R$ минимальна относительно простого спектра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $(2^i-1,7)=(2^i-1,2^3-1)=2^{(i,3)}-1$ и $(2^{2i}+1,7)$ делит $(2^{4i}-1,2^3-1)=2^{(4i,3)}-1$; таким образом, 7 не делит $|R|$ при $w\equiv\pm1 \pmod 3$. Значит, $\pi(R)\cap\pi(S)=\{2\}$. Легко понять, что индекс никакой собственной подгруппы из R и никакой собственной подгруппы из S не является степенью числа 2. Применение леммы 12 завершает доказательство.

Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть $S=PSL_2(17)$ и $R=Sz(2^w)$, где $w>1$. Тогда группа $S\times R$ минимальна относительно простого спектра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при нечетном i имеем: $(2^i-1,2^4+1)$ делит $(2^i-1,2^8-1)=2^{(i,8)}-1=1$ (т. е. $(2^i-1,2^4+1)=1$) и $(2^{2i}+1,17)$ делит $(2^{4i}-1,2^8-1)=2^{(4i,8)}-1=15$ (т. е. $(2^{2i}+1,17)=1$); таким образом, 17 не делит $|R|$ при любом w. Значит, $\pi(R)\cap\pi(S)=\{2\}$. Легко понять, что индекс никакой собственной подгруппы из R и никакой собственной подгруппы из S не является степенью числа 2. Применение леммы 12 завершает доказательство.

Лемма доказана.

Лемма 20. *Пусть m — натуральное число, $S\in\{PSL_2(8),PSL_2(17)\}$, $p_1,p_2,\ldots,p_m$ — простые числа, большие 3, и $R_i=Sz(2^{p_i})$ для $1\le i\le m$. Тогда группа $S\times R_1\times\ldots\times R_m$ минимальна относительно простого спектра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя алгоритм Евклида, легко показать, что выполняются следующие равенства:

$$(2^{p_i}-1,2^{p_j}-1)=2^{(p_i,p_j)}-1=1 \text{ и } (2^{2p_i}-1,2^{2p_j}-1)=2^{(2p_i,2p_j)}-1=2^2-1=3.$$

Кроме того, $(2^{2p_i}-1,2^{2p_j}+1)$ делит $(2^{2p_i}-1,2^{4p_j}-1)=2^{(2p_i,4p_j)}-1=2^2-1=3$, однако $2^{2p_j}+1\equiv 2 \pmod 3$, откуда $(2^{2p_i}-1,2^{2p_j}+1)=1$. Поэтому

$$\begin{aligned}(2^{2p_i}+1,2^{2p_j}+1)&=\frac{1}{3}\big((2^{2p_i}+1)(2^{2p_i}-1),(2^{2p_j}+1)(2^{2p_j}-1)\big)\\&=\frac{1}{3}\big((2^{4p_i}-1),(2^{4p_j}-1)\big)=\frac{1}{3}(2^{(4p_i,4p_j)}-1)=5.\end{aligned}$$

Таким образом, $\pi(R_i)\cap\pi(R_j)=\{2,5\}$ и $\pi(R_i)\cap\pi(S)=\{2\}$. Заметим, что $(2^{p_i}-1,2^{2p_i}+1)=1$, число 5 не делит $2^{p_i}-1$, при $p_i\ge 3$ число $2^{2p_i}+1$ не является степенью числа 5 ввиду леммы 7 и $(q+(2q)^{1/2}+1)(q-(2q)^{1/2}+1)=q^2+1$.

Теперь из таблицы легко видеть, что для любой максимальной подгруппы M_i группы R_i найдется простое число $p\in\pi(R_i)\setminus\{2,5\}$ такое, что p не делит порядок $|M_i|$. Применение леммы 12 завершает доказательство.

Лемма доказана.

Теорема 2 следует из [6, теорема 1] и лемм 14–20.

Автор выражает глубокую признательность А. С. Кондратьеву за полезные консультации, а также за замечания, позволившие улучшить первоначальный текст работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 310 с.
2. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2010. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/alglogf.html.
3. **Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.
4. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Конечные группы, в которых все максимальные подгруппы холловы // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.

5. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Порождаемость конечной группы с холловыми максимальными подгруппами парой сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 199–206.
6. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О неабелевых композиционных факторах конечной группы, минимальной относительно простого спектра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 155–166.
7. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. Atlas of finite group representations / Robert Wilson [et. al.]. URL: http://brauer.maths.gmul.ac.uk/Atlas/ .
10. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
11. **Gaschütz W.** Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden // Math. Z. 1954. Bd. 60, H. 3. S. 274–286.
12. **Gerono G. C.** Note sur la resolution en nombres entiers et positifs de l'equation $x^m = y^n - 1$ // Nouv. Ann. Math (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
13. **Gorenstein D.,** Finite simple groups. An introduction to their classification. N. Y.: Plenum Publ. Corp., 1982. 334 p.
14. **Herzog M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10, no. 3. P. 383–388.
15. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
16. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** Transitive subgroups of primitive permutation groups // J. Algebra. 2000. Vol. 234, no. 2. P. 291–361.
17. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P. 383–437.

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
старший научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Поступила 14.04.2015