ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.556

ПОЛУКОЛЬЦА, БЛИЗКИЕ К РЕГУЛЯРНЫМ, И ИХ ПИРСОВСКИЕ СЛОИ[1]

Р. В. Марков, В. В. Чермных

В работе исследуются пирсовские слои полуколец и свойства, поднимаемые со слоев до исходного полукольца. Объектами исследования являются полукольца с нетривиальной алгеброй идемпотентов, а именно, бирегулярные и риккартовы полукольца с дополнительными условиями. Получены характеризации таких полуколец в терминах свойств их пирсовских слоев и пирсовских пучков.

Ключевые слова: риккартово полукольцо, бирегулярное полукольцо, пирсовский слой, пирсовский пучок полукольца.

R. V. Markov, V. V. Chermnykh. Semirings close to regular and their Pierce stalks.

We investigate Pierce stalks of semirings and the properties of semirings that grow from properties of the stalks. Objects of study are semirings with nontrivial algebra of idempotents, namely, biregular and Rickart semirings with additional conditions. We obtain characterizations of such semirings in terms of the properties of their Pierce stalks and Pierce sheaves.

Keywords: Rickart semiring, biregular semiring, Pierce stalk, Pierce sheaf of semiring.

Р. С. Пирсом [1] для произвольного кольца R с 1 был построен пучок колец на нульмерном компакте $Max\ BR$ со слоями R/MR, где M — максимальный идеал булева кольца BR центральных идемпотентов из R. Им же было показано, что произвольное кольцо R с 1 изоморфно кольцу всех глобальных сечений своего пирсовского пучка. Нетривиальный пирсовский пучок существует для колец с богатой алгеброй центральных идемпотентов, и поэтому пирсовские пучки применялись при исследовании регулярных, бирегулярных, заменяемых, чистых колец [1–6]. Беджесс и Стефенсон построили и успешно применяли конструкцию пирсовской цепи идеалов кольца [7; 8]. Поскольку кольцо есть подпрямое произведение своих пирсовских слоев, важной является задача нахождения связей между кольцом и его пирсовскими слоями. В нашей работе решается такая задача для полуколец.

Отметим, что аналоги пирсовских пучков колец были получены и для некоторых других алгебраических систем: ограниченных дистрибутивных решеток, почти-колец, решеточно упорядоченных колец и решеточно упорядоченных абелевых групп, универсальных алгебр [9–12]. Для полуколец конструкция, обобщающая пирсовский пучок колец, была рассмотрена В. В. Чермных [13].

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество S с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется *полукольцом*, если выполняются следующие аксиомы:

(1) $(S,\ +)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;

(2) $(S,\ \cdot)$ — полугруппа с нейтральным элементом 1;

(3) умножение дистрибутивно относительно сложения:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc$$

для любых $a,\ b,\ c \in S$;

(4) $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Полукольцо S называется *коммутативным в нуле* (*симметрическим в нуле*), если $ab = 0$ влечет $ba = 0$ ($abc = 0$ влечет $acb = 0$).

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки (проект 1.1375.2014/K).

Левый аннулятор $ann_l(B) = \{s \in S\colon sB = 0\}$ множества $B \subseteq S$ является левым идеалом полукольца S; левый (правый) аннулятор элемента $a \in S$ обозначим через $ann_l(a)$ ($ann_r(a)$).

Полукольцо, в котором $a^n = 0$ при любом натуральном n влечет $a = 0$, назовем *полукольцом без нильпотентных элементов.*

Лемма 1. *Для полукольца без нильпотентных элементов S справедливы утверждения:*
(1) *S — коммутативное в нуле полукольцо;*
(2) *$ab = 0$ влечет $asb = 0$ для любого $s \in S$;*
(3) *S — симметрическое в нуле полукольцо;*
(4) *$ann_l(a) = ann_r(a)$ для любого $a \in S$;*
(5) *для любого подмножества $B \subseteq S$ множество $ann_l(B) = ann_r(B) = ann_l(SBS) = ann_r(SBS) = \{s \in S\colon SBS \cap SsS = 0\}$ является идеалом.*

Доказательство. (1) $ab = 0$ влечет $(ba)^2 = 0$, отсюда $ba = 0$.
(2) Если $ab = 0$, то из (1) следует $(asb)^2 = 0$, и тогда $asb = 0$.
(3) Если $abc = 0$, то, применив (2), получаем $acbacb = 0$, отсюда следует $acb = 0$.
(4) следует из (1).
(5) Пусть SBS — идеал, порожденный множеством B, состоящий из всех конечных сумм элементов вида sbt для произвольных $s, t \in S, b \in B$. Положим $D = \{d \in S\colon SBS \cap SdS = 0\}$. Для любого $d \in D$ выполняется $dB \subseteq SBS \cap SdS = 0$, поэтому $D \subseteq ann_l(B)$. Аналогично $D \subseteq Ann_r(B)$. По свойствам (1) и (2) $ann_l(B) = ann_r(B) \subseteq ann_l(SBS)$. Очевидно, $ann_l(SBS) \subseteq ann_l(B)$. Если $a \in ann_l(SBS)$, то $(SaS \cap SBS)^2 = 0$ и поэтому $SaS \cap SBS = 0$. Получили $ann_l(SBS) \subseteq D$. Очевидно, D — идеал. □

Мультипликативно идемпотентный элемент $e = e^2$ полукольца S договоримся называть *идемпотентом.* Элемент e полукольца S называется *центральным*, если $es = se$ для любого $s \in S$; *дополняемым*, если существует такой $e^\perp \in S$, что $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = e^\perp e = 0$. Заметим, что дополнение к произвольному центральному элементу является центральным дополняемым идемпотентом и определяется однозначно. Обозначим через BS множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S. Непосредственно проверяется, что $(BS, \oplus, \cdot)$ с операцией сложения $e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f$ и полукольцевым умножением образует булево кольцо. Обозначим через $Max\ BS$ пространство всех максимальных идеалов BS, наделенное стоуновской топологией. Напомним, что $Max\ BS$ является нульмерным компактом с базой открыто-замкнутых множеств вида $D(e) = \{M \in Max\ BS\colon e \notin M\}$.

Элемент $d \in S$ называется *левым* (*правым*) *уравнителем* элементов $a, b \in S$, если $da = db$ ($ad = bd$). Множество всех левых (правых) уравнителей элементов a, b обозначим через $l(a, b)$ ($r(a, b)$). Множество $(a, b)^* = l(a, b) \cap r(a, b)$ всех элементов полукольца, являющихся одновременно и правыми, и левыми уравнителями, есть идеал. Назовем полукольцо S *полукольцом без уравнителей*, если для любой пары различных элементов $a, b \in S$ выполняется $l(a, b) = r(a, b) = 0$.

Введенные определения являются естественными полукольцевыми аналогами понятий делителя нуля и области. Нам потребуются (идейно) похожие обобщения коммутативности и симметричности в нуле.

Полукольцо S называется *симметрическим* (*слабо симметрическим*), если для любых $a, b, c, d \in S$ выполняется $abc = abd \Leftrightarrow acb = adb$ ($bc = bd \Leftrightarrow cb = db$).

Очевидно, слабо симметрическое полукольцо является симметрическим, обратное не верно. Симметрическим полукольцом будет, помимо коммутативного, *редуцированное полукольцо*, задаваемое импликацией $a^2 + b^2 = ab + ba \Rightarrow a = b$. Редуцированное полукольцо является полукольцом без нильпотентов.

Лемма 2. *Пусть S — слабо симметрическое полукольцо.*
(1) *$l(a, b) = r(a, b)$ для любых $a, b \in S$.*
(2) *Любой идемпотент из S централен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно. □

О п р е д е л е н и е 2. Полукольцо S назовем *риккартовым справа*, если для любого $a \in S$ найдется такой дополняемый идемпотент e, что $ann_r(a) = eS$; полукольцо, являющееся риккартовым справа и слева, назовем *риккартовым*. Слабо симметрическое полукольцо S назовем *строго риккартовым*, если для любых $a, b \in S$ идеал $(a, b)^*$ порождается центральным дополняемым идемпотентом.

Предложение 1. *Для полукольца S равносильны условия*:

(1) *S — риккартово справа или слева полукольцо, и каждый дополняемый идемпотент централен*;

(2) *S — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов*;

(3) *S — риккартово полукольцо без нильпотентных элементов*;

(4) *каждый элемент в S является произведением центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля*;

(5) *S — полукольцо без нильпотентных элементов, и для любого конечно порожденного идеала из S существует такой центральный дополняемый идемпотент $e \in S$, что $ann_l(B) = ann_r(B) = Se = eS$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть f — дополняемый идемпотент из S с дополнением $f^{\perp}$. Тогда $ann_r(f^{\perp})$ содержит элемент fs для любого $s \in S$. Поскольку S — полукольцо без нильпотентных элементов, то по утверждению (4) леммы 1 $fs \in ann_l(f^{\perp})$, поэтому $fsf^{\perp} = 0$. Получаем $fsf = fsf + fsf^{\perp} = fs(f + f^{\perp}) = fs$. Таким же образом доказывается, что $sf = fsf$ и f — центральный дополняемый идемпотент.

(1) $\Rightarrow$ (4). Пусть S — риккартово справа полукольцо, каждый дополняемый идемпотент которого централен. Покажем, что S — полукольцо без нильпотентных элементов. Действительно, пусть $s^2 = 0$ для некоторого $s \in S$. Тогда $ann_r(s) = fS$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента f. Получаем $s \in ann_r(s) = fS$, поэтому $s = fs = sf = 0$. Пусть теперь a — произвольный элемент из S. По утверждению (4) леммы 1 $ann_l(a) = ann_r(a) = Se = eS$ для подходящего дополняемого идемпотента $e \in S$, и S риккартово слева. Положим $d = e^{\perp}a+e$. Тогда $e^{\perp}d = e^{\perp}a = e^{\perp}a + ea = a$. Покажем, что d — неделитель нуля. Пусть $b \in ann_l(d)$, тогда $0 = bd = be^{\perp}a + be$, отсюда $0 = e(be^{\perp}a + be) = be$ и $be^{\perp}a = 0$. Поскольку $ann_r(a) = eS$, то $ae = 0$ и $ae^{\perp} = a$. Получаем $ba = bae^{\perp} = 0$, следовательно, $b \in ann_l(a) = Se$. Для некоторого $s \in S$ имеем $b = se = be = 0$. Получили, что $ann_l(d) = 0$. Так же доказывается, что $ann_r(d) = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $a = ed$ — ненулевой элемент из S для некоторых $e = e^2$ и неделителя нуля d, и пусть $b \in ann_l(a)$. Тогда $b = bed = 0$, отсюда $be = 0$. Получаем $b = be + be^{\perp} = be^{\perp} \in Se^{\perp}$. Обратное включение $Se^{\perp} \subseteq ann_l(a)$ очевидно, и S риккартово слева. Правая риккартовость доказывается аналогично. Покажем, что S — полукольцо без нильпотентных элементов. Допустим, что $a^n = 0$, тогда $0 = a^n = e^n d^n$ и $0 = e^n d^{n-1} = a^{n-1}$. По индукции получаем $a = 0$.

(5) $\Rightarrow$ (3) следует из утверждения (5) леммы 1, если в качестве B взять главный идеал.

(1) $\wedge$ (3) $\Rightarrow$ (5). Пусть $B = \sum_{i=1}^{n} Sb_iS$ — конечно порожденный идеал и e_i — такие центральные дополняемые идемпотенты, что $ann_r(b_i) = e_iS$ для любых $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим центральный дополняемый идемпотент $e = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$. Заметим, что по утверждению (3) леммы 1 условие $a \in ann_r(B)$ равносильно $b_ia = 0$ для каждого $i = 1, \ldots, n$, а это равносильно $a \in \cap_{i=1}^{n} ann_r(b_i) = \cap_{i=1}^{n} e_iS$. Включение $eS \subseteq \cap_{i=1}^{n} e_iS$ очевидно, покажем обратное включение. Если $x \in \cap_{i=1}^{n} e_iS$, то $x = e_is_i = e_i^2 s_i = e_ix$ и e_i являются локальными единицами для элемента x. Также локальной единицей для x будет их произведение, поэтому $x = ex$ и $\cap_{i=1}^{n} e_iS \subseteq eS$. Получили $ann_r(B) = eS$. По лемме 1 $ann_l(B) = ann_r(B)$. □

Пусть $e,\ f$ — различные элементы булева кольца R. Ясно, что из этой пары мы можем выбрать элемент f, допустим, таким образом, что f ненулевой, и мультипликативно замкнутое множество $\{1,\ f\}$ не содержит e. Тогда идеал M, максимальный среди содержащих e и не пересекающихся с $\{1,\ f\}$, является простым. Известно, что простой идеал булева кольца является максимальным. Получили, что различные элементы булева кольца *разделяются некоторым максимальным идеалом.*

Рассмотрим произвольный элемент a риккартова полукольца S без нильпотентных элементов. По предложению 1 a есть произведение центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля. Предположим, что $e,\ f$ — различные центральные дополняемые идемпотенты из S и $a = ed_1 = fd_2$ для некоторых неделителей нуля $d_1,\ d_2$. Идемпотенты e и f разделяются некоторым идеалом $M \in Max\ BS$, пусть $e \in M,\ f \notin M$. Тогда $0 = e^{\perp}ed_1 = e^{\perp}fd_2$, и $e^{\perp}f \notin M$ в силу простоты максимального идеала. Получили, что d_2 — делитель нуля, противоречие. Таким образом, с каждым элементом a риккартова полукольца S без нильпотентных элементов однозначно связан центральный дополняемый идемпотент e_a и выполняется равенство $a = e_a d$ для некоторого неделителя нуля d. Понятно, что в общем случае d определяется не однозначно.

Для исследования риккартовых и строго риккартовых полуколец нам потребуется конструкция пирсовского пучка полуколец. С терминологией и методами пучковых представлений можно познакомиться в [14; 16] и в иных статьях, указанных в списке литературы.

Пусть S — произвольное полукольцо, M — максимальный идеал булева кольца BS центральных дополняемых идемпотентов. Стандартно проверяется, что отношение

$$a \equiv b(\rho_M) \Leftrightarrow ae^{\perp} = be^{\perp} \text{ для некоторого } e \in M$$

является конгруэнцией на полукольце S; назовем ρ_M *пирсовской* конгруэнцией. Ядром, или классом нуля, пирсовской конгруэнции является идеал $\overline{M} = MS$. Факторполукольцо S/ρ_M по пирсовской конгруэнции называется *пирсовским слоем* полукольца S. Эта терминология идет от конструкции пучка колец с единицей, построенного Р. С. Пирсом [1]. Там же было дано изоморфное представление произвольного кольца с единицей сечениями пирсовского пучка. В дальнейшем пирсовское представление колец было обобщено на полукольца с единицей.

О п р е д е л е н и е 3. Пучок полуколец $(P(S),\ Max\ BS)$ называется *пирсовским пучком полукольца* S, если базисное пространство — максимальный спектр булева кольца центральных дополняемых идемпотентов из S, а накрывающее пространство — дизъюнктное объединение всех пирсовских слоев полукольца S.

Следующее предложение устанавливает связь между произвольным полукольцом с единицей и его пирсовским пучком.

Предложение 2 [13; 14]. *Произвольное полукольцо S с единицей изоморфно полукольцу всех глобальных сечений своего пирсовского пучка $(P(S),\ Max\ BS)$.*

Сейчас мы приступим к характеризации полуколец свойствами, связанными со свойствами пирсовских пучков, в частности их пирсовских слоев. Перед этим укажем используемые базовые свойства пучковых конструкций.

Глобальное (т. е. определенное на всем базисном пространстве) сечение пирсовского пучка $(P(S),\ Max\ BS)$ по предложению 2 задается некоторым однозначно определенным элементом $a \in S$ и обозначается через $\hat{a}$. В каждом пирсовском слое S/ρ_M сечение $\hat{a}$ принимает значение $\hat{a}(M) = h_M(a)$ — образ элемента a при естественном эпиморфизме $h_M\colon S \to S/\rho_M$. Часто используется такое свойство: множество, на котором совпадают два сечения пучка, открыто. В частности, открытым является *нуль-множество* $z(\hat{a}) = \{M \in Max\ BS\colon \hat{a}(M) = \hat{0}(M)\}$ любого сечения. Понятно, что *носитель* $supp\ \hat{a} = Max\ BS \setminus z(\hat{a})$ произвольного сечения $\hat{a}$ будет замкнут. Отметим еще одно свойство, используемое ниже. Если U — открыто-замкнутое подмножество базисного пространства пучка, то отображение $\chi_U\colon Max\ BS \to P(S)$, равное единичному сечению на U и нулевому на его дополнении, является глобальным сечением пучка и носит название *характеристического* сечения.

Предложение 3. *Для полукольца S равносильны следующие условия*:
(1) *S — полукольцо без нильпотентных элементов*;
(2) *все пирсовские слои полукольца S — полукольца без нильпотентных элементов.*

Доказательство. Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть S — полукольцо без нильпотентных элементов. Предположим, что некоторый пирсовский слой S/ρ_M содержит ненулевой нильпотентный элемент, т. е. для некоторого $a \in S$ выполняются $\hat{a}(M) \neq \hat{0}(M)$ и $\hat{a}^n(M) = \hat{0}(M)$ для подходящего натурального n. Поскольку $a \neq 0$, то $a^n \neq 0$ по предложению 2. Пусть $z(\hat{a}^n)$ — нуль-множество сечения $\hat{a}^n$. По свойствам пучка нуль-множество $z(\hat{a}^n)$ открыто, кроме того, $M \in z(\hat{a}^n)$, поэтому в силу нульмерности $Max\ BS$ найдется открыто-замкнутое подмножество $U \subseteq Max\ BS$, содержащее точку M. Пусть χ_U — характеристическое сечение множества U. Глобальное сечение

$$\varphi = \hat{a} \cdot \chi_U = \begin{cases} \hat{a} \text{ на } U \\ \hat{0} \text{ на } Max\ BS \setminus U \end{cases}$$

является ненулевым нильпотентным элементом полукольца всех глобальных сечений. По предложению 2 полукольцо глобальных сечений изоморфно S, поэтому и в S нашелся ненулевой нильпотентный элемент; противоречие показывает, что пирсовские слои — полукольца без нильпотентных элементов.

Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть все пирсовские слои полукольца S — полукольца без нильпотентов. Предположим, что в S есть нильпотент $a \neq 0$ такой, что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда в некотором пирсовском слое S/ρ_M выполняется $\hat{a}(M) \neq \hat{0}(M)$ и $\hat{a}^n(M) = \hat{0}(M)$. □

Определение 4. Пучок $(P,\ S)$ называется *хаусдорфовым*, если накрывающее пространство P является хаусдорфовым пространством; *полухаусдорфовым*, если любые две различные точки из P, одна из которых принадлежит образу нулевого сечения, имеют непересекающиеся открытые окрестности.

Характеризация хаусдорфовых пучков хорошо известна (см., например, [15, с. 14]); естественным образом получается аналог для полухаусдорфова пучка [14, лемма 5.2.4].

Лемма 3. *Справедливы утверждения*:
(1) $(P,\ X)$ *хаусдорфов* $\Leftrightarrow$ *X — хаусдорфово пространство, и множество, на котором совпадают два произвольных сечения пучка P, открыто-замкнуто*;
(2) $(P,\ X)$ *полухаусдорфов* $\Leftrightarrow$ *X — хаусдорфово пространство, и нуль-множество произвольного сечения пучка P открыто-замкнуто.*

Теорема 1. *Для полукольца S равносильны условия*:
(1) *S строго риккартово*;
(2) *пирсовский пучок полукольца S хаусдорфов, и все его слои являются слабо симметрическими полукольцами без уравнителей.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\hat{a}(M)\hat{s}(M) = \hat{b}(M)\hat{s}(M)$ для произвольных $a, b, s \in S$ и $M \in Max\ BS$. Допустим, что $\hat{s}(M) \neq \hat{0}(M)$. Сечения $\widehat{as}$ и $\widehat{bs}$ совпадают на некоторой открыто-замкнутой окрестности U точки M в силу нульмерности $Max\ BS$. Рассмотрим характеристическое сечение χ_U, и пусть $\hat{e} = \chi_U$ для некоторого $e \in BS$. Очевидно, выполняются соотношения

$$ase = bse \text{ и } aes = bes.$$

Пусть f — центральный дополняемый идемпотент, порождающий $(ae, be)^*$. В силу слабой симметричности $s \in (ae, be)^*$, поэтому $s = sf$. Заметим, что $\hat{f}$ в каждом слое принимает либо нулевое, либо единичное значение и так как $\hat{0}(M) \neq \hat{s}(M) = \hat{s}(M)\hat{f}(M)$, то $\hat{f}(M) = \hat{1}(M)$. Учитывая, что $f \in (ae, be)^*$, получаем

$$\hat{a}(M) = \hat{a}(M)\hat{e}(M)\hat{f}(M) = \hat{b}(M)\hat{e}(M)\hat{f}(M) = \hat{b}(M),$$

и слой в точке M — полукольцо без уравнителей.

Покажем хаусдорфовость пирсовского пучка строго риккартова полукольца S. Пусть V — множество всех точек из $Max\ BS$, в которых совпадают сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$ для произвольных $a, b \in S$, и пусть $g \in BS$ порождает $(a,b)^*$. В силу отсутствия уравнителей в пирсовских слоях пучка для любого $d \in (a,b)^*$ носитель $supp\ \hat{d}$ лежит в V, в частности $supp\ \hat{g} \subseteq V$. Рассмотрим произвольную точку $M \in V$. Изоморфность пирсовского представления позволяет отождествить сечения пучка с соответствующими элементами полукольца S. Поэтому найдется элемент $g_M \in BS \setminus M$ такой, что $ag_M = bg_M$. Поскольку $g_M \in (a,b)^*$, то $M \in supp\ \hat{g}_M \subseteq supp\ \hat{g}$, следовательно, $U \subseteq supp\ \hat{g}$. Получили, что $U = supp\ \hat{g}$ — открыто-замкнутое множество и по лемме 3 пучок хаусдорфов.

Осталось показать, что произвольный пирсовский слой полукольца S является слабо симметрическим полукольцом. Пусть $\hat{a}(M)\hat{s}(M) = \hat{b}(M)\hat{s}(M)$. Найдется открыто-замкнутая окрестность U точки M, на которой совпадают сечения $\widehat{as}$ и $\widehat{bs}$. Пусть χ_U — характеристическое сечение, e — соответствующий этому сечению элемент из S. Тогда $\hat{a}\hat{s}\hat{e} = \hat{b}\hat{s}\hat{e}$, откуда $ase = bse$. Полукольцо S слабо симметрическое, поэтому $sea = seb$. Наконец, учитывая, что $\hat{a}(M) = \hat{1}(M)$, получаем $\hat{s}(M)\hat{a}(M) = \hat{s}(M)\hat{b}(M)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть пирсовский пучок полукольца S хаусдорфов. По лемме 3 для любых $a, b \in S$ множество U, на котором совпадают сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$ хаусдорфова пучка, открыто-замкнуто. Рассмотрим характеристическое сечение χ_U, равное единичному сечению на U. Пусть $f \in SB$ — соответствующий центральный дополняемый идемпотент $f \in S$. Очевидно, $f \in (a,b)^*$. Для произвольного элемента $r \in (a,b)^*$ получаем $\hat{a}\hat{r} = \hat{b}\hat{r}$. Если $\hat{a}(M) \neq \hat{b}(M)$ в некоторой точке $M \in Max\ BS$, то $\hat{r}(M) = \hat{0}(M)$, так как слои являются полукольцами без уравнителей. Получаем, что носитель $supp\ \hat{r}$ лежит в U. Поэтому $r = fr$ и центральный дополняемый идемпотент f порождает идеал $(a,b)^*$. □

Следствие. *Пусть S — строго риккартово полукольцо. Тогда*

1) *элемент $d \in S$ в точности является неуравнителем, если сечение $\hat{d}$ в каждом пирсовском слое полукольца S принимает ненулевое значение*;

2) *множества уравнителей и делителей нуля полукольца S совпадают*;

3) *произвольный элемент S есть произведение центрального дополняемого идемпотента и неуравнителя*;

4) *S является риккартовым полукольцом без нильпотентных элементов; обратное не верно.*

Доказательство. 1) По теореме 1 пирсовский пучок полукольца S хаусдорфов, а его слои — полукольца без уравнителей. Пусть $ad = bd$ для различных $a, b \in S$. Тогда хотя бы в одном слое сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$ принимают различные значения, и $\hat{d}$ в этом слое обязано равняться нулю. Обратно, пусть $z(\hat{d})$ непусто и $\hat{e}$ — характеристическое сечение, совпадающее с единичным на $z(\hat{d})$. Тогда $ed = 0$ и элемент d является делителем нуля, поэтому — уравнителем.

Утверждение 2) следует из того, что каждый неделитель нуля, как и неуравнитель, в любом пирсовском слое отличен от нуля.

3) Пусть a — произвольный элемент полукольца S. Нуль-множество $z(\hat{a})$ открыто-замкнуто, поэтому рассмотрим глобальные сечения

$$\hat{e} = \begin{cases} \hat{0} \text{ на } z(\hat{a}) \\ \hat{1} \text{ на } Max\ BS \setminus z(\hat{a}) \end{cases} \quad \text{и} \quad \hat{d} = \begin{cases} \hat{1} \text{ на } z(\hat{a}) \\ \hat{a} \text{ на } Max\ BS \setminus z(\hat{a}). \end{cases}$$

Легко проверить, что $\hat{a} = \hat{e}\hat{d}$, сечение $\hat{d}$ отлично от нуля в каждом слое, а $\hat{e}$ — центральный дополняемый идемпотент. Получили, что $a = ed$ для $e \in BS$ и неуравнителя d.

4) Первое утверждение следует из 2), 3) и предложения 1. Рассмотрим $L = \{0, a, 1\}$ — трехэлементную цепь. Понятно, что L является риккартовым полукольцом без нильпотентных элементов. Идеал $(a,1)^* = \{0, a\}$ не порождается центральным дополняемым идемпотентом, поэтому L не будет строго риккартовым. □

Предложение 4. *Для полукольца S равносильны условия*:

(1) S — *риккартово полукольцо без нильпотентов*;

(2) *пирсовский пучок полукольца S полухаусдорфов, и все его слои являются полукольцами без делителей нуля*;

(3) *все пирсовские слои полукольца S — полукольца без делителей нуля, и для любого $a \in S$ подмножество $D(ann_l(a) \cap BS)$ открыто-замкнуто в $Max\ BS$.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (1) получаются из доказательства теоремы 1, если положить $b = 0$. Отметим, что отсутствие нильпотентных элементов в S следует из предложения 3, поскольку пирсовские слои являются полукольцами без делителей нуля и, следовательно, без нильпотентных элементов. □

Равносильность (2) $\Leftrightarrow$ (3) вытекает из леммы 3 и следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть пирсовские слои полукольца S — полукольца без делителей нуля. Тогда для любого элемента $a \in S$ выполняется равенство $z(\hat{a}) = D(ann_l(a) \cap BS)$.*

Доказательство. Обозначим $A = ann_l(a) \cap BS$. Пусть $M \in D(A)$, тогда найдется такой $f \in BS \setminus M$, что $fa = 0$. Поскольку $\hat{f}(M) = \hat{1}(M)$, то $\hat{a}(M) = \hat{0}(M)$. Поэтому $M \in z(\hat{a})$ и $D(A) \subseteq z(\hat{a})$. Обратно, пусть $M \in z(\hat{a})$. В силу нульмерности $Max\ BS$ существует открыто-замкнутая окрестность U точки M, на которой $\hat{a}$ равно нулю. Пусть $\hat{f}$ — характеристическое сечение множества U. Получаем, что $\hat{f}(M) = \hat{1}(M), f \in BS \setminus M$ и $fa = 0$. Следовательно, $M \in D(A)$ и, окончательно, $D(A) = z(\hat{a})$. □

Определение 5. Полукольцо S называется *бирегулярным*, если каждый главный идеал из S порождается центральным дополняемым идемпотентом.

Напомним, что полукольцо S называется *простым*, если нулевой идеал является наибольшим собственным идеалом в S. Характеризация бирегулярных колец в терминах слоев была получена еще в пионерской работе Р. С. Пирса [1, p. 45]. При доказательстве существенно использовались топологические свойства сечений и пучка. С чисто алгебраическим доказательством этого результата авторы познакомились в монографии А. А. Туганбаева [2, 13.31]. Сейчас мы получим обобщение результата для бирегулярных полуколец; доказательство основано на свойствах решетки регулярных идеалов полукольца.

Определение 6. Идеал, порождаемый центральными дополняемыми идемпотентами, назовем *регулярным.*

Для каждого регулярного идеала A полукольца S отношение

$$a \equiv b(\rho_A) \Leftrightarrow ae^{\perp} = be^{\perp} \text{ для некоторого } e \in A \cap Max\ BS$$

является конгруэнцией на полукольце S; назовем ρ_A *A-регулярной* конгруэнцией. Легко видеть, что ρ_M — пирсовская конгруэнция на полукольце S — это в точности M-регулярная конгруэнция для максимального собственного регулярного идеала M.

Теорема 2. *Полукольцо S бирегулярно тогда и только тогда, когда все пирсовские слои полукольца S — простые полукольца.*

Доказательство. Пусть $h\colon S \to S/\rho_M$ — естественный эпиморфизм на пирсовский слой бирегулярного полукольца S. Заметим, что для произвольного $m \in M$ найдется такой центральный дополняемый идемпотент f, что $m = fs$ для некоторого $s \in S$. Тогда $mf^{\perp} = 0$, $m \equiv 0(\rho_M)$, следовательно, $h(M) = h(0)$. Покажем, что ненулевой элемент пирсовского слоя S/ρ_M порождает весь слой. Пусть $h(a) \neq h(0)$, $a \in S$, и A — идеал полукольца S, порожденный элементом a. Полукольцо S бирегулярно, поэтому $A = eS$ для некоторого $e \in BS$, а $h(A)$ порождается элементом $h(a)$. Понятно, что e не лежит в M, поэтому $M + A = S$. Тогда $h(A) = h(M) + h(A) = h(S)$, и пирсовский слой S/ρ_M — простое полукольцо.

Обратно, пусть пирсовские слои полукольца S — простые полукольца. Предположим, что S не бирегулярно. Тогда найдется главный идеал $A = SaS$, не порождаемый центральным дополняемым идемпотентом. Рассмотрим множество E таких собственных регулярных идеалов B, что естественный образ идеала A в полукольце S/ρ_B (ρ_B — B-регулярная конгруэнция) не порождается образом центрального дополняемого идемпотента из S. Ясно, что нулевой идеал принадлежит E. Покажем, что объединение любой возрастающей цепи идеалов $\{P_i\}$ из E принадлежит множеству E. Идеал $P = \cup P_i$ является собственным регулярным идеалом, через h и h_i обозначим естественные гомоморфизмы в S/ρ_P и S/ρ_{P_i} соответственно. Допустим, что $h(A)$ порождается центральным дополняемым идемпотентом $h(e)$, где $e \in BS$. Тогда $h(e) = h(s_1)h(a)h(t_1)+\ldots+h(s_k)h(a)h(t_k)$ и $h(a) = h(e)h(s)$ для подходящих $s,\ s_i,\ t_i \in S$. Получаем $e \equiv \sum_{i=1}^k s_i a t_i (\rho_P)$ и $a \equiv es(\rho_P)$, отсюда $ef^{\perp} = (\sum_{i=1}^k s_i a t_i) f^{\perp}$ и $ag^{\perp} = esg^{\perp}$ для некоторых $f,\ g \in P \cap BS$. Существует такой $P_j \in \{P_i\}$, что $f,\ g \in P_j$, поэтому $h_j(e) = h_j(\sum_{i=1}^k s_i a t_i)$ и $h_j(a) = h_j(e)h_j(s)$, поскольку $h_j(f^{\perp}) = h_j(g^{\perp}) = h_j(1)$. Отсюда вытекает, что $h_j(A)$ порождается $h_j(e)$, противоречие. По лемме Цорна множество E содержит максимальный элемент M. Рассмотрим два случая, когда M — максимальный собственный регулярный идеал полукольца S и когда M — собственный идеал, не являющийся максимальным.

П е р в ы й   с л у ч а й. Тогда S/ρ_M — пирсовский слой, $h_M(A)$ — ненулевой идеал в простом полукольце S/ρ_M, поэтому $h_M(A) = h_M(S)$. Получили, что $h_M(A)$ порождается $h_M(1)$, противоречие.

В т о р о й   с л у ч а й. Если M не является максимальным регулярным идеалом, то несложно показать, что найдется такой центральный дополняемый идемпотент e, что $M_1 = M + eS$ и $M + e^{\perp}S$ — собственные регулярные идеалы, строго содержащие M. Обозначим через $h\colon S \to S/\rho_M$ и $h_1\colon S \to S/\rho_{M_1}$ естественные гомоморфизмы. Поскольку $M_1 \notin E$, то $h_1(A)$ порождается $h_1(f)$ для некоторого $f \in BS$. Пусть $x \in A$, тогда $x \equiv fs(\rho_{M_1})$. Существует такой центральный дополняемый идемпотент v из M_1, что $xv^{\perp} = fsv^{\perp}$. Отсюда получаем

$$xv^{\perp} + xv + fsv = fsv^{\perp} + xv + fsv, \quad x + fsv = fs + xv.$$

Элементы $fsv,\ xv$ лежат в M_1, поэтому $fsv = m_1 + es_1,\ xv = m_2 + es_2$ для некоторых $m_1,\ m_2 \in M,\ s_1,\ s_2 \in S$. Из $x+m_1+es_1 = fs+m_2+es_2$ получаем $h(x)+h(es_1) = h(fs)+h(es_2)$, отсюда $h(xe^{\perp}) = h(e^{\perp}fs)$. Подобные рассуждения для идеала $M + e^{\perp}S$ приводят к равенству $h(xe) = h(egt)$ для некоторых $g \in BS$ и $t \in S$. Тогда $h(x) = h(xe^{\perp}) + h(xe) = h(e^{\perp}fs + egt)$. Непосредственно проверяется, что $w = e^{\perp}f + eg$ является центральным дополняемым идемпотентом (с дополнением $w^{\perp} = e^{\perp}f^{\perp} + eg^{\perp}$). Кроме того, $e^{\perp}f = e^{\perp}w$ и $eg = ew$, поэтому $h(x) = h(e^{\perp}fs + egt) = h(e^{\perp}ws + ewt) \in h(w)h(S)$ и $h(A) \subseteq h(w)h(S)$. Осталось показать, что $h(w) \in h(A)$. Имеем $f \equiv u(\rho_{M_1})$ для некоторого элемента $u \in A$. Тогда $ft^{\perp} = ut^{\perp}$ для подходящего $t = m + es \in (M + eS) \cap BS$. Получаем $f = ut^{\perp} + ft = ut^{\perp} + f(m + es)$, отсюда $e^{\perp}f = e^{\perp}ut^{\perp} + e^{\perp}fm$ и $h(e^{\perp}f) = h(e^{\perp}t^{\perp}u) \in h(A)$. Аналогично доказывается, что $h(eg) \in h(A)$, отсюда $h(w) = h(e^{\perp}f)+h(eg) \in h(A)$. Следовательно, $h(A)$ порождается образом центрального дополняемого идемпотента $h(w)$, противоречие. □

Теорема 3. *Для полукольца S равносильны условия:*

(1) *S — бирегулярное полукольцо без нильпотентных элементов*;

(2) *все пирсовские слои полукольца S — простые полукольца без делителей нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 3 и теоремы 2.

(1) $\Rightarrow$ (2). Достаточно показать, что в простом полукольце без нильпотентных элементов нет делителей нуля, и воспользоваться предложением 3 и теоремой 2. Пусть $a,\ b \neq 0$, $ab = 0$. Тогда $a \in ann_l(b)$ и по утверждению (5) леммы 1 $ann_l(b)$ является ненулевым идеалом. Полукольцо S простое, поэтому $ann_l(b) = S$, отсюда $1 \in ann_l(b)$ и $b = 1b = 0$, противоречие. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pierce R.S.** Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 70. P. 1–112.
2. **Туганбаев А.А.** Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.
3. **Тюкавкин Д.В.** Пирсовские пучки для колец с инволюцией. М.: Изд-во МГУ, 1982. Деп. ВИНИТИ № 4346-82. 64 с.
4. **Carson A.B.** Representation of regular rinds of finite index // J. Algebra. 1976. Vol. 39, no. 2. P. 512–526.
5. **Dauns J., Hofmann K.H.** The representation of biregular rings by sheaves // Math. Z. 1966. Vol. 91, no. 2. P. 103–123.
6. **Burgess W.D., Stephenson W.** Rings all of whose Pierce stalks are local // Canad. Math. Bull. Vol. 22, no. 2. 1979. P. 159–164.
7. **Burgess W.D., Stephenson W.** Pierce sheaves of non–commutative rings // Comm. Algebra. 1976. Vol. 39. P. 512–526.
8. **Burgess W.D., Stephenson W.** An analogue of the Pierce sheaf for non–commutative rings // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6, no. 9. P. 863–886.
9. **Cignoli R.** The lattice of global sections of sheaves of chains over Boolean spaces // Algebra Universalis. 1978. Vol. 8, no. 3. P. 357–373.
10. **Comer S.D.** Representation by algebras of sections over Boolean spaces // Pacific. Math. 1971. Vol. 38. P. 29–38.
11. **Georgescu G.** Pierce representations of distributive lattices // Kobe J. Math. 1993. Vol. 10, no. 1. P. 1–11.
12. **Keimel K.** The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves. Berlin: Springer, 1971. P. 1–98. (Lect. Notes Math.; vol. 248.)
13. **Чермных В.В.** Пучковые представления полуколец // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 5. С. 185–186.
14. **Чермных В.В.** Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 3. С. 111–227.
15. **Бредон Г.** Теория пучков. М.: Наука, 1988. 312 с.
16. **Вечтомов Е.М.** Функциональные представления колец. М.: Изд-во МПГУ, 1993. 190 с.

Марков Роман Владимирович
младший науч. сотрудник
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: markovrv@ya.ru

Поступила 30.10.2014

Чермных Василий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
старший науч. сотрудник
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: vv146@mail.ru