ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 517.977

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ДИНАМИКЕ[1]

А. С. Антипин, Е. В. Хорошилова

Рассматривается математическая модель, содержащая две базовые компоненты: управляемую динамику и краевую задачу, в роли которой выступает конечномерная многокритериальная равновесная модель. Конечномерная задача описывает некоторый управляемый объект, который находится в стационарном (равновесном) состоянии. Под действием внешних возмущений объект теряет свое состояние устойчивости и оказывается в произвольном положении. Управляя динамикой, необходимо вернуть объект в состояние равновесия. В работе предлагается и исследуется математическая модель описанной ситуации и метод ее решения. Предлагаемая модель относится к классу задач стабилизации. Реальный прообраз этой задачи легко найти в любой сфере человеческой активности, начиная с технологий и заканчивая политикой.

Ключевые слова: терминальное управление, краевая задача, равновесная модель, линейная динамика, оптимальность по Парето, равновесие по Нэшу, седловой подход, сходимость.

A. S. Antipin, E. V. Khoroshilova. Multicriteria boundary value problem in dynamics.

We consider a mathematical model that contains two basic components: a controlled dynamics and a boundary value problem in the form of a finite-dimensional multicriteria equilibrium model. The finite-dimensional problem describes some controlled object, which is in equilibrium (in a steady state). Under the influence of external disturbances the object loses its stability and takes an arbitrary position. It is required to return the object to equilibrium by controlling the dynamics. We propose and study a mathematical model of this situation and a method for its solution. The proposed model belongs to the class of stabilization problems. A real-world prototype of this problem can be easily found in every sphere of human activity: from technologies to politics.

Keywords: terminal control, boundary value problem, equilibrium model, linear dynamics, Pareto optimality, Nash equilibrium, saddle-point approach, convergence.

1. Постановка краевой задачи

В работе рассмотрим сначала краевую конечномерную задачу, а затем управляемую динамическую систему, которая выбором управления удерживает краевую модель в состоянии равновесия. Краевая задача является математической моделью ситуации, весьма распространенной в различных областях человеческой деятельности.

Пусть группа из m участников образует сообщество (экономический союз) для реализации общей цели (проекта). Цели и интересы каждого из участников описываются стоимостными целевыми функциями $f_i(x_1)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, которые определены на некотором общем множестве ресурсов $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$. Проблема, стоящая перед участниками проекта, заключается в том, как выбрать распределение поставок ресурсов так, чтобы, с одной стороны, проект был реализован с наименьшими суммарными расходами, а, с другой стороны, каждый из участников был заинтересован в минимизации своего вклада в реализацию общего проекта.

В первом приближении эту ситуацию можно описать в виде простейшей задачи многокритериальной оптимизации:

$$f(x_1^*) \in \mathrm{ParetoMin}\{f(x_1) \mid x_1 \in X_1\}, \tag{1.1}$$

где $f(x_1) = (f_1(x_1), f_2(x_1), \ldots, f_m(x_1))$ — векторный критерий, а выпуклые скалярные функции $f_i(x_1)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, имеют смысл стоимости ресурсов, которые i-й участник должен внести в сообщество для реализации проекта. Допустимое множество ресурсов (альтернатив) X_1 на первом этапе рассмотрения проблемы носит геометрический характер.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-06045) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4640.2014.1).

Задача многокритериальной оптимизации (1.1) порождает в качестве множества решений обширное многообразие точек, оптимальных по Парето. Предполагается, что не все участники в формируемом сообществе равноправны. Например, одни участники имеют более сильный хозяйственный механизм, и соответственно их долевое участие может быть больше, а другие участники имеют более слабую экономику, и их вклад в общее дело будет менее значимым или даже отрицательным (долг). Поэтому некоторые целевые функции будут принимать неотрицательные значения, т. е. $f_i(x_1) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m'$, а оставшаяся часть функций может принимать отрицательные значения, т. е. $f_i(x_1) < 0$, $i = m' + 1, \ldots, m$.

В задаче многокритериальной оптимизации выбирается Парето-оптимальное решение, которое нельзя улучшить, не увеличивая расходы какого-либо участника. С точки зрения индивидуальных интересов не все Парето-оптимальные решения равноправны.

Кроме того, наряду с индивидуальными интересами каждого участника в отдельности существуют еще и групповые интересы, например стоимость проекта в целом. Для разных Парето-оптимальных оценок, которые задают конфигурацию параметров будущего проекта, эта стоимость, вообще говоря, разная. Естественно выбрать проект, реализация которого имеет минимальную стоимость. Таким образом, необходимо сформулировать математическую модель, в решении которой заложена идея согласования индивидуальных интересов каждого участника с групповыми (коллективными) интересами сообщества.

В качестве модели предлагается рассмотреть игру двух лиц с равновесием по Нэшу [1]:

$$\langle \lambda^*, f(x_1^*) \rangle \in \mathrm{Min}\{\langle \lambda^*, f(x_1) \rangle \mid x_1 \in X_1\}, \tag{1.2}$$

$$\langle \lambda - \lambda^*, f(x_1^*) - \lambda^* \rangle \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \tag{1.3}$$

где неравенство (1.3) можно заменить на эквивалентное ему уравнение с оператором проектирования вектора на положительный ортант переменных $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ [2, кн. 1, с. 214]:

$$\lambda^* = \pi_+(\lambda^* + \alpha(f(x_1^*) - \lambda^*)), \quad \alpha > 0.$$

Добавим к задаче (1.2), (1.3) управляемую динамику и сформулируем общую динамическую модель с краевой задачей на правом конце интервала времени.

2. Динамика и седловой подход к решению задачи

Рассмотрим модель в динамике, которая представляет собой линейную управляемую дифференциальную систему

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1^* \in X_1 \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u(\cdot) \in \mathrm{U},$$

где множество допустимых управлений предполагается ограниченным интегрально:

$$\mathrm{U} = \{u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1] \mid \|u(\cdot)\|^2_{\mathrm{L}_2^r} \leq \mathrm{C}\}.$$

Здесь $D(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы, x_0 — заданное начальное условие, $x(t_1)$ — правый конец траектории $x(t) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1]$ (линейное многообразие абсолютно непрерывных функций). Управления $u(\cdot)$ являются элементами пространства $\mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]$ и принадлежат шару $\|u(\cdot)\|^2_{\mathrm{L}_2^r} \leq \mathrm{C}$. Шар, будучи интегрально ограниченным множеством, содержит поточечно неограниченные функции. Последнее означает, что множество достижимости X_1 представляет собой либо все пространство $\mathbb{R}^n$, либо его подпространство [3]. Далее наряду с обозначением $x(t_1)$ будем использовать также x_1.

Объединяя динамику с краевой задачей, сформулируем *динамическую краевую модель*, которая описывает переходный процесс управляемого объекта из начального состояния $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ в терминальное состояние $x(t_1) = x_1^*$:

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

$$x(t_1) = x_1^* \in X_1 \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u(\cdot) \in \mathrm{U}, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{U} = \{u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1] \mid \|u(\cdot)\|^2_{\mathrm{L}_2^r} \le \mathrm{C}\}, \tag{2.3}$$

где x_1^* является x_1-компонентой решения многокритериальной равновесной задачи (1.2), (1.3):

$$\langle \lambda^*, f(x_1^*)\rangle \in \mathrm{Min}\{\langle \lambda^*, f(x_1)\rangle \mid x_1 \in X_1\}, \tag{2.4}$$

$$\langle \lambda - \lambda^*, f(x_1^*) - \lambda^*\rangle \le 0, \quad \lambda \ge 0. \tag{2.5}$$

Под решением задачи (2.1)–(2.5) понимается набор $(\lambda^*; x_1^*, x^*(t), u^*(t))$, где первые две компоненты есть решения задачи (2.4), (2.5), а вторые являются решениями задачи (2.1)–(2.3). Подробнее, ведется поиск такого управления $u^*(t) \in \mathrm{U}$, чтобы траектория $x^*(t)$ попала своим правым концом в соответствующую компоненту x_1^* решения краевой задачи. Геометрически это означает, что векторы $f(x^*(t_1))$ и λ^*, отвечающие этому управлению, лежат на одной прямой (внутри положительного ортанта $\lambda_i > 0$). Именно это отражает вариационное неравенство (2.5). Решение $x^*(t_1)$ зависит от вектора f: различным векторам f будут отвечать разные $x^*(t_1)$.

Подчеркнем, что решения $x^*(t)$, $u^*(t)$ дифференциальной системы (2.1) в общем случае являются элементами пространств $\mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$, $\mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]$, т. е. эти решения удовлетворяют системе (2.1) для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. В частности, в качестве $x^*(t)$ вполне может выступать функция типа канторовой лестницы [4], которая почти всюду дифференцируема на отрезке и отображает канторово множество меры нуль в множество положительной меры. Эту функцию нельзя восстановить по ее производной, но тем не менее она является решением уравнения $\frac{d}{dt}x(t) = 0$, которое получается из (2.1), если $D(t) = I$, $B(t) = 0$, где I — единичная матрица.

Поэтому дифференциальный оператор $\frac{d}{dt}x(t) - D(t)x(t) - B(t)u(t)$ системы (2.1) мы будем рассматривать на декартовом произведении линейного многообразия абсолютно непрерывных функций $\mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \subset \mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$ и управлений из $\mathrm{U} \subset \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]$. В [2, кн. 1, с. 443] показано, что любому управлению $u(\cdot) \in \mathrm{U}$ в линейной системе (2.1) отвечает единственная траектория $x(\cdot)$, которая является абсолютно непрерывной функцией и удовлетворяет тождеству

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} (D(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau))\, d\tau, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Замыкание линейного многообразия абсолютно непрерывных функций по норме пространства $\overline{\mathrm{AC}}^n[t_0, t_1]$ совпадает со всем пространством $\mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$. Именно поэтому в качестве решений дифференциальной управляемой системы (2.1) могут быть как абсолютно непрерывные функции, так и функции типа канторовой лестницы, которые не являются абсолютно непрерывными.

В приложениях управление $u(\cdot)$ часто является кусочно-непрерывной функцией. При этом наличие точек разрыва на управлении никак не сказывается на значениях траектории $x(\cdot)$. Траектория не изменится, даже если изменить значения $u(\cdot)$ на множестве меры нуль.

3. Седловая функция (аналог функции Лагранжа)

Поставим в соответствие конечномерной задаче (2.4)–(2.5) функцию, которая будет играть роль, аналогичную функции Лагранжа в выпуклом программировании. Эта функция имеет вид

$$\mathcal{L}(\lambda, x_1) = \langle \lambda, f(x_1) - 1/2\lambda\rangle \tag{3.1}$$

и определена для всех $\lambda \ge 0$, $x_1 \in X_1$. Отметим, что данная функция является выпукло-вогнутой относительно прямых (x_1) и двойственных (λ) переменных, точнее, сильно вогнутой по двойственной переменной λ. Такие функции имеют седловые точки. Применительно к нашей ситуации седловая точка (λ^*, x_1^*) удовлетворяет системе неравенств

$$\langle \lambda, f(x_1^*) - 1/2\lambda \rangle \le \langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^* \rangle \le \langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^* \rangle \text{ для всех } \lambda \ge 0,\ x_1 \in X_1.$$

Левое неравенство системы означает, что λ^* является точкой максимума функции $\mathcal{L}(\lambda, x_1^*)$ по переменным λ при фиксированном значении $x(t_1) = x_1^*$. Выписав необходимое условие максимума для этой задачи, получим вариационное неравенство (2.5). Правое неравенство означает, что точка $x_1^* \in X_1$ является точкой минимума функции $\mathcal{L}(\lambda^*, x_1)$ по переменной x_1 при фиксированном значении λ^*. Именно это утверждается в задаче оптимизации (2.4).

В рассматриваемом случае функция $\mathcal{L}(\lambda, x_1)$ квадратичная и сильно вогнутая, следовательно, обладает свойством бесконечного роста, т. е. $\mathcal{L}(\lambda, x_1) \to -\infty$, если $\lambda \to \infty$ при любом фиксированном $x_1 \in X_1$. В этом случае теорема фон Неймана работает, и, следовательно, существование седловой точки для функции (3.1) гарантировано. Подчеркнем, что (3.1) не относится к функциям Лагранжа, поскольку она не является линейной по двойственным переменным. Нетрудно доказать, что седловая точка функции $\mathcal{L}(\lambda, x_1)$ является равновесным решением (2.4), (2.5).

В качестве следующего шага распространим функцию $\mathcal{L}(\lambda, x_1)$ на всю задачу (2.1)–(2.5). Близкие подходы рассматривались в [5–7]. Выпишем динамический аналог функции (3.1):

$$\mathcal{L}(\lambda, \psi(t); x_1, x(t), u(t)) = \langle \lambda, f(x_1) - 1/2\lambda \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \Big\rangle \, dt, \quad (3.2)$$

определенную при всех $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$. В случае регулярных ограничений (условие Слейтера) функция (3.2) всегда имеет седловую точку $(\lambda_1^*, \psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, которая удовлетворяет системе седловых неравенств

$$\mathcal{L}(\lambda, \psi(\cdot); x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \le \mathcal{L}(\lambda^*, \psi^*(t); x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \le \mathcal{L}(\lambda^*, \psi^*(t); x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \quad (3.3)$$

при всех $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$.

Покажем, что седловая точка системы (3.3) является решением исходной системы (2.1)–(2.5). В развернутом виде седловая система имеет представление

$$\begin{aligned} &\langle \lambda, f(x_1^*) - 1/2\lambda \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \Big\rangle \, dt \\ &\le \langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^* \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \Big\rangle \, dt \\ &\le \langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^* \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \Big\rangle \, dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $\Psi_2^n[t_0, t_1]$ — линейное многообразие абсолютно непрерывных функций из пространства, сопряженного к $\mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$. Это многообразие всюду плотно в $\mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$.

Учитывая, что $(x_1^*, x^*(t), u^*(t))$ — решение дифференциального уравнения (2.1), перепишем левое неравенство системы (3.4) в форме двух задач оптимизации, первая из которых

$$\langle \lambda, f(x_1^*) - 1/2\lambda \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t) - \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \Big\rangle \, dt \le \langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^* \rangle \quad (3.5)$$

выполняется для всех $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$, а другая задача

$$(x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \operatorname{Arg\,min}\Big\{\langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^*\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle\, dt\Big\} \quad (3.6)$$

— при всех $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$. Из (3.5) имеем

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad (3.7)$$

$$\langle \lambda, f(x_1^*) - 1/2\lambda\rangle \leq \langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^*\rangle, \quad \lambda \geq 0.$$

Здесь второе неравенство представляет собой задачу максимизации квадратичной функции. Если для этой задачи выписать необходимое условие, то получим вариационное неравенство $\langle \lambda - \lambda^*, f(x_1^*) - \lambda^*\rangle \leq 0,\ \lambda \geq 0$. Неравенство означает, что линейная функция на положительном ортанте достигает своего максимума в конечной точке $\lambda^* \neq 0$. Последнее возможно, если все компоненты вектора нормали $f(x_1^*) - \lambda^*$ равны нулю. Отсюда для всех внутренних точек положительного ортанта, т. е. для $\lambda > 0$, получаем $f(x_1^*) = \lambda^*$. Иными словами, оба вектора лежат на одном луче. С другой стороны, вариационное неравенство эквивалентно операторному уравнению [2, кн. 1, с. 214]

$$\lambda^* = \pi_+(\lambda^* + \alpha(f(x_1^*) - \lambda^*)). \quad (3.8)$$

Итак, задачу (3.6) можно представить как задачу минимизации выпуклой функции $\langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^*\rangle \leq \langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^*\rangle$ при одном скалярном ограничении

$$\Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle = 0.$$

С учетом (3.4), (3.5) получим исходную систему (2.1)–(2.5). Таким образом, доказано, что седловая точка системы (3.4) является решением исходной системы (2.1)–(2.5).

4. Постановка задачи, метод решения

Из сказанного выше следует, что поиск седловой точки системы (3.4) приводит к необходимости решить систему

$$(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \operatorname{Arg\,min}\Big\{\langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^*\rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle\, dt \mid x_1, x(\cdot), u(\cdot)\Big\}, \quad (4.1)$$

$$\lambda^* = \pi_+(\lambda^* + \alpha(f(x_1^*) - \lambda^*)), \quad (4.2)$$

$$\psi^*(t) = \psi^*(t) + \alpha\Big(D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t)\Big), \quad \alpha > 0, \quad (4.3)$$

при всех $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$, $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$. Здесь система записана в форме, удобной для реализации метода простой итерации. Похожую модель см. в [8].

Для решения этой задачи можно использовать различные подходы, в том числе метод простой итерации. В форме метода проекции градиента этот метод эффективен для решения задач оптимизации, но не гарантирует сходимости к решению в задачах седлового (игрового) типа. Для решения этих задач существуют седловые подходы. Одним из таких подходов является *двойственный экстрапроксимальный метод*, развитый в [9], где управление процессом идет по двойственным переменным $(\lambda, \psi(\cdot))$, а прямые переменные $(x_1, x(\cdot), u(\cdot))$ находятся как решение задачи оптимизации. Формулы данного процесса имеют вид

$$\bar{\lambda}^k = \arg\min\{1/2\,|\lambda - \lambda^k|^2 - \alpha\langle\lambda, f(x_1^k) - 1/2\lambda\rangle \mid \lambda \geq 0\}, \tag{4.4}$$

$$\bar{\psi}^k(t) = \psi^k(t) + \alpha\Big(D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t) - \frac{d}{dt}x^k(t)\Big), \tag{4.5}$$

$$(x_1^{k+1}, x^{k+1}(\cdot), u^{k+1}(\cdot)) = \arg\min\Big\{1/2\,|x_1 - x_1^k|^2 + \alpha\langle\bar{\lambda}^k, f(x_1) - 1/2\bar{\lambda}^k\rangle$$

$$+ 1/2\,\|x(t) - x^k(t)\|^2 + 1/2\,\|u(t) - u^k(t)\|^2 + \alpha\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar{\psi}^k(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle\,dt\Big\}, \tag{4.6}$$

$$\lambda^{k+1} = \arg\,\min\big\{1/2\,|\lambda - \lambda^k|^2 - \alpha\big\langle\lambda, f(x_1^{k+1}) - 1/2\,\lambda\rangle \mid \lambda \geq 0\big\}, \tag{4.7}$$

$$\psi^{k+1}(t) = \psi^k(t) + \alpha\Big(D(t)x^{k+1}(t) + B(t)u^{k+1}(t) - \frac{d}{dt}x^{k+1}(t)\Big), \quad \alpha > 0, \tag{4.8}$$

где минимум в (4.6) берется по всем $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$.

5. Доказательство сходимости

Целевая функция задачи (4.6) является регуляризованной, сильно выпуклой и поэтому имеет единственную точку минимума. Любая минимизирующая последовательность сходится к минимуму функции со скоростью геометрической прогрессии [2, кн. 1, с. 299]. Отметим, что точка минимума регуляризованной выпуклой функции удовлетворяет неравенству

$$1/2\,|z^* - x|^2 + \alpha f(z^*) \leq 1/2\,|z - x|^2 + \alpha f(z) - 1/2\,|z - z^*|^2, \quad z \in Z, \tag{5.1}$$

где $f(z)$ — выпуклая, не обязательно дифференцируемая функция, определенная на выпуклом множестве Z, z^* — точка минимума функции $1/2\,|z - x|^2 + \alpha f(z)$ на Z, x — фиксированная точка, $\alpha > 0$ — параметр [9]. Используя (5.1), представим задачу (4.6) в виде

$$1/2\,|x_1^{k+1} - x_1^k|^2 + \alpha\langle\bar{\lambda}^k, f(x_1^{k+1})1/2\,\bar{\lambda}^k\rangle + 1/2\,\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + 1/2\,\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2$$

$$+\alpha\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar{\psi}^k(t), D(t)x^{k+1}(t) + B(t)u^{k+1}(t) - \frac{d}{dt}x^{k+1}(t)\Big\rangle\,dt$$

$$\leq 1/2\,|x_1 - x_1^k|^2 + \alpha\langle\bar{\lambda}^k, f(x_1) - 1/2\,\bar{\lambda}^k\rangle + 1/2\,\|x(t) - x^k(t)\|^2 + 1/2\,\|u(t) - u^k(t)\|^2$$

$$+\alpha\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar{\psi}^k(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle\,dt$$

$$-1/2\,|x_1 - x_1^{k+1}|^2 - 1/2\,\|x(t) - x^{k+1}(t)\|^2 - 1/2\,\|u(t) - u^{k+1}(t)\|^2. \tag{5.2}$$

Аналогично, при помощи (5.1) преобразуем экстремальные уравнения (4.4), (4.7) к виду

$$|\bar{\lambda}^k - \lambda^k|^2 - 2\alpha\langle\bar{\lambda}^k, f(x_1^k) - 1/2\,\bar{\lambda}^k\rangle \leq |\lambda - \lambda^k|^2 - 2\alpha\langle\lambda, f(x_1^k) - 1/2\lambda\rangle - |\lambda - \bar{\lambda}^k|^2, \quad \lambda > 0, \tag{5.3}$$

$$|\lambda^{k+1} - \lambda^k|^2 - 2\alpha\langle\lambda^{k+1}, f(x_1^{k+1}) - 1/2\lambda^{k+1}\rangle$$

$$\leq |\lambda - \lambda^k|^2 - 2\alpha\langle\lambda, f(x_1^{k+1}) - 1/2\lambda\rangle - |\lambda - \lambda^{k+1}|^2, \quad \lambda > 0. \tag{5.4}$$

Далее, чтобы иметь единообразный механизм получения различных оценок, представим уравнения (4.5), (4.8) в формах, аналогичных (5.3), (5.4). С этой целью будем рассматривать эти уравнения как необходимые и достаточные условия минимумов квадратичных функционалов типа (4.4), (4.7). Введем обозначение

$$F(x^k(t), u^k(t)) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t) - \frac{d}{dt}x^k(t), \tag{5.5}$$

тогда уравнения (4.5), (4.8) можно переписать в квадратичной форме

$$\bar{\psi}^k(\cdot) = \arg\min\big\{1/2\,\|\psi(t) - \psi^k(t)\|^2 - \alpha\langle\psi(t), F(x^k(t), u^k(t))\rangle \mid \psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]\big\},$$

$$\psi^{k+1}(\cdot) = \arg\min\big\{1/2\,\|\psi(t) - \psi^k(t)\|^2 - \alpha\langle\psi(t), F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))\rangle \mid \psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]\big\}.$$

С учетом преобразования (5.1) полученные задачи представим в виде

$$\|\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)\|^2 - 2\alpha\langle\bar{\psi}^k(t), F(x^k(t), u^k(t))\rangle$$
$$\le \|\psi(t) - \psi^k(t)\|^2 - 2\alpha\langle\psi(t), F(x^k(t), u^k(t))\rangle - \|\psi(t) - \bar{\psi}^k(t)\|^2, \tag{5.6}$$
$$\|\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t)\|^2 - 2\alpha\langle\psi^{k+1}(t), F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))\rangle$$
$$\le \|\psi(t) - \psi^k(t)\|^2 - 2\alpha\langle\psi(t), F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))\rangle - \|\psi(t) - \psi^{k+1}(t)\|^2 \tag{5.7}$$

для всех $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$. Дополнительно предположим, что функция $f(x_1)$ удовлетворяет условию Липшица для всех допустимых x_1 и h:

$$|f(x_1 + h) - f(x_1)| \le Lh. \tag{5.8}$$

Докажем теорему о сходимости метода (4.4)–(4.8) к решению задачи (4.1)–(4.3).

Теорема. *Если решение равновесной задачи* (4.1)–(4.3) *существует, функции* $f_i(x_1)$, $i = 1, \ldots, m$, *выпуклы и подчинены условию Липшица, то последовательность двойственного экстраградиентного метода* (4.4)–(4.8) $(\lambda^k, \psi^k(\cdot); x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot))$ *с параметром* α, *удовлетворяющим условию* $0 < \alpha < \alpha_0 = \min\{1/L; 1/(\sqrt{2}C_0); 1/(\sqrt{2}B_{\max})\}$, *содержит подпоследовательность, которая сходится к одному из решений* $(\lambda^*, \psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ *задачи. При этом сходимость слабая — по управлениям, сильная — по траекториям, сопряженным траекториям, а также по всем терминальным переменным.*

Кроме того, последовательность суммарных отклонений от решения $|\lambda^k - \lambda^*|^2 + \|\psi^k(t) - \psi^*(t)\|^2 + |x_1^k - x_1^*|^2 + \|x^k(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^k(t) - u^*(t)\|^2$ *монотонно убывает с ростом* k *для всех начальных условий* $(\lambda^0, \psi^0(\cdot); x_1^0, x^0(\cdot), u^0(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы сводится к вычислению оценок отклонения, полученного на $(k+1)$-ой итерации приближения к решению от самого решения задачи, последующего анализа оценок, из которого будет следовать ограниченность итеративной последовательности, существование (по крайней мере одной) слабой предельной точки. Затем идет доказательство факта, что слабо предельная точка является решением исходной задачи. В силу ограниченного объема статьи будем выписывать соответствующие оценки без их подробного обоснования и одновременно указывать источники, где это обоснование можно найти.

1. Суммарная оценка отклонения x_1^{k+1}, $x^{k+1}(\cdot)$, $u^{k+1}(\cdot)$ от x_1^*, $x^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ имеет вид

$$1/2\,|x_1^{k+1} - x_1^*|^2 + 1/2\,\|x^{k+1}(t) - x^*(t)\|^2 + 1/2\,\|u^{k+1}(t) - u^*(t)\|^2$$
$$+ 1/2\,|x_1^{k+1} - x_1^k|^2 + 1/2\,\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + 1/2\,\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 + \alpha\langle\bar{\lambda}^k - \lambda^*, f(x_1^{k+1}) - f(x_1^*)\rangle$$
$$+ \alpha\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t)(x^{k+1}(t) - x^*(t)) + B(t)(u^{k+1}(t) - u^*(t)) - \frac{d}{dt}(x^{k+1}(t) - x^*(t))\Big\rangle\,dt$$
$$\le 1/2\,|x_1^k - x_1^*|^2 + 1/2\,\|x^k(t) - x^*(t)\|^2 + 1/2\,\|u^k(t) - u^*(t)\|^2. \tag{5.9}$$

Для получения этой оценки были использованы неравенства (5.2) и (3.4). Детальный анализ вывода оценки можно видеть в [5–12].

2. В качестве следующего шага, используя (5.3)–(5.7), получим суммарную оценку отклонения λ^{k+1}, $\psi^{k+1}(t)$ от λ^*, $\psi^*(t)$:

$$\begin{gathered}|\lambda^{k+1}-\lambda^*|^2+|\bar\lambda^k-\lambda^k|^2+|(\lambda^{k+1}-\bar\lambda^k)+\alpha(f(x_1^k)-f(x_1^{k+1}))|^2\\ -\alpha^2|f(x_1^k)-f(x_1^{k+1})|^2-2\alpha\langle\bar\lambda^k-\lambda^*,f(x_1^{k+1}-f(x_1^*)\rangle\\ +\|\psi^{k+1}(t)-\psi^*(t)\|^2+\|\bar\psi^k(t)-\psi^k(t)\|^2-\alpha^2\|F(x^k(t),u^k(t))-F(x^{k+1}(t),u^{k+1}(t))\|^2\\ +\|\psi^{k+1}(t)-\bar\psi^k(t)+\alpha(F(x^k(t),u^k(t))-F(x^{k+1}(t),u^{k+1}(t)))\|^2\\ -2\alpha\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar\psi^k(t)-\psi^*(t),D(t)(x^{k+1}(t)-x^*(t))+B(t)(u^{k+1}(t)-u^*(t))-\frac{d}{dt}(x^{k+1}(t)-x^*(t))\Big\rangle\,dt\\ \le|\lambda^k-\lambda^*|^2+\|\psi^k(t)-\psi^*(t)\|^2.\end{gathered}\tag{5.10}$$

3. Найдем суммарную оценку отклонений по всем прямым и двойственным переменным. Умножим для этого неравенство (5.9) на 2 и с учетом (5.8) сложим его с (5.10):

$$\begin{gathered}|x_1^{k+1}-x_1^*|^2+\|x^{k+1}(t)-x^*(t)\|^2+\|u^{k+1}(t)-u^*(t)\|^2+|\lambda^{k+1}-\lambda^*|^2+\|\psi^{k+1}(t)-\psi^*(t)\|^2\\ +|x_1^{k+1}-x_1^k|^2+\|x^{k+1}(t)-x^k(t)\|^2+\|u^{k+1}(t)-u^k(t)\|^2+\|\psi^{k+1}(t)-\psi^k(t)\|^2\\ +|\bar\lambda^k-\lambda^k|^2+|(\bar\lambda^k-\lambda^{k+1})+\alpha(f(x_1^{k+1})-f(x_1^k))|^2-\alpha^2|f(x_1^{k+1})-f(x_1^k)|^2\\ +\|\psi^{k+1}(t)-\bar\psi^k(t)+\alpha(F(x^{k+1}(t),u^{k+1}(t))-F(x^k(t),u^k(t)))\|^2\\ -\alpha^2\|F(x^{k+1}(t),u^{k+1}(t))-F(x^k(t),u^k(t))\|^2\\ \le|x_1^k-x_1^*|^2+\|x^k(t)-x^*(t)\|^2+\|u^k(t)-u^*(t)\|^2+|\lambda^k-\lambda^*|^2+\|\psi^k(t)-\psi^*(t)\|^2.\end{gathered}\tag{5.11}$$

Оценим последнее слагаемое из левой части (5.11), используя неравенство треугольника и оценку нормы линейного ограниченного дифференциального оператора, которую можно получить по лемме Гронуолла: $C_0=e^{D_{\max}(t_1-t_0)}B_{\max}\sqrt{t_1-t_0}$, где $B_{\max}=\|B(t)\|_{L_\infty}=\max\|B(t)\|$ $\forall t\in[t_0,t_1]$, $D_{\max}=\|D(t)\|_{L_\infty}$ [2, кн. 2, с. 653]:

$$\|F(x^{k+1}(t),u^{k+1}(t))-F(x^k(t),u^k(t))\|\le C_0\|x^{k+1}(t)-x^k(t)\|+B_{\max}\|u^{k+1}(t)-u^k(t)\|.$$

С учетом неравенства $2|xy|\le x^2+y^2$ находим

$$\|F(x^k(t),u^k(t))-F(x^{k+1}(t),u^{k+1}(t))\|^2\le 2\|A\|^2\|x^{k+1}(t)-x^k(t)\|^2+2B_{\max}^2\|u^{k+1}(t)-u^k(t)\|^2.$$

Используя полученную оценку и условие Липшица $|f(x_1^{k+1})-f(x_1^k)|^2\le L^2|x_1^{k+1}-x_1^k|^2$, представим неравенство (5.11) в форме

$$\begin{gathered}|x_1^{k+1}-x_1^*|^2+\|x^{k+1}(t)-x^*(t)\|^2+\|u^{k+1}(t)-u^*(t)\|^2+|\lambda^{k+1}-\lambda^*|^2+\|\psi^{k+1}(t)-\psi^*(t)\|^2\\ +d_1|x_1^{k+1}-x_1^k|^2+d_2\|x^{k+1}(t)-x^k(t)\|^2+d_3\|u^{k+1}(t)-u^k(t)\|^2+\|\psi^{k+1}(t)-\psi^k(t)\|^2\\ +|\bar\lambda^k-\lambda^k|^2+|(\bar\lambda^k-\lambda^{k+1})+\alpha(f(x_1^{k+1})-f(x_1^k))|^2\\ +\|\psi^{k+1}(t)-\bar\psi^k(t)+\alpha(F(x^{k+1}(t),u^{k+1}(t))-F(x^k(t),u^k(t)))\|^2\\ \le|x_1^k-x_1^*|^2+\|x^k(t)-x^*(t)\|^2+\|u^k(t)-u^*(t)\|^2+|\lambda^k-\lambda^*|^2+\|\psi^k(t)-\psi^*(t)\|^2,\end{gathered}\tag{5.12}$$

где $d_1=1-(\alpha L)^2>0$, $d_2=1-2(\alpha C_0)^2$, $d_3=1-2(\alpha B_{\max})^2$. Потребуем, чтобы $d_1>0$, $d_2>0$, $d_3>0$, тогда α должно удовлетворять условию

$$0<\alpha<\alpha_0=\min\{1/L;1/(\sqrt{2}C_0);1/(\sqrt{2}B_{\max})\}.$$

Из (5.12) следует монотонное убывание последовательности суммарных отклонений

$$|x_1^{k+1} - x_1^*|^2 + \|x^{k+1}(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^{k+1}(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^{k+1} - \lambda^*|^2 + \|\psi^{k+1}(t) - \psi^*(t)\|^2$$
$$\leq |x_1^k - x_1^*|^2 + \|x^k(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^k(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^k - \lambda^*|^2 + \|\psi^k(t) - \psi^*(t)\|^2. \qquad (5.13)$$

4. Просуммируем неравенства (5.12) от $k = 0$ до $k = K$:

$$|x_1^{K+1} - x_1^*|^2 + \|x^{K+1}(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^{K+1}(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^{K+1} - \lambda^*|^2 + \|\psi^{K+1}(t) - \psi^*(t)\|^2$$
$$+ d_1 \sum_{k=0}^{K} |x_1^{k+1} - x_1^k|^2 + d_2 \sum_{k=0}^{K} \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + d_3 \sum_{k=0}^{K} \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2$$
$$+ \sum_{k=0}^{K} \|\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t)\|^2 + \sum_{k=0}^{K} |\bar\lambda^k - \lambda^k|^2 + \sum_{k=0}^{K} |(\bar\lambda^k - \lambda^{k+1}) + \alpha(f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k))|^2$$
$$+ \sum_{k=0}^{K} \|\psi^{k+1}(t) - \bar\psi^k(t) + \alpha(F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - F(x^k(t), u^k(t)))\|^2$$
$$\leq |x_1^0 - x_1^*|^2 + \|x^0(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^0(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^0 - \lambda^*|^2 + \|\psi^0(t) - \psi^*(t)\|^2. \qquad (5.14)$$

Из полученного неравенства следует ограниченность последовательности решений

$$|x_1^{K+1} - x_1^*|^2 + \|x^{K+1}(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^{K+1}(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^{K+1} - \lambda^*|^2 + \|\psi^{K+1}(t) - \psi^*(t)\|^2$$
$$\leq |x_1^0 - x_1^*|^2 + \|x^0(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^0(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^0 - \lambda^*|^2 + \|\psi^0(t) - \psi^*(t)\|^2,$$

а также сходимость рядов из (5.14) и соответственно стремление к нулю при $k \to \infty$ величин

$$|x_1^{k+1} - x_1^k|^2 \to 0, \quad \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 \to 0, \quad \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 \to 0,$$
$$\|\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t)\|^2 \to 0, \quad |\bar\lambda^k - \lambda^k|^2 \to 0, \quad |(\bar\lambda^k - \lambda^{k+1}) + \alpha(f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k))|^2 \to 0,$$
$$\|\psi^{k+1}(t) - \bar\psi^k(t) + \alpha(F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - F(x^k(t), u^k(t)))\|^2 \to 0.$$

5. Поскольку последовательность $(\lambda^k, \psi^k(\cdot); x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot))$ ограничена на декартовом произведении пространств $\mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n_2[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$, то она слабо компактна [4]. Последнее означает, что существуют подпоследовательность $(\lambda^{k_i}, \psi^{k_i}(\cdot); x_1^{k_i}, x^{k_i}(\cdot), u^{k_i}(\cdot))$ и точка $(\lambda', \psi'(\cdot); x_1', x'(\cdot), u'(\cdot))$, которая является слабым пределом этой подпоследовательности. Заметим, что в конечномерных (евклидовых) пространствах слабые и сильные сходимости совпадают.

В уравнениях (4.7), (4.8) перейдем по выделенной подпоследовательности к ее слабому пределу. Тогда в силу слабой непрерывности линейных операторов [2] получим

$$\lambda' = \pi_+\big(\lambda' + \alpha(f(x_1') - \lambda')\big), \quad \psi'(t) = \psi'(t) + \alpha\Big(D(t)x'(t) + B(t)u'(t) - \frac{d}{dt}x'(t)\Big). \qquad (5.15)$$

Отсюда следует, что предельная точка является решением краевой задачи и одновременно решением дифференциальной системы (4.2), (4.3).

Теперь покажем, что эта слабо предельная точка является решением задачи оптимизации (4.1). Прежде всего напомним, что функция Лагранжа (3.2) порождает двойственную функцию относительно переменных $\lambda \geq 0$, $\psi(\cdot) \in \Psi^n_2[t_0, t_1]$. Двойственная функция имеет вид

$$\mathcal{M}(\lambda, \psi(\cdot)) = \min\big\{\mathcal{L}(\lambda, \psi(\cdot); x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \mid x_1, x(\cdot), u(\cdot)\big\},$$

где минимум берется по всем $x_1, x(\cdot), u(\cdot)$ для каждой пары $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$. Эта функция является выпуклой вверх, субдифференцируемой, и в точке максимума выполняются необходимые и достаточные условия экстремума (3.7), (3.8) [2]. Эти условия совпадают с системой (5.15) и, как показано в разд. 3, достаточны, чтобы точка $(\lambda', \psi'(\cdot); x'_1, x'(\cdot), u'(\cdot))$ была решением задачи (4.1) и, следовательно, всей системы (4.1)–(4.3). Другими словами, компоненты векторов $(\lambda', \psi'(\cdot); x'_1, x'(\cdot), u'(\cdot))$ и $(\lambda^*, \psi^*(\cdot); x^*_1, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ соответственно совпадают и описывают одну и ту же точку, которая является решением исходной задачи (2.1)–(2.5).

Теорема доказана.

Важно отметить, что процесс (4.4)–(4.8) стремится к решению задачи, монотонно убывая по норме пространств (5.13). При этом траектории $\psi^k(\cdot)$, $x^k(\cdot)$ являются абсолютно непрерывными функциями, однако предельные точки этих последовательностей могут не принадлежать классам абсолютно непрерывных функций. Таким образом, установлено, что процесс (4.4)–(4.8) сходится монотонно по норме пространства прямого произведения всех прямых и двойственных переменных задачи, причем по управлениям сходимость слабая, по остальным переменным — сильная (по норме соответствующего пространства [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антипин А.С.** О двух постановках равновесных задач // Оптимизация и приложения. М: Изд-во ВЦ РАН, 2011. Вып. 2. С. 13–41.
2. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2 кн. М.: МЦНМО, 2011. Кн. 1, 624 с; кн. 2, 434 с.
3. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения / Ф. П. Васильев, М. А. Куржанский, М. М. Потапов, А. В. Разгулин. М.: Изд-во ВМК МГУ, 2010. 384 с.
4. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 572 с.
5. **Antipin A.S.** Two-person game with Nash equilibrium in optimal control problems // Optim. Lett. 2012. Vol. 6, iss. 7. P. 1349–1378.
6. **Антипин А.С., Хорошилова Е.В.** Линейное программирование и динамика // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 7–25.
7. **Антипин А.С.** Терминальное управление краевыми моделями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 2. С. 257–285.
8. **Антипин А.С., Васильева О.О.** Динамический метод множителей в терминальном управлении // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 46–68.
9. **Антипин А.С.** Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 11. С. 1969–1990; № 12. С. 2102–2111.
10. **Антипин А.С., Хорошилова Е.В.** Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 13–28.
11. **Антипин А.С., Хорошилова Е.В.** О краевой задаче терминального управления с квадратичным критерием качества // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2014. Т. 8. С. 7–28. (Сер. Математика.)
12. **Васильев Ф.П., Хорошилова Е.В., Антипин А.С.** Регуляризованный экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 27–37.

Поступила 04.05.2015

Антипин Анатолий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. научн. сотрудник
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына
e-mail: asantip@yandex.ru

Хорошилова Елена Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: khorelena@gmail.com