ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.5

О ЗАМКНУТОСТИ КОВРОВ ЛИЕВА ТИПА НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

С. К. Куклина, А. О. Лихачёва, Я. Н. Нужин

Для достаточно широкого класса коммутативных колец доказано существование незамкнутых неприводимых ковров лиева типа, ассоциированных с любой системой корней.

Ключевые слова: группа Шевалле над коммутативным кольцом, ковер аддитивных подгрупп, ковровая подгруппа.

S. K. Kuklina, A. O. Likhacheva, Ya. N. Nuzhin. On closeness of carpets of Lie type over commutative rings.

For a wide class of commutative rings, the existence of non-closed irreducible carpets of Lie type associated with any root system is proved.

Keywords: Chevalley group over a commutative ring, carpet of additive subgroups, carpet subgroup.

1. Введение

Набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \le i,\ j \le n,\ i \ne j\}$ коммутативного кольца K с условиями $\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}$ для всех попарно различных i, r, j называется элементарным матричным ковром степени n над кольцом K. Всякий элементарный ковер $\mathfrak{A}$ определяет элементарную ковровую подгруппу $E(\mathfrak{A})$ специальной линейной группы $SL(n, K)$. По определению $E(\mathfrak{A})$ порождается трансвекциями $t_{ij}(u)$, $u \in \mathfrak{A}_{ij}$, $1 \le i,\ j \le n$, $i \ne j$. Ковер $\mathfrak{A}$ называется замкнутым, если подгруппа $E(\mathfrak{A})$ не содержит новых трансвекций.

Понятия элементарного матричного ковра и ковровой подгруппы были перенесены разными способами на группы лиева типа и в этом общем случае роль трансвекций играют корневые элементы $x_r(u)$, $r \in \Phi$, $u \in K$, группы Шевалле типа Φ над кольцом K. Мы следуем определениям В. М. Левчука из [1], в которых условия ковровости определяются коммутаторной формулой для корневых элементов. Краткую историю развития и приложений данных понятий можно найти, например, в [2; 3]. Отметим, что по лиевой терминологии элементарный матричный ковер степени n — это ковер типа $\Phi = A_{n-1}$.

Назовем ковер типа Φ неприводимым (соответственно унипотентным), если все его аддитивные подгруппы ненулевые (соответственно нулевые все аддитивные подгруппы, индексированные отрицательными корнями). Любой ковер типа Φ над полем является объединением унипотентного ковра и определенного числа неприводимых ковров, соответствующих неразложимым подсистемам корней системы Φ [4, лемма 2]. Всякий унипотентный ковер замкнут, поэтому первостепенный интерес вызывают неприводимые ковры.

В. А. Койбаев указал пример незамкнутого неприводимого ковра типа A_l над полем рациональных функций [5]. Мы строим примеры незамкнутых неприводимых ковров любого типа Φ над различными коммутативными кольцами. В наших примерах все подковры $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 замкнутые, за исключением лишь одного. Поэтому данные примеры являются предельными в связи со следующим известным вопросом В. М. Левчука [6, вопрос 15.46]: *верно ли, что для замкнутости ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над полем K необходима и достаточна замкнутость его подковров $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга* 1?

Основным результатом статьи является

Теорема. *Пусть K — коммутативное кольцо с единицей и в K существуют ненулевой идеал I и аддитивная подгруппа J такие, что $\mathbb{Z}+I \neq \mathbb{Z}+I+J$. Тогда для любой системы корней Φ существует неприводимый незамкнутый ковер типа Φ над K.*

2. Определения и обозначения

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l, $E(\Phi,K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K. Группа $E(\Phi,K)$ порождается своими корневыми подгруппами $x_r(K)=\{x_r(t) \mid t\in K\},\ r\in\Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы, и для каждого $r\in\Phi$ и любых $t,u\in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)\,x_r(u)=x_r(t+u).$$

Назовем (*элементарным*) *ковром типа Φ ранга l над K* всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}=\{\mathfrak{A}_r \mid r\in\Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js},\quad r,s,ir+js\in\Phi,\quad i,j>0, \tag{2.1}$$

где $\mathfrak{A}_r^i=\{a^i \mid a\in\mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs}=\pm1,\pm2,\pm3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$\big[x_s(u),x_r(t)\big]=\prod_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-t)^iu^j\big),\quad r,s,ir+js\in\Phi.$$

Данное определение ковра принадлежит В. М. Левчуку [1]. Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую* подгруппу $E(\Phi,\mathfrak{A})=\big\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r\in\Phi\big\rangle$ группы Шевалле $E(\Phi,K)$, где $\langle M\rangle$ обозначает подгруппу, порожденную подмножеством M некоторой группы. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi,\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. $E(\Phi,\mathfrak{A})\cap x_r(K)=x_r(\mathfrak{A}_r),\ r\in\Phi$.

В статье приняты следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $A+B$ — подгруппа, порожденная аддитивными подгруппами A,B некоторого кольца, $x^{-1}y^{-1}xy=[x,y]$.

3. Примеры колец, над которыми замкнут любой ковер

При $\Phi=A_{n-1}$ ковер $\mathfrak{A}$ лиева ранга $n-1$ совпадает с элементарным матричным ковром

$$\{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1\le i,\ j\le n,\ i\neq j\} \tag{3.1}$$

степени n, и в этом частном случае соотношения (2.1) запишутся в более простом виде $\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj}\subseteq\mathfrak{A}_{ij}$ для всех попарно различных i,r,j. Назовем элементарный матричный ковер степени $n\ge2$ *дополняемым до полного матричного ковра*

$$\mathfrak{A}=\{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1\le i,j\le n\} \tag{3.2}$$

или, кратко, *дополняемым*, если можно доопределить диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$, $1\le i\le n$, так, чтобы $\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj}\subseteq\mathfrak{A}_{ij},\ 1\le i,r,j\le n$. Хорошо известно, что элементарный матричный ковер (3.1) дополняется до полного ковра (3.2) тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij}\subseteq\mathfrak{A}_{ij},\quad 1\le i,j\le n,\quad i\neq j \tag{3.3}$$

(см., например, [7, с. 25] или [1, лемма 6]). Это дополнение можно получить, положив

$$\mathfrak{A}_{ii}=\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji},\quad 1\le i\le n,$$

и в этом случае множество матриц вида $e + \sum_{i,j=1}^{n} \mathfrak{A}_{ij} e_{ij}$ является полугруппой относительно матричного умножения. Здесь e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i,j) стоит 1, а на остальных местах — нули. Элементарная матричная ковровая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ по определению порождается трансвекциями $t_{ij}(u) = e + ue_{ij},\ u \in \mathfrak{A}_{ij},\ 1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j$. Поэтому любой дополняемый элементарный матричный ковер является замкнутым ковром.

Если все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_{ij}$ являются идеалами, то включения (3.3) выполняются. Таким образом, справедлива

Лемма. *Любой элементарный матричный ковер идеалов над коммутативным кольцом является замкнутым ковром.*

В кольце целых чисел любая аддитивная подгруппа является идеалом. Поэтому лемма дает

Предложение. *Любой элементарный матричный ковер аддитивных подгрупп над кольцом целых чисел является замкнутым ковром.*

В [4, с. 511] указаны необходимые и достаточные условия замкнутости ковра аддитивных подгрупп типа Φ ранга l над локально конечным полем. Авторы выдвигают следующую гипотезу.

Гипотеза. *Любой неприводимый ковер типа Φ ранга $l \geq 2$ над локально конечным полем является замкнутым ковром.*

Известная теорема Л. Диксона о порождении специальной линейной группы степени 2 над конечным полем двумя трансвекциями показывает, что ограничение $l \geq 2$ в гипотезе является существенным.

4. Доказательство теоремы

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, обладающее ненулевым идеалом I и аддитивной подгруппой J такими, что

$$\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J. \tag{4.1}$$

Для системы корней Φ ранга $l \geq 2$ определим набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\} \tag{4.2}$$

следующим образом. Фиксируем корень $p \in \Phi$ и полагаем

$$\mathfrak{A}_p = \mathbb{Z} + I,$$

$$\mathfrak{A}_{-p} = \mathbb{Z} + I + J,$$

$$\mathfrak{A}_r = I,\ r \neq \pm p.$$

Покажем, что набор $\mathfrak{A}$ является ковром. Для сокращения записи положим

$$A = \mathbb{Z} + I,$$

$$B = \mathbb{Z} + I + J.$$

Если сумма $r+s$ корней r, s является корнем, то все три корня $r, s, r+s$ лежат в некоторой подсистеме корней Φ_2 ранга 2 системы Φ. Поэтому достаточно проверить условия ковровости для систем корней типа A_2, B_2 и G_2. Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ_2.

Для типа A_2 коммутаторная формула имеет вид

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu). \tag{4.3}$$

При $p = a$ формула (4.3) и условие ковровости дают следующие шесть импликаций:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow II \subseteq A,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow II \subseteq B.$$

Так как идеал I лежит в пересечении $A \cap B$, то включения, указанные в правых частях этих шести импликаций, выполняются. Для других $p \in \Phi_2$ ситуация подобная. Если $p \notin \Phi_2$, то формула (4.3) и условие ковровости дают импликацию $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{r+s} \Rightarrow II \subseteq I$, которая справедлива, так как I — идеал.

Для типа B_2 имеются два вида коммутаторной формулы:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u), \tag{4.4}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu). \tag{4.5}$$

При $p = a$ формула (4.4) дает следующие восемь импликаций:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow A^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow B^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow II \subseteq A,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq_{2a+b} \Rightarrow I^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow I \subseteq B,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow I^2I \subseteq I.$$

При $p = a$ формула (4.5) дает еще четыре импликации:

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow 2AI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow 2BI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow 2AI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow 2BI \subseteq I.$$

Так же, как и для типа A_2, включения, указанные в правых частях всех таких импликаций, выполняются в силу того, что идеал I лежит в пересечении $A \cap B$. Случай $p \neq a$ рассматривается аналогично.

Для типа G_2 имеются четыре вида коммутаторной формулы:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \tag{4.6}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2)x_{3a+b}(\pm 3t^2u), \tag{4.7}$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{3a+b}(\pm 3tu), \tag{4.8}$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{3a+2b}(\pm tu). \tag{4.9}$$

Мы не будем подробно выписывать условия ковровости для этого типа. В силу формул (4.6)–(4.9) для подходящих $n, m, c \in \{1, 2, 3\}$ все они имеют вид $cA^nI^m \subseteq X$, $cB^nI^m \subseteq X$ или $cI^nI^m \subseteq X$ (как, впрочем, и для типов A_2 и B_2), где X есть A, B или I. Они выполняются снова только в силу того, что идеал I лежит в пересечении $A \cap B$. Таким образом, набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}$ является ковром.

Покажем незамкнутость ковра $\mathfrak{A}$. В силу неравенства (4.1) в кольце K существует элемент t такой, что $t \in \mathfrak{A}_{-p}$, но $t \notin \mathfrak{A}_p$. Так как $1 \in \mathfrak{A}_p \cap \mathfrak{A}_{-p}$, то $n_p = x_p(1)x_{-p}(-1)x_p(1) \in E(\Phi, \mathfrak{A})$. Отсюда $n_p^{-1}x_{-p}(t)n_p = x_p(-t) \in E(\Phi, \mathfrak{A})$ и, следовательно, ковер $\mathfrak{A}$ не является замкнутым.

Итак, теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Тройка $K = F[x]$, I, $J = \mathbb{Z}x$, где $F[x]$ — кольцо многочленов над полем F, I — его идеал, порожденный некоторым многочленом степени не меньше 2, удовлетворяет предположению теоремы. Таким образом, множество колец, удовлетворяющих условию (4.1), не пусто.

З а м е ч а н и е 2. По лемме, за исключением лишь одного подковра $\{\mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_{-p}\}$, все другие подковры $\{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 ковра (4.2) являются замкнутыми.

Авторы благодарны профессору В. М. Левчуку за внимание к работе и полезные советы по изложению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Левчук В. М.** Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.
2. **Нужин Я. Н.** Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. Сибирского федерального ун-та. 2011. Т. 4, № 4. С. 527–535.
3. **Койбаев В. А., Нужин Я. Н.** Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 1. С. 75–84.
4. **Левчук В. М.** О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 504–517.
5. **Койбаев В. А.** Элементарные сети в линейных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
6. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 17-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010. 219 с.
7. **Боревич З. И.** О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1978. Т. 75. С. 22–31.

Поступила 02.02.15

Нужин Яков Нифантьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Куклина Светлана Константиновна
магистрант
Сибирский федеральный университет
e-mail: svetlya4ok-03@mail.ru

Лихачева Алёна Олеговна
магистрант
Сибирский федеральный университет
e-mail: likhacheva.alyona@mail.ru