ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.542

К ВОПРОСУ КАМЕРОНА О ТРИВИАЛЬНОСТИ В ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК СТАБИЛИЗАТОРА ДВУХ ТОЧЕК, НОРМАЛЬНОГО В СТАБИЛИЗАТОРЕ ОДНОЙ ИЗ НИХ

А. В. Коныгин

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. П. Камероном был поставлен вопрос о справедливости в этом случае равенства $G_{x,y} = 1$. Ранее автором было доказано, что если цоколь группы G не является степенью исключительной группы лиева типа, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$, то $G_{x,y} = 1$. В настоящей работе мы доказываем это в случае, когда цоколь группы G является степенью исключительной группы лиева типа, изоморфной $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$.

Ключевые слова: примитивная группа подстановок, регулярная подорбита.

A. V. Konygin. On Cameron's question about the triviality in primitive permutation groups of the stabilizer of two points that is normal in the stabilizer of one of them.

Assume that G is a primitive permutation group on a finite set X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, and $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. P. Cameron raised the question about the validity of the equality $G_{x,y} = 1$ in this case. The author proved earlier that, if the socle of G is not a direct power of an exceptional group of Lie type distinct from $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ and $E_8(q)$, then $G_{x,y} = 1$. In the present paper, we prove this in the case when the socle of G is a direct power of an exceptional group of Lie type isomorphic to $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, or $E_7(q)$.

Keywords: primitive permutation group, regular suborbit.

1. Введение

П. Камероном был сформулирован следующий вопрос (см. [10] и [4, вопрос 9.69]). Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x действует регулярно на G_x-орбите $G_x(y)$, содержащей точку y (т. е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, т. е. что $|G_x| = |G_x(y)|$? Отметим, что вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался и ранее (см. [22; 25; 26]).

Ясно, что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$ эквивалентно равенству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

(Pr) если $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G, то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Согласно теореме О'Нэна — Скотта (см. [16]) любая конечная примитивная группа подстановок подстановочно изоморфна группе одного из перечисленных ниже типов.

I. Примитивные группы с абелевой регулярной нормальной подгруппой.

II. Примитивные почти простые группы. Напомним, что группа G называется почти простой, если группа G изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(T)$, содержащей $\mathrm{Inn}(T)$, для некоторой конечной простой неабелевой группы T.

III. Примитивные группы с неабелевым непростым цоколем. Среди групп этого типа различают группы:

III(a) (simple diagonal action). Пусть S_k — симметрическая группа степени $k \geq 2$, T — простая неабелева группа и $W = \{\pi(a_1, \ldots, a_k) \mid a_i \in \mathrm{Aut}(T), \ \pi \in S_k, \ a_i a_j^{-1} \in \mathrm{Inn}(T), \ i, j \in \{1, \ldots, k\}\} \leq \mathrm{Aut}(T)\mathrm{wr}S_k$. Тогда представление группы W левыми сдвигами на множестве левых смежных классов группы W по подгруппе $W_x = \{\pi(a, \ldots, a) \mid a \in \mathrm{Aut}(T), \ \pi \in S_k\}$ является точным примитивным представлением степени $|T|^{k-1}$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(a), если она изоморфна подгруппе группы W в этом представлении, содержащей $\mathrm{soc}(W)$.

III(b) (product action). Пусть S_m — симметрическая группа степени $m \geq 2$ и H — примитивная группа типа II или III(a) на конечном множестве Y. Положим $W = H\mathrm{wr}S_m$. Группа W естественным образом действует на $X = Y^m$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(b), если она изоморфна подгруппе W в этом представлении, содержащей K^m, где $K = \mathrm{soc}(H)$, и G транзитивно переставляет m прямых множителей группы K^m.

III(c) (twisted wreath action). Конечная примитивная группа G имеет тип III(c), если она обладает единственной неабелевой регулярной нормальной подгруппой.

Ранее в работах автора [1–3] было доказано, что если G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, которая является либо группой типа I, III(a) или III(c), либо группой типа II с цоколем, не являющимся исключительной группой лиева типа, изоморфной $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ или $E_8(q)$, то для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**. Там же доказано, что если $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа III(b) и цоколь группы H не является исключительной группой лиева типа, изоморфной $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ или $E_8(q)$, то для группы подстановок G также выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для всех таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен. В настоящей работе рассмотрен случай, когда цоколь группы G является степенью исключительной группы лиева типа, изоморфной $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$. Таким образом, с учетом [1–3], доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что цоколь группы G не является исключительной группой лиева типа, изоморфной $E_8(q)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* **(Pr)***. В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

Теорема 2. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа* III(b) *и цоколь группы H не является исключительной группой лиева типа, изоморфной $E_8(q)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* **(Pr)***. В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

Таким образом, для доказательства справедливости свойства **(Pr)** для всех примитивных групп подстановок G на конечном множестве X (и для получения ответа на вопрос П. Камерона) остается рассмотреть случай, когда G — почти простая группа с цоколем, изоморфным $E_8(q)$, или $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа III(b) и цоколь группы H изоморфен $E_8(q)$.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Для произвольной конечной группы G и простого числа p в работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathrm{soc}(G)$ — цоколь группы G, $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, $F^*(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы G, $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G, $O^{p'}(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа H группы G

такая, что $|G/H|$ не делится на p. Для групп A и B через $A.B$ будет обозначаться (см. [8]) произвольная группа G с нормальной подгруппой H такой, что $H \cong A$ и $G/H \cong B$. В выражениях вида $A_1.A_2.A_3.\ldots.A_n$ будем предполагать левую ассоциативность, т. е. $A_1.A_2.A_3 = (A_1.A_2).A_3$ и т. д.

Пусть A и B — группы. Подгруппу D прямого произведения групп A и B назовем *диагональной*, если $A \cap D = B \cap D = 1$ и AB совпадает с DA или DB.

Приведем результаты, которые используются при доказательстве теорем 1 и 2.

Предложение 1 [1, предложение 8]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X\setminus\{x\}$. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $F(G_{x,y}) = 1$. В частности, $F(G_x) \cap G_{x,y} = F(G_y) \cap G_{x,y} = 1$ и $[F(G_x), G_{x,y}] = 1$.*

Предложение 2 [1, предложение 9]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что G_x имеет вид $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы и T — простая неабелева группа. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Предложение 3 [1, предложение 12]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что G_x имеет вид $A.T^k.B.S$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, $k \geq 2$, $S \in \{A_k, S_k\}$, $S \neq A_2$ и S действует точно на множестве изоморфных T прямых множителей группы* $\mathrm{soc}(A.T^k/A)$. *Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Предложение 4 [3, лемма 1]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $Z(G_x) = 1$.*

Пусть H — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве Y и $T = \mathrm{soc}(H)$. Будем говорить, что для группы подстановок H выполняется *свойство* **(Pr+)**, если для произвольных $x \in Y$ и $y \in Y \setminus \{x\}$ из $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $F(T_{x,y}) = 1$ следует, что $N_T(T_{x,y}) \neq T_x$. Заметим, что если T действует примитивно на Y (другими словами, если для $x \in Y$ подгруппа T_x группы T является максимальной), то из справедливости для группы подстановок T свойства (**Pr**) следует справедливость для групп подстановок T и H свойства (**Pr+**).

Свойство (**Pr+**) интересует нас в связи со следующими утверждениями.

Предложение 5 [1, предложение 17]. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Если для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr+**), *то для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Предложение 6 [1, предложение 18]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа* III(b) *и H — примитивная группа подстановок типа* II. *Если для группы подстановок H выполняется свойство* (**Pr+**), *то для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Предложение 7 [1, предложение 20]. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X с цоколем T и $x \in X$. Предположим, что T_x имеет вид $A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, а F — простая неабелева группа. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr+**).

Для формулировки необходимых при доказательстве теорем 1 и 2 результатов потребуются также следующие стандартные определения и обозначения (см., например, [21]). Пусть R — такая простая присоединенная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K ненулевой характеристики p и F — такой эндоморфизм алгебраической группы R, что $L = [R^F, R^F]$ является конечной простой исключительной группой лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$, где $q = p^m$ и $R^F = \{g \in R \mid F(g) = g\}$. Пусть Q — конечная группа такая, что $F^*(Q) = L$. Группа $\mathrm{Aut}(L)$ порождается сопряжениями посредством элементов из R^F, а также полевыми и графовыми автоморфизмами группы L, причем все эти автоморфизмы группы L продолжаются до автоморфизмов абстрактной группы R, коммутирующих с F. Таким образом, существует подгруппа $\tilde{Q}$ группы $C_{\mathrm{Aut}(R)}(F)$ такая, что $Q = \tilde{Q}/\langle F\rangle$, и, следовательно, Q действует на множестве всех F-допустимых подмножеств группы R. Через $N_Q(V)$ будем обозначать нормализатор в Q произвольного F-допустимого подмножества V группы R. Если D является F-допустимой замкнутой связной редуктивной подгруппой группы R, содержащей максимальный тор группы R, и $M = N_Q(D)$, то будем говорить, что M — *группа максимального ранга в* Q. Через $\mathcal{L}(R)$ — будем обозначать алгебру Ли группы R. Диаграммы Дынкина будут иметь стандартный вид (см. [23]).

Пусть X — простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K. Для доминантного веса λ пусть $V_X(\lambda)$ — рациональный неприводимый KX-модуль старшего веса λ и $T_X(\lambda)$ — неразложимый tilting-модуль старшего веса λ. Следуя [19; 23], будем писать λ для обозначения модуля $V_X(\lambda)$ и будем писать $a_1 \dots a_r$ вместо доминантного веса $\sum_{i=1}^r a_i\omega_i$, где ω_i — фундаментальные доминантные веса и $a_1, ..., a_r$ — неотрицательные целые числа (неоднозначность этих обозначений устраняется контекстом использования). Для KX-модулей M_i, $i \in \{1, \dots, k\}$, через $M_1 \mid M_2 \mid \dots \mid M_k$ будем обозначать рациональный KX-модуль V, имеющий такой ряд подмодулей $0 = V_k < V_{k-1} < \dots < V_1 < V_0 = V$, что $V_{i-1}/V_i \cong M_i$ для $1 \le i \le k$.

Пусть теперь X — полупростая алгебраическая группа и λ, γ, μ — доминантные веса такие, что модули $T_X(\lambda) = \mu \mid \lambda \mid \mu$ и $T_X(\gamma) = \mu \mid \gamma \mid \mu$ унисериальны. Следуя [19], через $\Delta(\lambda;\gamma)$ будем обозначать неразложимый модуль вида $\mu \mid (\lambda \oplus \gamma) \mid \mu$, точное определение которого приводится в [19, разд. 9.1].

Предложение 8 [18, теорема 2]. *Пусть $L = O^{p'}(R^F)$ — исключительная группа лиева типа над алгебраически замкнутым полем K ненулевой характеристики p, изоморфная одной из групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$. Предположим, что G — группа со свойством $L \le G \le \mathrm{Aut}(L)$ и M — максимальная подгруппа группы G. Тогда либо $F^*(M)$ является простой группой, либо выполняется одно из следующих утверждений.*

I. *$M = N_G(D^F)$, где $D = D^F$ является либо параболической подгруппой группы R, либо редуктивной подгруппой максимального ранга группы R.*

II. *$M = N_G(E)$, где E — элементарная абелева группа из* [24, теорема 1(II)].

III. *$M = C_G(\tau)$, где τ — автоморфизм простого порядка группы L, причем τ является либо полевым автоморфизмом, либо графовым автоморфизмом, либо произведением графового и полевого автоморфизмов группы L.*

IV. *$F^*(M)$ — группа из* [18, табл. 3]:

a) $L = E_6^\epsilon(q)$, $F^*(M) \cong L_3(q) \times G_2(q)$;

b) $L = E_6^\epsilon(q)$, $F^*(M) \cong U_3(q) \times G_2(q)$, $q > 2$;

c) $L = E_7(q)$, $F^*(M) \cong L_2(G) \times L_2(q)$, $p > 3$;

d) $L = E_7(q)$, $F^*(M) \cong L_2(q) \times G_2(q)$, $p > 2$, $q > 3$;

e) $L = E_7(q)$, $F^*(M) \cong L_2(q) \times F_4(q)$, $q > 3$;

f) $L = E_7(q)$, $F^*(M) \cong G_2(q) \times PSp_6(q)$.

Предложение 9. *Пусть G — транзитивная группа подстановок на конечном множестве X. Тогда $|G_{x,y}| \ge \dfrac{|G_x|^2}{|G|}$. В частности, если $G_x = A \times B$ и $G_{x,y} = B$, то $|G| \ge |A|^2|B|$.*

Доказательство. Имеем $|X| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$, $|G_x(y)| = \dfrac{|G_x|}{|G_{x,y}|}$ и $|X| \ge |G_x(y)|$. Следовательно, $\dfrac{|G|}{|G_x|} \ge \dfrac{|G_x|}{|G_{x,y}|}$.

3. Доказательство теорем 1 и 2

В силу предложений 5 и 6 для доказательства теорем 1 и 2 достаточно показать, что если G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $\mathrm{soc}(G)$ — исключительная группа лиева типа, изоморфная $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$, то для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr+)**.

Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $T := \mathrm{soc}(G)$ — исключительная группа лиева типа, изоморфная $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. По предложению 8 либо $F^*(G_x)$ является простой группой, либо для G_x выполняется одно из утверждений I–IV предложения 8.

Если $F^*(G_x)$ является простой группой, то G_x — почти простая группа. Тогда $T_x/\mathrm{soc}(T_x)$ является разрешимой группой и в силу предложения 7 для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr+)**.

Таким образом, не теряя общности далее будем считать, что для G_x выполняется одна из возможностей I–IV предложения 8.

Случай 1. Для G_x выполняется утверждение I предложения 8, т. е. $G_x = N_G(D^F)$, где $D = D^F$ является либо параболической подгруппой группы R, либо редуктивной подгруппой максимального ранга группы R.

Пусть $D = D^F$ является параболической подгруппой группы R. Тогда G_x — параболическая подгруппа группы R и, следовательно, $C_{G_x}(O_r(G_x)) \leq O_r(G_x)$ для некоторого простого числа r. Предположим, что $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $F(T_{x,y}) = 1$. Поскольку $T_{x,y} \cap O_r(G_x) = 1$, $[O_r(G_x), T_{x,y}] = 1$ и, следовательно, $T_{x,y} \leq C_{G_x}(O_r(G_x)) \leq O_r(G_x)$. Таким образом, $T_{x,y} = 1$ и для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr+)**.

Пусть $D = D^F$ является редуктивной подгруппой максимального ранга группы R. Все редуктивные подгруппы максимального ранга конечных исключительных групп лиева типа перечислены в [17, табл. 5.1]. Заметим, что если G содержит графовый автоморфизм, то $T \cong E_6(q)$, $N_{R^F}(D) \cong h.(P\Omega_{10}(q) \times (q-1)/h).h$, где $h = (4, q-1)$, и свойство **(Pr+)** для группы G следует из предложения 7. Поэтому далее без ограничения общности можно предполагать, что $G = R^F$. Тогда $G_x = H^F$, где H — F-инвариантная замкнутая подгруппа, максимальная среди F-инвариантных замкнутых подгрупп группы R, имеющих положительную размерность. Далее в случаях 1.1–1.8 будет показано выполнение свойства **(Pr)** для группы G. С учетом максимальности T_x в T отсюда будет следовать выполнение свойства **(Pr+)** для группы G.

Пусть $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Проверим, что $G_{x,y} = 1$. Поскольку из $G_{x,y} \trianglelefteq G_y$ следует $G_{x,y} = 1$, то далее будем предполагать, что $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$. Покажем, что это приведет к противоречию.

Случай 1.1. $T \cong E_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong d.(L_2(q) \times L_6^\epsilon(q)).de$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$, $d = (2, q-1)$ и $e = (3, q-\epsilon)$.

Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с предложением 4. Поэтому имеем $d = 1$ и $p = 2$. Из [23, (1.8)] следует, что $H \cong A_1 \circ A_5$ (A_1, A_5 — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $A_5(K)$ соответственно), при этом векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет в указанных обозначениях следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\mathcal{L}(A_1) \oplus \mathcal{L}(A_5) \oplus (1 \otimes 00100).$$

Пусть A, B — подгруппы группы G_x такие, что $A \cong L_2(q)$, $B \cong L_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong (A \times B).e$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее рассмотрим оставшийся случай, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Из [12, разд. 2.11] и [13, теорема 2.3(3)] следует, что неприводимые слагаемые векторного пространства $\mathcal{L}(R)$ как KH-модуля останутся неприводимыми при ограничении на G_x. Так как A сопряжена в G с D, то A_1^F и D имеют эквивалентные K-представления на $\mathcal{L}(R)$.

Поскольку A_1^F действует тривиально на $\mathcal{L}(A_5)$, а D не имеет на $\mathcal{L}(A_1)$ одномерных инвариантных подпространств, то $1 \otimes 00100$ как KD-модуль имеет прямое одномерное слагаемое. В силу [9, теорема 2.1] KD-модуль 00100 имеет двумерное прямое слагаемое, при этом p не делит 2. Противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.2. $T \cong E_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong e.(L_3^\epsilon(q))^3.e^2.S_3$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$ и $e = (3, q - \epsilon)$.

Из [17, пример 1.4] и предложения 3 следует, что для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.3. $T \cong E_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong f.(L_3(q^2) \times L_3^{-\epsilon}(q)).g.2$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$, $f = (3, q + \epsilon)$ и $g = (3, q^2 - 1)$.

Если $f = 3$, то $Z(G_x) \neq 1$. Поэтому, не теряя общности далее считаем, что $f = 1$, т. е. $(3, q + \epsilon) = 1$. Поскольку из [11] следует, что при $\epsilon = -1$ должно выполняться $(3, q - 1) = 3$, то имеем $\epsilon = 1$, $(3, q + 1) = 1$, $g = (3, q^2 - 1) = (3, q - 1)$ и $G_x \cong (SL_3(q^2) \times SU_3(q)).2$. Следуя [7], рассмотрим представление группы $G \cong E_6(q)$ на 27-мерном пространстве V над $\mathbb{F}_q$. Согласно [7, (3.3)] существуют 9-мерное подпространство U и 18-мерное подпространство W пространства V и подгруппа $M \cong SU_3(q)$ группы G такие, что $V = U \oplus W$, $U = C_V(M)$, $C_G(M) \cong SL_3(q^2)$ и группа $N_G(W)$ имеет вид $MC_G(M)\langle t \rangle$, где t индуцирует графовый автоморфизм на $C_G(M)$. Если $\mathbb{K}$ — квадратичное расширение поля $\mathbb{F}_q$, то (см. [7, (3.3)]) подпространство W, рассматриваемое как $\mathbb{K}\,(MC_G(M))$-модуль, является $\mathbb{K}$-тензорным произведением естественных модулей для $M \cong SU_3(q)$ и $C_G(M) \cong SL_3(q^2)$. Из [7, (3.3.4)] следует, что тензорное произведение $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}_q} C_V(M)$ изоморфно как $\mathbb{K}\,C_G(M)$-модуль тензорному произведению $N \otimes N^\sigma$, где N — естественный $\mathbb{K}\,C_G(M)$-модуль и $\langle \sigma \rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F}_q)$.

Поскольку в группе G имеется один класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных G_x, и никакая не входящая в этот класс максимальная подгруппа группы G не содержит подгрупп, изоморфных G_x (см. [6, разд. 9; 7, (3.3)]), можно считать, что $G_x = N_G(W)$. Положим $A = M$ и $B = C_G(M)$. Тогда $\mathrm{soc}(G_x) = A \times B$. С учетом $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$ получаем, что $G_{x,y} \in \{A, B\}$ и подгруппа $G_{x,y}$ сопряжена в группе G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку A не содержит подгрупп, изоморфных группе B, подгруппа D сопряжена в группе G с A. Так как A действует тривиально на $U = C_V(M)$, по теореме Крулля — Шмидта (см. [5, (4.15)]) разложение пространства V на неразложимые относительно D подпространства должно содержать не менее 9 одномерных подпространств. Однако легко показать (используя [3, предложение 12]), что V имеет единственное одномерное D-инвариантное подпространство. Противоречие.

Случай 1.4. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong d.(L_2(q) \times P\Omega_{12}^+(q)).d$, где $d = (2, q - 1)$.

Пусть A, B — подгруппы G_x такие, что $A \cong L_2(q)$, $B \cong P\Omega_{12}^+(q)$ и $G_x \cong d.(A \times B).d$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $q = 2$ или $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Но тогда получаем противоречие с предложением 9.

Случай 1.5. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong e.(L_3^\epsilon(q) \times L_6^\epsilon(q)).de.2$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$, $e = (3, q - \epsilon)$ и $d = (2, q - 1)$.

Если $e = 3$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с предложением 4. Поэтому имеем $e = 1$. Из [23, (1.8)] следует, что $H \cong A_2 \circ A_5$ (A_2 и A_5 — полупростые алгебраические группы типов $A_2(K)$ и $A_5(K)$ соответственно), при этом векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\mathcal{L}(A_2) \oplus \mathcal{L}(A_5) \oplus (10 \otimes 01000) \oplus (01 \otimes 00010).$$

Пусть A, B — подгруппы G_x такие, что $A \cong L_3^\epsilon(q)$, $B \cong L_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong (A \times B).d.2$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Из [12, разд. 2.11] и [13, теорема 2.3(3)] следует, что неприводимые слагаемые векторного пространства $\mathcal{L}(R)$ как KH-модуля останутся неприводимыми при ограничении на G_x. Так как A сопряжена в G с D, то A_2^F и D имеют эквивалентные K-представления на $\mathcal{L}(R)$. Поскольку A_2^F действует тривиально на $\mathcal{L}(A_5)$, а D не имеет на $\mathcal{L}(A_2)$ одномерных инвариантных подпространств, $(10 \otimes 01000) \oplus (01 \otimes 00010)$ как KD-модуль имеет прямое одномерное слагаемое. Без ограничения общности будем считать, что $10 \otimes 01000$ как KD-модуль имеет прямое одномерное слагаемое. В силу [9, теорема 2.1] KD-модуль 01000 имеет трехмерное прямое слагаемое, дуальное к слагаемому 10. Но тогда KD-модуль $10 \otimes 01000$ содержит двумерное неразложимое прямое слагаемое. Противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)$ как KA-модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.6. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong d^2.(L_2(q)^3 \times P\Omega_8^+(q)).d^3.S_3$, где $d = (2, q-1)$, а d^2 и d^3 обозначают абелевы группы порядков d^2 и d^3 соответственно.

Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с предложением 4. Поэтому имеем $d = 1$. Если $F^*(G_{x,y})$ не содержит прямых множителей, изоморфных $L_2(q)$, или содержит прямой множитель, изоморфный $P\Omega_8^+(q)$, то с учетом $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ имеем, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее предполагаем, что $F^*(G_{x,y})$ — прямое произведение групп, изоморфных $L_2(q)$.

Поскольку из [17] следует, что действие G_x сопряжением на прямых множителях вида $L_2(q)$ группы G_x транзитивно, то $F^*(G_{x,y}) \cong L_2(q)^3$ и, следовательно, $P\Omega_8^+(q)$ содержит подгруппу J, изоморфную $L_2(q)^3$. Из [14] следует, что тогда J содержится в подгруппе группы $P\Omega_8^+(q)$ вида $[q^{11}] : (\Omega_4^+(q) \times L_2(q))$ и, следовательно, $C_{P\Omega_8^+(q)}(J) \neq 1$. Противоречие.

Случай 1.7. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong (L_2(q^3) \times {}^3D_4(q)).3d$, где $d = (2, q-1)$.

Пусть A, B — подгруппы G_x такие, что $A \cong L_2(q^3)$, $B \cong {}^3D_4(q)$ и $G_x \cong (A \times B).3d$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее рассмотрим оставшийся случай, когда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Из [15] следует, что если H — подгруппа B, изоморфная A, то $C_B(H) \neq 1$. Следовательно, $N_G(A)$ не содержится в G_x. Противоречие.

Случай 1.8. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong d^3.(L_2(q)^7).d^4.L_3(2)$, где $q > 2$, $d = (2, q-1)$, а d^3 и d^4 обозначают абелевы группы порядков d^3 и d^4 соответственно.

Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с предложением 4. Поэтому $d = 1$. Из [17] следует, что $L_3(2)$ действует дважды транзитивно на прямых множителях группы $\mathrm{soc}(G_x)$, изоморфных $L_2(q)$. Поэтому либо $F^*(G_{x,y}) = 1$, либо $F^*(G_{x,y}) \cong L_2(q)^7$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 2. Для G_x выполняется утверждение II предложения 8.

Имеем $G_x = N_G(E)$, где E — элементарная абелева группа из [24, теорема 1(III)]. В частности, группа G_x имеет вид $A.K.B$, где A, B — разрешимые группы и K — простая неабелева группа. Следовательно, по предложению 7 для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 3. Для G_x выполняется утверждение III предложения 8.

Имеем $G_x = C_G(\tau)$, где τ — автоморфизм простого порядка группы $\mathrm{soc}(G)$, причем τ является либо полевым автоморфизмом, либо графовым автоморфизмом, либо произведением графового и полевого автоморфизмов группы $\mathrm{soc}(G)$. Из доказательства [18, лемма 3.1] следует, что в этом случае либо $F^*(G_x)$ является простой группой, либо $F(G_x) \neq 1$ и $F(G_x) \leq Z(G_x)$. Если $F^*(G_x)$ является простой группой, то по предложению 7 для группы G выполняется свойство **(Pr+)**. Если $F(G_x) \neq 1$ и $F(G_x) \leq Z(G_x)$, то $Z(G_x) \neq 1$. Противоречие с предложением 4.

Случай 4. $G = R^F$ и $G_x = H^F$, где H — F-инвариантная замкнутая подгруппа группы R и для G_x выполняется утверждение IV предложения 8, т. е. $F^*(G_x) = A \times B$ и реализуется одна из следующих возможностей:

a) $T \cong E_6^{\pm}(q)$, $A \cong L_3(q)$, $B \cong G_2(q)$;

b) $T \cong E_6^{\pm}(q)$, $A \cong U_3(q)$, $B \cong G_2(q)$, $q > 2$;

c) $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(G)$, $B \cong L_2(q)$, $p > 3$;
d) $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$, $B \cong G_2(q)$, $p > 2$, $q > 3$;
e) $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$, $B \cong F_4(q)$, $q > 3$;
f) $T \cong E_7(q)$, $A \cong G_2(q)$, $B \cong PSp_6(q)$.

Предположим, что для группы подстановок G не выполняется свойство **(Pr+)**, т. е. для некоторого $y \in X \setminus \{x\}$ выполняется $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$, $F(T_{x,y}) = 1$ и $N_T(T_{x,y}) = T_x$. Покажем, что это невозможно.

Сначала докажем, что $\mathrm{soc}(T_{x,y}) \in \{A, B\}$. Имеем $T_x \trianglelefteq G_x$ и $G_x/T_x = G_x/(G_x \cap T) \cong G_xT/T = G/T$. Отсюда получаем, что G_x/T_x — разрешимая группа и, следовательно, $\mathrm{soc}(G_x) = A \times B \trianglelefteq T_x$. Поскольку $\mathrm{soc}(G_x) = F^*(G_x)$, то

$$C_{G_x}(\mathrm{soc}(G_x)) \leq \mathrm{soc}(G_x).$$

Таким образом, группа $G_x/\mathrm{soc}(G_x)$ изоморфно вкладывается в группу $\mathrm{Out}(A \times B)$. Следовательно, группа $G_x/\mathrm{soc}(G_x)$ разрешима и, с учетом $\mathrm{soc}(G_x) \leq T_x$, получаем, что T_x имеет вид $(A\times B).H$, где H — разрешимая группа, действующая точно на $A\times B$. Поскольку $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$, отсюда следует, что $\mathrm{soc}(T_{x,y}) \in \{1, A, B, A\times B\}$. Также $T_{x,y} \neq 1$, поэтому $\mathrm{soc}(T_{x,y}) \neq 1$. Предположим, что $\mathrm{soc}(T_{x,y}) = A\times B$. Тогда для $N := \mathrm{soc}(T_{x,y}) \cap \mathrm{soc}(G_y) \trianglelefteq T_{x,y}$ имеем $N \in \{1, A, B, A\times B\}$. Поскольку $\mathrm{soc}(G_x) \neq \mathrm{soc}(G_y)$, $N \neq A \times B$. Но тогда $G_y/\mathrm{soc}(G_y)$ не является разрешимой группой. Противоречие с разрешимостью группы $G_x/\mathrm{soc}(G_x)$. Следовательно, $\mathrm{soc}(T_{x,y}) \in \{A, B\}$.

Покажем, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку $\mathrm{soc}(T_{x,y}) \in \{A, B\}$, то $N \in \{1, \mathrm{soc}(T_{x,y})\}$. Если $N = 1$, то $G_y/\mathrm{soc}(G_y)$ не является разрешимой группой. Противоречие с разрешимостью группы $G_x/\mathrm{soc}(G_x)$. Поэтому $N = \mathrm{soc}(T_{x,y}) \leq \mathrm{soc}(G_y) \cong A \times B$. Кроме того, $\mathrm{soc}(T_{x,y}) \ntrianglelefteq \mathrm{soc}(G_y)$ (иначе $\mathrm{soc}(T_{x,y}) \trianglelefteq \langle T_x, G_y\rangle$, противоречие). Ввиду $N_G(\mathrm{soc}(T_{x,y})) \not\geq G_x$ группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Случай 4.1. $T \cong E_6^\epsilon(q)$ и либо $A \cong L_3(q)$ и $B \cong G_2(q)$, либо $A \cong U_3(q)$, $B \cong G_2(q)$ и $q > 2$.

Тогда (см. [19]) $H \cong A_2 \circ G_2$, где A_2, G_2 — полупростые алгебраические группы типов $A_2(K)$ и $G_2(K)$ соответственно.

Если $p > 3$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(11 \otimes 00) \oplus (00 \otimes 01) \oplus (11 \otimes 10),$$

где, согласно [20], $\dim(11) = 8$, $\dim(01) = 14$ и $\dim(10) = 7$. Таким образом, из разложения $\mathcal{L}(R)'$ получаем, что $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет 14 прямых одномерных слагаемых. Поскольку группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$, $\mathcal{L}(R)'$ имеет столько же прямых одномерных слагаемых и как KD-модуль. Противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 3$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(11 \otimes 00) \oplus \Delta(11 \otimes 10; 00 \otimes 01),$$

где, согласно [20], $\dim(11) = 7$, $\dim(01) = 7$, $\dim(10) = 7$ и $\Delta(11 \otimes 10; 00 \otimes 01)$ имеет вид $\mu \mid (11\otimes 10) \oplus (00\otimes 01) \mid \mu$, где $\dim(\mu) = 7$. Поскольку $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль и как KD-модуль имеет разное количество композиционных факторов размерности 7, получаем противоречие с тем, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 2$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(11 \otimes T(10)) \oplus (00 \otimes 01),$$

где, согласно [20], $\dim(11) = 8$, $\dim(01) = 6$ и $\dim(T(10)) = 9$. Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку все композиционные факторы $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуля имеют размерности 1 или 8, получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 4.2. $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$ и $B \cong L_2(q)$, где $p > 3$.

Из [19] следует, что $H \cong A_1 \circ A_1$, где A_1 — полупростая алгебраическая группа типа $A_1(K)$.

Если $p > 7$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(2 \otimes 8) \oplus (4 \otimes 6) \oplus (6 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (4 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 2).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет три прямых одномерных слагаемых, и $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль имеет три прямых одномерных слагаемых. Следовательно, некоторый KD-модуль вида $s \otimes t$, где $(s,t) \in \{(2,8),(4,6),(6,4),(2,4),(4,2)\}$, имеет прямое одномерное слагаемое, что противоречит [9, теорема 2.1] и [12, разд. 2.11]. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 7$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(2 \otimes T(8)) \oplus (4 \otimes 6) \oplus (6 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 2).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет три прямых одномерных слагаемых, и $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль имеет три прямых одномерных слагаемых. Применяя [9, теорема 2.1] и [12, разд. 2.11] к слагаемым $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуля получаем противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 5$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(2 \otimes T(8)) \oplus (4 \otimes T(6)) \oplus (T(6) \otimes 4) \oplus (0 \otimes 2).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Так как $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль не имеет прямых одномерных слагаемых, то и $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль не имеет прямых одномерных слагаемых. Теперь, используя [20] и сравнивая композиционные факторы $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуля и $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуля, получаем противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 4.3. $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$ и $B \cong G_2(q)$, где $p > 2$ и $q > 3$.

Из [19] следует, что $H \cong A_1 \circ G_2$, где A_1 и G_2 — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $G_2(K)$ соответственно.

Если $p > 3$ и $p \neq 7$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(4 \otimes 10) \oplus (2 \otimes 00) \oplus (2 \otimes 00) \oplus (0 \otimes 01).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль имеет прямое неприводимое 14-мерное слагаемое (подпространство $0 \otimes 01$), и $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет прямое неприводимое слагаемое такой размерности. Используя [20] для подсчета размерностей неразложимых слагаемых в разложении $\mathcal{L}(R)'$

как KA-модуля, получаем противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 7$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(4 \otimes 10) \oplus (2 \otimes T(20)) \oplus (0 \otimes 01).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль имеет прямое неприводимое 14-мерное слагаемое, то и $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет прямое неприводимое слагаемое такой размерности. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 3$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\Delta(4 \otimes 10; 0 \oplus 01) \oplus (2 \otimes 20) \oplus (2 \otimes 00).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль имеет три прямых неприводимых 27-мерных слагаемых, и $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет три прямых неприводимых слагаемых размерности 27. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 4.4. $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$ и $B \cong F_4(q)$, где $q > 3$.

Из [19] следует, что $H \cong A_1 \circ F_4$, где A_1 и F_4 — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $F_4(K)$ соответственно.

Если $p \geq 3$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет одно из следующих разложений на неприводимые слагаемые:

$$(2 \otimes 0001) \oplus (2 \otimes 0000) \oplus (0 \otimes 1000)$$

или

$$(2 \otimes T(0001)) \oplus (0 \otimes 1000).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль имеет прямое неприводимое 52-мерное слагаемое, и $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет прямое неприводимое слагаемое такой размерности. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 2$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\Delta(2 \otimes 0001; 0 \otimes 1000) \oplus (2 \otimes 0000).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль имеет композиционный фактор размерности 26, и $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет композиционный фактор размерности 26. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 4.5. $T \cong E_7(q)$, $A \cong G_2(q)$ и $B \cong PSp_6(q)$.

Из [19] следует, что $H \cong G_2 \circ C_3$, где G_2 и C_3 — полупростые алгебраические группы типов $G_2(K)$ и $C_3(K)$ соответственно. Кроме того, из [19, табл. (10.1)] получаем, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH-модуль, имеет, в зависимости от q, одно из следующих разложений на неприводимые слагаемые:

$$(10 \otimes 010) \oplus (01 \otimes 000) \oplus (00 \otimes 200),$$

или

$$\Delta(10 \otimes 010; 01 \otimes 000) \oplus (00 \otimes 200),$$

или

$$\Delta(10 \otimes 010; 00 \otimes 200) \oplus (01 \otimes 000).$$

Ранее мы показали, что группа $\mathrm{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку во всех случаях, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD-модуль имеет прямое неприводимое 21-мерное слагаемое, и $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуль имеет прямое неприводимое слагаемое такой размерности. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA-модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Доказательство теорем 1 и 2 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коныгин А.В.** О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 387–406.
2. **Коныгин А.В.** О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них: случай, когда цоколь есть степень спорадической простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 159–167.
3. **Коныгин А.В.** К вопросу П. Камерона о примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 187–198.
4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2010. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/alglogf.html .
5. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представления конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва: Наука, 1969. 669 с.
6. **Aschbacher M.** The 27-dimensional module for E_6, I // Invent. Math. 1987. Vol. 89, no. 1. P. 159–195.
7. **Aschbacher M.** The 27-dimensional module for E_6, III // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 321, no. 1. P. 45–84.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Benson D., Carlson J.** Nilpotent elements in the Green ring // J. Algebra. 1986. Vol. 104, no. 2. P. 329–350.
10. **Cameron P.J.** Suborbits in transitive permutation groups // Combinatorics / eds. M. Hall Jr. and J. H. van Lint (Proc. NATO Advanced Study Inst., Breukelen, 1974). Part 3: Combinatorial group theory. Math. Centre Tracts. No. 57. Amsterdam, 1974. P. 98–129.
11. **Deriziotis D.I., Liebeck M.W.** Centralizers of semisimple elements in finite twisted groups of Lie type // J. London Math. Soc. 1985. Vol. s2-31, iss. 1. P. 48–54.
12. **Humphreys J.E.** Modular representations of finite groups of Lie type Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 206 p.
13. **Hiss G.** Finite groups of Lie type and their representations // Groups St Andrews 2009 in Bath. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. Vol. 1. P. 1–40. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 387).
14. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal group $P\Omega_8(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1985. Vol. 110, no. 1. P. 173–242.
15. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the Steinberg triality group ${}^3D_4(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 115, no. 1. P. 182–199.

16. **Liebeck M.W., Praeger Ch.E., Saxl J.** On the O'Nan–Scott theorem for finite primitive permutation groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. Vol. 44, no. 3. P. 389–396.
17. **Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325.
18. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // Geom. Dedicata. 1990. Vol. 35, no. 1–3. P. 353–387.
19. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** The maximal subgroups of positive dimension in exceptional algebraic groups // Mem. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 169, no. 802. 227 p.
20. **Lübeck F.** Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic // LMS J. Comput. Math. 2001. Vol. 4. P. 135–169.
21. **Malle G., Testerman D.** Linear algebraic groups and finite groups of Lie type. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 309 p.
22. **Reitz H.L.** On primitive groups of odd order // Amer. J. Math. 1904. Vol. 26. P. 1–30.
23. **Seitz G.M.** Maximal subgroups of exceptional algebraic groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 90, no. 441. 197 p.
24. The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic / A.M. Cohen [et. al.]. // Proc. London Mat. Soc. (3). 1992. Vol. 64. P. 21–48.
25. **Weiss M.J.** On simply transitive groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 401–405.
26. **Wielandt H.** Finite permutation groups. New York: Acad. Press, 1964. 114 p.

Коныгин Антон Владимирович

Поступила 02.03.2015

канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: konygin@imm.uran.ru