ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.213

ДВУХШАГОВАЯ ЗАДАЧА ХЕДЖИРОВАНИЯ ЕВРОПЕЙСКОГО КОЛЛ-ОПЦИОНА ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ТРАНЗАКЦИЙ

А. И. Кибзун, В. Р. Соболь

Исследуется двухшаговая задача минимизации средних затрат на хеджирование европейского колл-опциона. Хеджирование осуществляется путем покупки-продажи базового актива. Предполагается, что длительности операций купли-продажи активов на рынке случайны и имеют экспоненциальное распределение. Для решения задачи используется метод динамического программирования. Получено выражение для математического ожидания функции будущих потерь на последнем шаге. Предложен численный алгоритм для поиска оптимальной стратегии на первом шаге. Приводится пример использования алгоритма.

Ключевые слова: европейский опцион, хеджирование опционов, динамическое программирование.

A. I. Kibzun, V. R. Sobol'. A two-step problem of hedging a European call option under a random duration of transactions.

A two-step problem of minimizing average costs of hedging a European call option is studied. The hedging is implemented by buying and selling underlying assets. It is assumed that the durations of asset purchase and sale operations at the market are random and exponentially distributed. The problem is solved by the dynamic programming method. An expression for the mathematical expectation of the function of future losses at the final step is obtained. A numerical algorithm for finding an optimal strategy at the first step is proposed. An example of using the algorithm is given.

Keywords: European option, option hedging, dynamic programming,

Введение

В статье рассматривается задача хеджирования с точки зрения продавца европейского колл-опциона. Опцион, один из производных финансовых инструментов, представляет собою срочный договор, по которому потенциальный покупатель или потенциальный продавец актива (товара, ценной бумаги) получает право совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговоренной цене, называемой ценой поставки, в определенный договором момент в будущем или на протяжении определенного отрезка времени. Указанный в договоре актив называется базовым. Различают опционы на продажу (опционы типа пут) и на покупку (колл). В плане сроков исполнения контракта выделяют европейский, американский и бермудский (квазиамериканский) виды опционов. Европейский опцион может быть исполнен только в последний день своего срока действия (времени жизни), американский опцион — в любой день до истечения срока действия, а бермудский опцион — только в заранее оговоренные в контракте даты до истечения срока действия опциона.

Продавец колл-опциона, получив премию за опцион, принимает на себя риск, связанный с возможным ростом рыночной стоимости базового актива выше уровня цены поставки. Продавец может частично застраховаться от риска, затратив на это часть премии (стоимости опциона). Для этого он формирует инвестиционный портфель, состоящий из данного опциона, других опционов, фьючерсов, облигаций, акций и пр. В простейшем случае портфель состоит из базового актива, оговоренного в контракте. Этим портфелем продавец может управлять так, чтобы доходность портфеля хотя бы частично компенсировала риск опционной позиции. Такая стратегия управления называется хеджированием, а лицо, управляющее портфелем, — хеджером.

В настоящий момент результаты работ, посвященных исследованию задач хеджирования и оценивания опционов, во многом основываются на предположениях модели Блэка — Шоулза [1]; в них не учитывается тот факт, что каждая операция по купле-продаже активов занимает определенное время. Предполагается, что при формировании инвестиционного портфеля и управлении им хеджер может совершать сделки мгновенно. Данное предположение приемлемо в случае, когда базовый актив является достаточно ликвидным. Когда же базовый актив обладает низкой ликвидностью, т. е. сделки по покупке и продаже данного актива происходят достаточно редко, необходимо учитывать при управлении хеджирующим портфелем заранее неизвестную длительность операций (транзакций).

Математические модели, описывающие длительности рыночных транзакций, рассмотрены, например, в работах [2;3]. В указанных работах выдвигается предположение, что длительности рыночных транзакций случайны и имеют гамма-распределение, частным случаем которого является экспоненциальное распределение.

Многошаговые модели рынка и задачи хеджирования подробно исследованы в монографии Г. Фёльмера и А. Шида [4]. Многошаговая задача хеджирования европейского опциона на неполных рынках исследовалась, например, в работах В. М. Хаметова и О. В. Зверева [5;6]. Стратегия последовательного хеджирования, применимая для опционов и европейского, и американского типов, ранее изучалась в работе [7], однако полученные в статье результаты не удается обобщить для ситуации случайной длительности транзакций.

В данной работе рассмотрена двухшаговая задача хеджирования колл-опциона европейского типа в предположении, что длительность операций купли-продажи базового актива случайна и имеет экспоненциальное распределение.

1. Процедура хеджирования

Пусть цена поставки равна K, а время жизни опциона — T. В соответствии с контрактом хеджер обязан продать держателю опциона V единиц базового актива по цене K, если цена базового актива в момент времени T превышает уровень цены поставки K.

Процесс $S(t)$ ценообразования базового актива определим следующим образом [8]:

$$S(t) = S + \beta t + \sigma W(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1.1}$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, S — стартовая цена базового актива, β — коэффициент линейного сноса, характеризующий общий тренд, а σ — волатильность, характеризующая степень неопределенности будущих цен.

Будем считать, что время τ исполнения операции купли-продажи базового актива случайно и имеет экспоненциальное распределение, параметр которого зависит от объема продаваемых или покупаемых активов, т. е.

$$\tau \sim \mathrm{E}\Big(-\frac{\lambda}{|u|}\Big), \quad \lambda > 0,$$

где u — количество приобретаемых ($u > 0$) или продаваемых ($u < 0$) единиц базового актива, а λ — заданный параметр, характеризующий среднее время покупки или продажи единицы базового актива.

Предположим, что продавец опциона (хеджер) хеджирует контракт (покупает или продает базовый актив) в два этапа: в начальный момент времени $t = 0$ хеджер приобретает u_1 единиц базового актива, а в момент τ_1 $\Big(\tau_1 \sim \mathrm{E}\Big(-\frac{\lambda}{|u_1|}\Big)\Big)$ завершения первой покупки покупает еще u_2 единиц базового актива, если контракт еще не истек. Длительность второй операции купли-продажи τ_2 также случайна и имеет экспоненциальное распределение $\Big(\tau_2 \sim \mathrm{E}\Big(-\frac{\lambda}{|u_2|}\Big)\Big)$. При этом в случае, когда хеджер в момент T истечения срока жизни опциона не может предоставить необходимое количество единиц V базового актива, он может докупить необходимое количество актива в момент времени T по более высокой цене, равной

$S(T)(1+r)$, где $r > 0$ — надбавка за "срочность" операции. По истечении времени жизни опциона хеджер продает оставшиеся единицы базового актива.

Обозначим потери хеджера как $L(u_1, u_2, T)$. Для описанной выше модели возможны следующие варианты.

1. Время исполнения первой транзакции τ_1 превышает время жизни опциона T и цена базового актива ниже уровня цены поставки, т. е. $S(T) < K$. Опцион остается неисполненным и в момент τ_1 завершения первой транзакции хеджер продает имеющийся объем базового актива, купленный на первом шаге. В этом случае

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) - u_1 S(\tau_1).$$

2. Время исполнения первой транзакции τ_1 превышает время жизни опциона T и цена базового актива выше уровня цены поставки, т. е. $S(T) \geq K$. В этом случае в момент T исполнения опциона хеджер приобретает V единиц базового актива по цене $S(T)(1+r)$ и продает держателю опциона. В момент τ_1 завершения первой транзакции хеджер продает имеющийся объем u_1 базового актива по цене $S(\tau_1)$. При этом

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + V S(T)(1+r) - VK - u_1 S(\tau_1).$$

3. Время исполнения первой транзакции τ_1 не превышает время жизни опциона T, при этом $\tau_1 + \tau_2 > T$, а цена базового актива ниже уровня цены поставки, т. е. $S(T) < K$. В этом случае опцион остается неисполненным, и в момент $\tau_1 + \tau_2$ завершения второй транзакции хеджер продает имеющийся объем базового актива по цене $S(\tau_1 + \tau_2)$. Потери хеджера вычисляются как

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2) S(\tau_1 + \tau_2).$$

4. Время исполнения первой транзакции τ_1 не превышает время жизни опциона T, при этом $\tau_1 + \tau_2 > T$, а цена базового актива выше уровня цены поставки, т. е. $S(T) \geq K$. В момент T исполнения опциона хеджер приобретает недостающий объем базового актива $V - u_1$ по цене $S(T)(1+r)$ и продает держателю опциона по цене поставки K. В момент $\tau_1 + \tau_2$ завершения второй транзакции хеджер продает имеющийся у него объем базового актива u_2. В этом случае

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) + (V - u_1) S(T)(1+r) - VK - u_2 S(\tau_1 + \tau_2).$$

5. Суммарное время исполнения транзакции $\tau_1 + \tau_2$ не превышает время жизни опциона T, и цена базового актива ниже уровня цены поставки, т. е. $S(T) < K$. В этом случае в момент T истечения срока жизни опциона хеджер продает имеющиеся $u_1 + u_2$ единиц базового актива по цене $S(T)$. Тогда потери хеджера определяются как

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2) S(T).$$

6. Суммарное время исполнения транзакции $\tau_1 + \tau_2$ не превышает время жизни опциона T и цена базового актива выше уровня цены поставки, т. е. $S(T) \geq K$. В этом случае в момент T исполнения опциона хеджер приобретает недостающий объем базового актива $V - u_1 - u_2$ по цене $S(T)(1+r)$ и продает держателю опциона по цене поставки K. При этом

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) + (V - u_1 - u_2) S(T)(1+r) - VK.$$

В результате получаем, что функция потерь задается соотношением

$$L(u_1,u_2,T)=\begin{cases} u_1S_0-u_1S(\tau_1), & \text{если } \tau_1>T, S(T)<K;\\ u_1S_0+VS(T)(1+r)-VK-u_1S(\tau_1), & \text{если } \tau_1>T, S(T)\ge K;\\ u_1S(0)+u_2S(\tau_1)-(u_1+u_2)S(\tau_1+\tau_2), & \text{если } \tau_1\le T, \tau_1+\tau_2>T, S(T)<K;\\ u_1S(0)+u_2S(\tau_1)-VK & \\ \ +(V-u_1)S(T)(1+r)-u_2S(\tau_1+\tau_2), & \text{если } \tau_1\le T, \tau_1+\tau_2>T, S(T)\ge K;\\ u_1S(0)+u_2S(\tau_1)-(u_1+u_2)S(T), & \text{если } \tau_1+\tau_2\le T, S(T)<K;\\ u_1S(0)+u_2S(\tau_1) & \\ \ +(V-u_1-u_2)S(T)(1+r)-VK, & \text{если } \tau_1+\tau_2\le T, S(T)\ge K. \end{cases}$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим двухшаговую систему, описывающую динамику изменения портфеля хеджера. Введем вектор состояния системы

$$z_i=\mathrm{col}(L_i,V_i,t_i,S_i),\quad i=1,2,$$

где L_i — накопленные потери к началу i-го шага, V_i — количество единиц базового актива к началу i-го шага, S_i — стоимость базового актива к началу i-го шага, а t_i — момент начала i-го шага. Начальное состояние системы задается вектором $z_1=\mathrm{col}\,(0,0,S,0)$.

Определим модель управления системой. Под управлением на каждом шаге будем подразумевать количество продаваемых или приобретаемых единиц базового актива. Будем рассматривать управление как функцию текущего состояния системы, т. е. $u_i\triangleq u_i(z_i)$, $i=1,2$. Множество U_1 допустимых управлений u_1 на первом шаге определяется следующим образом:

$$U_1\triangleq\{u_1\colon 0\le u_1\le V\}. \tag{2.1}$$

Множество U_2 допустимых управлений u_2 на втором шаге будет зависеть от состояния системы z_2:

$$U_2\triangleq U_2(z_2)=\{u_2\colon z_{12}+u_2\ge 0,\ z_{12}+u_2\le V\}. \tag{2.2}$$

Таким образом, хеджер не может приобрести больше единиц базового актива, чем прописано в контракте, и не может продать больше, чем у него есть к началу второго шага.

Динамику системы будем описывать рекуррентным соотношением:

$$z_{i+1}=f_i(z_i,u_i,X_i),\quad i=1,2, \tag{2.3}$$

где $X_i\in\mathbb{R}^3$ — вектор случайных параметров, а $f_i(z_i,u_i,X_i)$ — фунция перехода на i-м шаге. В качестве первой компоненты вектора X_i возьмем длительность i-го шага, т. е. $X_{i1}=\tau_i$. В качестве второй и третьей компонент возьмем приращения процесса $S(t)$ на отрезках $[t_i;t_i+\tau_i]$ и $[t_i;T]$. Известно [9], что приращение винеровского процесса $W(t)$ на отрезке $[t_1,t_2]$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $|t_2-t_1|$, а ковариация сечений $W(t_1)$ и $W(t_2)$ равна $\min\{t_1,t_2\}$. С учетом этого зависимые между собой приращения $S(t_i+\tau_i)-S(t_i)$ и $S(T)-S(t_i)$ можно представить в виде

$$X_{i2}=S(t_i+\tau_i)-S(t_i)=\beta\tau_i+\sigma\left(\xi_i\sqrt{\min\{\tau_i,T-t_i\}}+\eta_i\sqrt{\max\{0,\tau_i+t_i-T\}}\right),$$
$$X_{i3}=S(T)-S(t_i)=\beta(T-t_i)+\sigma\left(\xi_i\sqrt{\min\{\tau_i,T-t_i\}}+\eta_i\sqrt{\max\{0,T-\tau_i-t_i\}}\right),$$

где $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $N(0,1)$. В результате получаем, что вектор случайных параметров определяется следующим образом:

$$X_i = \begin{pmatrix} \tau_i \\ \beta\tau_i + \sigma\left(\xi_i\sqrt{\min\{\tau_i, T-t_i\}} + \eta_i\sqrt{\max\{0, \tau_i + t_i - T\}}\right) \\ \beta(T-t_i) + \sigma\left(\xi_i\sqrt{\min\{\tau_i, T-t_i\}} + \eta_i\sqrt{\max\{0, T-\tau_i - t_i\}}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

В силу независимости величин τ_i, а также независимости величин ξ_i и η_i случайные векторы X_1 и X_2 являются независимыми.

Функция перехода f_i определяется следующим образом:

$$f_i(z_i, u_i, X_i) = \begin{pmatrix} L_i + g_i(z_i, u_i, X_i) \\ V_i + u_i \\ t_i + \tau_i \\ S(t_i + \tau_i) \end{pmatrix} = z_i + \begin{pmatrix} g_i(z_i, u_i, X_i) \\ u_i \\ X_{i1} \\ X_{i2} \end{pmatrix},$$

где $g_1(z_1, u_1, x_1)$ — функция потерь на первом шаге, записанная для реализации x_1 случайного вектора X_1:

$$g_1(z_1, u_1, x_1) \triangleq \begin{cases} u_1 S_1 - u_1(S_1 + x_{12}), & \text{если } \tau_1 > T, S_1 + x_{13} < K; \\ u_1 S_1 + V(S_1 + x_{13})(1+r) - VK - u_1(S_1 + x_{12}), & \text{если } \tau_1 > T, S_1 + x_{13} \geq K; \\ u_1 S_1, & \text{если } \tau_1 \leq T. \end{cases} \tag{2.5}$$

Функция $g_2(z_2, u_2, x_2)$ потерь на втором шаге, где x_2 — реализация случайного вектора X_2, будет определяться выражением

$$g_2(z_2, u_2, x_2) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } t_2 > T; \\ u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22}), & \text{если } \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K; \\ u_2 S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1+r) - VK, & \text{если } \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K; \\ u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{23}), & \text{если } \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K; \\ u_2 S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1+r) - VK, & \text{если } \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K. \end{cases} \tag{2.6}$$

В качестве целевой функции возьмем суммарные потери при хеджировании $\Phi(z_3) = z_{31} = L_3$. Рассмотрим задачу минимизации математического ожидания потерь

$$\Phi_0(u) = \mathbf{M}[\Phi(z_3)] \to \min_{u \in U_1 \times U_2}. \tag{2.7}$$

3. Метод динамического программирования

Установим возможность применения метода динамического программирования для решения задачи (2.7). Пусть имеется динамическая система с дискретным временем

$$z_{i+1} = f_i(z_i, u_i, x_i), \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.1}$$

где z_i — вектор состояния системы, u_i — вектор управления на i-м шаге, x_i — вектор случайных параметров. Качество управления системой (3.1) будем оценивать с помощью терминального критерия $\Phi(z_{N+1})$, а оптимальное управление выбирать из условия минимума функционала

$$\Phi_0(u(\cdot)) \triangleq \mathbf{M}[\Phi(z_{N+1})]. \tag{3.2}$$

О п р е д е л е н и е 1. Динамическая система называется марковской, если ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием системы.

О п р е д е л е н и е 2. Управление $u_\varepsilon(\cdot)$ называется ε-оптимальным, если

$$\Phi_0(u_\varepsilon(\cdot)) \le \begin{cases} \Phi_0^* + \varepsilon \quad \text{при} \quad \Phi_0^* > -\infty, \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} \quad \text{при} \quad \Phi_0^* = -\infty, \end{cases}$$

где Φ_0^* — оптимальное значение критерия.

Справедливо утверждение, следующее из [10, гл. 8, утверждения § 8.2].

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) $\mathcal{P}\{\Phi(z_{N+1}) > -\infty\} = 1$;

(ii) *динамическая система* (3.1) *является марковской*;

(iii) $u_i(z_i) \in U_i$, *т. е. ведется поиск управления в классе позиционных управлений с геометрическими ограничениями.*

Тогда в задаче минимизации функционала (3.2)

$$\Phi_0(u) = \mathbf{M}[\Phi(z_{N+1})] \to \min_{u \in U}$$

существует измеримая ε-оптимальная стратегия $u_\varepsilon(\cdot) = \mathrm{col}\,(u_1^\varepsilon(\cdot), \cdots, u_N^\varepsilon(\cdot))$, *определяемая с помощью алгоритма динамического программирования, т. е.*

$$\Phi_i(z_i) = \inf_{u_i \in U_i} \mathbf{M}[\Phi_{i+1}(z_{i+1})|z_i], \quad i = \overline{1, N}; \quad \Phi_{N+1}(z_{N+1}) = \Phi(z_{N+1}).$$

Как было показано ранее, векторы X_1 и X_2 случайных параметров на первом и втором шаге независимы между собой, следовательно, система является марковской. Потери хеджера определяются приращениями винеровского процесса на конечных промежутках времени, поиск управления осуществляется в классе позиционных управлений с геометрическими ограничениями ($u_1 \in U_1, u_2 \in U_2(z_2)$), следовательно, условия теоремы 1 выполнены. Для поиска оптимального управления в задаче (2.7) минимизации математического ожидания суммарных потерь при хеджировании может быть использован метод динамического программирования. Запишем основные соотношения метода динамического программирования:

$$\begin{aligned} \Phi_i(z_i) &= \inf_{u_i \in U_i} \mathbf{M}[\Phi_{i+1}(z_{i+1})|z_i], \quad i = 1, 2; \\ \Phi_3(z_3) &= \Phi(z_3), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\Phi_i(z_i)$ — функция будущих потерь, т. е. наименьшее значение критерия в (2.7), которое может быть достигнуто при оптимальном управлении системой, начиная с i-го шага из текущего состояния z_i.

4. Математическое ожидание функции будущих потерь

Для решения задачи (3.3) необходимо найти условное математическое ожидание функции будущих потерь на последнем шаге. Это математическое ожидание определяется с помощью следующей теоремы.

Теорема 2. *Если динамика изменения рыночной цены базового актива описывается винеровским процессом с линейным сносом* (1.1), *функция потерь на втором шаге определяется согласно* (2.6), *а вектор X_2 случайных параметров на втором шаге вычисляется в соответствии с* (2.4), *то условное математическое ожидание функции будущих потерь на последнем шаге можно выразить как*

$$\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = L_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)]$$

$$= L_2 - \frac{\beta}{\lambda}u_2^2 e(u_2,z_2) - u_2 e(u_2,z_2)\frac{\beta}{\lambda}V_2\varphi(z_2) - u_2\beta(T-t_2) - u_2(1-e(u_2,z_2))d_2 + d_3, \qquad (4.1)$$

где

$$\varphi(z_2) \triangleq \Phi\Big(\frac{K - S_2 - \beta(T-t_2)}{\sigma\sqrt{T-t_2}}\Big), \quad e(u_2,z_2) \triangleq e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)},$$

$$m_{23}^{+} \triangleq \beta(T-t_i) + \frac{\sigma\sqrt{T-t_i}}{\sqrt{2\pi}\,(1-\varphi(z_2))}e^{-\frac{(K-S_i-\beta(T-t_i))^2}{2\sigma^2(T-t_i)}},$$

$$m_{23}^{-} \triangleq \beta(T-t_i) - \frac{\sigma\sqrt{T-t_i}}{\sqrt{2\pi}\varphi(z_2)}e^{-\frac{(K-S_i-\beta(T-t_i))^2}{2\sigma^2(T-t_i)}},$$

$$d_2 \triangleq r(S_2 + m_{23}^{+})(1-\varphi(z_2)),$$

$$d_3 \triangleq \big((V - V_2)(1+r)(S_2 + m_{23}^{+}) - VK\big)(1-\varphi(z_2)) - V_2(S_2 + m_{23}^{-})\varphi(z_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 дано в приложении.

Исследуем свойства условного математического ожидания функции будущих потерь на последнем шаге. Производная математического ожидания $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ по u_2 определяется как

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = -\frac{2\beta}{\lambda}u_2 e(u_2,z_2) - \beta(T-t_2)e(u_2,z_2)\,\mathrm{sign}(u_2)$$

$$+ e(u_2,z_2)\Big(d_2 - \frac{\beta}{\lambda}V_2\varphi(z_2)\Big) + \frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)e(u_2,z_2)\Big(d_2 - \frac{\beta}{\lambda}V_2\varphi(z_2)\Big) - (\beta(T-t_2) + d_2).$$

При этом производная непрерывна в точке $u_2 = 0$, ее предел вычисляется как

$$\lim_{u_2\to 0}\frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = -\beta(T-t_2) - d_2.$$

Нетрудно проверить, что функция $e(u_2,z_2)$ является четной и возрастающей по u_2 при $u_2 > 0$ и убывающей при $u_2 < 0$, а функция $\dfrac{1}{u_2}e(u_2,z_2)$ является нечетной и убывающей по u_2 при $u_2 > \lambda(T-t_2)$ и $u_2 \in (-\lambda(T-t_2), 0)$, и возрастающей при $u_2 \in (0, \lambda(T-t_2))$ и $u_2 \le -\lambda(T-t_2)$.

Анализ выражения для математического ожидания $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ функции будущих потерь на последнем шаге и его производной, а также численное моделирование показывают, что математическое ожидание $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ может иметь не более двух локальных минимумов на отрезке $[-V_2, V - V_2]$, расположенных по разные стороны от 0. Проиллюстрируем это на примере. Пусть в момент $t_2 = 1$ начала второго шага цена S_2 базового актива равна 2, при этом хеджер имеет $V_2 = 6$ единиц базового актива из 10 ($V = 10$) необходимых по условию контракта. Пусть также цена поставки K равна 3, время T жизни опциона равно 5, коэффициент β линейного сноса равен -0.01, коэффициент σ волатильности равен 1, интенсивность торгов λ равна 0.2, а надбавка r за срочные операции равна 0.1. Потери L_2 к началу второго шага без ограничения общности можно считать равными нулю. График зависимости математического ожидания $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ по u_2 при указанных значениях параметров изображен на рис. 1.

Для поиска ε-оптимальной стратегии u_2^* на втором шаге будем использовать полный перебор по $u_2 \in U_2(z_2)$ с заданным шагом $h > 0$, где $U_2(z_2)$ определяется в соответствии с (2.2). Функция будущих потерь на втором шаге описывается как

$$\Phi_2(z_2) = L_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2^*, x_2)], \qquad (4.2)$$

и определяется по формуле (4.1).

Задача минимизации функции будущих потерь на первом шаге является задачей одномерной оптимизации на конечном промежутке. В силу сложной структуры функции потерь

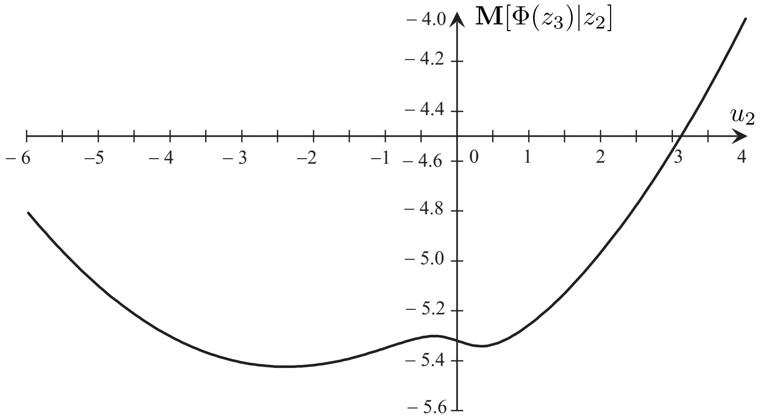

Рис. 1. График зависимости $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ по u_2.

и зависимости распределения случайных параметров от стратегии для вычисления математического ожидания при фиксированном значении u_1 будем использовать метод Монте-Карло, а для поиска ε-оптимальной стратегии на первом шаге будем использовать полный перебор по $u_1 \in U_1$ с заданным шагом, где U_1 определяется согласно (2.1). Для поиска ε-оптимальной стратегии u_1^* на первом шаге предложим следующий алгоритм.

А л г о р и т м.

1. Задать шаг сетки h и требуемое количество реализации N для метода Монте-Карло, положить номер шага i равным 0, $M^* = \infty$ и $u_1^* = 0$.

2. Положить $u_1 = ih$, $M = 0$ и сгенерировать выборку $\{Y_i\}, i = 1 : N$, реализаций случайного вектора X_1.

3. Для каждой реализации Y_j определить z_2 согласно (2.3) и вычислить $\Phi_2(z_2)$ по формуле (4.2). Присвоить $M = M + \frac{1}{N}\left(g_1(z_1, ih, Y_j) + \Phi_2(z_2)\right)$, где $g_1(z_1, ih, Y_j)$ определяется согласно (2.5).

4. Если $M < M^*$, то положить $M^* = M$ и $u_1^* = ih$. Перейти к шагу 5.

5. Если $i > \left[\frac{V}{h}\right]$, то завершить работу алгоритма, иначе положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 2.

В результате работы данного алгоритма удается найти ε-оптимальное управлении u_1^* на первом шаге. Величина M^* будет определять значение функции будущих потерь на первом шаге, т. е. математическое ожидание суммарных затрат на хеджирование за два шага при оптимальном управлении на первом шаге.

5. Пример

Приведем результаты работы алгоритма для поиска оптимальной стратегии на первом шаге. Пусть начальная цена S базового актива равна 95 у.е, коэффициент линейного сноса β в процессе ценообразования $S(t)$ равен -0.05 у.е. в день, коэффициент волатильности σ равен 1.5, величина r равна 0.05, а коэффициент λ, характеризующий среднее время покупки/продажи единицы базового актива, также равен 1.5. Пусть согласно контракту хеджер обязуется предоставить по требованию держателя опциона через $T = 20$ дней $V = 10$ единиц базового актива по цене поставки $K = 100$. Будем искать оптимальное управление на первом шаге на отрезке $[0, 10]$ с шагом $h = 0.1$. Математическое ожидание потерь на каждом шаге алгоритма будем оценивать по $N = 10000$ реализаций.

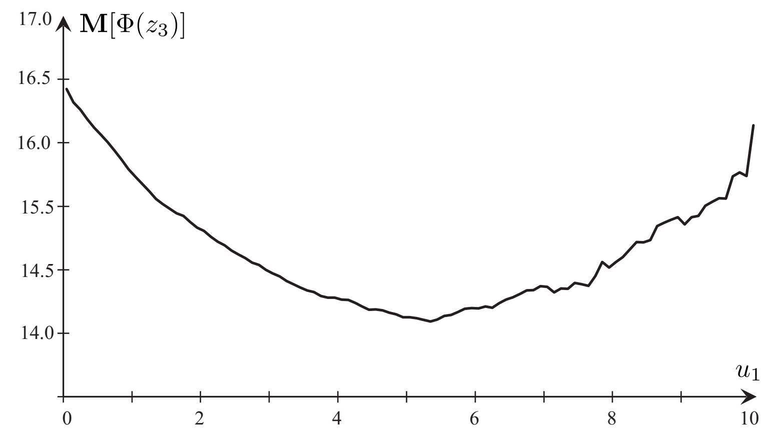

Рис. 2. Зависимость средних потерь $\mathbf{M}[\Phi(z_3)]$ от u_1.

В результате вычислений получаем, что в начальный момент времени хеджеру необходимо приобрести $u_1^* = 5.4$ единиц базового актива. График зависимости средних потерь от управления на первом шаге представлен на рис. 2.

Стоит обратить внимание на то, что с ростом u_1 увеличивается дисперсия величины суммарных потерь. Следовательно, для оценки средних потерь требуется большее количество реализаций для метода Монте-Карло. Для оптимизации времени расчетов можно предложить использование переменного объема выборки. Например, можно задать минимальный и максимальный объемы выборки $N_{\min}$ и $N_{\max}$ и для каждого значения u_1 на 2-м шаге алгоритма использовать в качестве объема выборки величину

$$N = \frac{V - u_1}{V} N_{\min} + \frac{u_1}{V} N_{\max}.$$

Приложение

Приведем доказательство теоремы 2. Для вычисления математического ожидания функции потерь на последнем шаге необходимы условные математические ожидания приращений X_{i2} и $X_{i3}, i = 1, 2$, процесса ценообразования (1.1) при условии, что в момент истечения срока жизни опциона T цена базового актива $S_i + X_{i3}$ оказалась ниже или выше уровня цены поставки K. Условные математические ожидания величины X_{i3} вычисляются непосредственно как математические ожидания случайной величины, имеющей усеченное нормальное распределение:

$$\mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} < K - S_i] = \beta(T - t_i) - \frac{\sigma\sqrt{T - t_i}}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{K - S_i - \beta(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}\right)} e^{-\frac{(K - S_i - \beta(T - t_i))^2}{2\sigma^2(T - t_i)}}, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} \geq K - S_i] = \beta(T - t_i) + \frac{\sigma\sqrt{T - t_i}}{\sqrt{2\pi}\left(1 - \Phi\left(\frac{K - S_i - \beta(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}\right)\right)} e^{-\frac{(K - S_i - \beta(T - t_i))^2}{2\sigma^2(T - t_i)}}. \tag{5.2}$$

В силу того что процесс (1.1) является процессом с независимыми приращениями, условные математические ожидания величины X_{i2} вычисляем как

$$\mathbf{M}[X_{i2}|X_{i3} < K - S_i, \tau_i > T - t_i] = \mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} < K - S_i] + u_i \frac{\beta}{\lambda}, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{M}[X_{i2}|X_{i3} \geq K - S_i, \tau_i > T - t_i] = \mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} \geq K - S_i] + u_i \frac{\beta}{\lambda}. \tag{5.4}$$

Поскольку условные математические ожидания приращений процесса ценообразования нам известны, мы можем найти математическое ожидание функции потерь на последнем шаге. В соответствии с описанной выше моделью получаем $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = \mathbf{M}[z_2 + g_2(z_2, u_2, x_2)] =$

$z_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)]$. Второе слагаемое является математическим ожиданием потерь на последнем шаге при управлении u_2 и вычисляется как полное математическое ожидание

$$\mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)]$$

$$= \mathbf{M}\big[u_2S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22})|\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\big]\,\mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\}$$
$$+ \mathbf{M}\big[u_2S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK|\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \ge K\big]$$
$$\times \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \ge K\} + \mathbf{M}\big[u_2S_2 - (V_1 + u_2)(S_2 + x_{23})|\tau_2 \le T - t_2, S_2 + x_{23} < K\big]$$
$$\times \mathcal{P}\{\tau_2 \le T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} + \mathcal{P}\{\tau_2 \le T - t_2, S_2 + x_{23} \ge K\}$$
$$\times \mathbf{M}\big[u_2S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK|\tau_2 \le T - t_2, S_2 + x_{23} \ge K\big].$$

Математическое ожидание в первом слагаемом определяется как

$$\mathbf{M}\big[u_2S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22})|\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\big]$$
$$= u_2S_2 - (V_2 + u_2)\mathbf{M}\big[S_2 + x_{22}|\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\big]$$
$$= u_2S_2 - \beta\frac{u_2(V_2 + u_2)}{\lambda} - (V_2 + u_2)(S_2 + \mathbf{M}[x_{23}|x_{23} < K - S_2]), \tag{5.5}$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом может быть найдено по формуле (5.1).

Математическое ожидание во втором слагаемом вычисляется как

$$\mathbf{M}\big[u_2S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK|\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \ge K\big]$$
$$= u_2S_2 - VK - u_2\mathbf{M}[S_2 + x_{22}|S_2 + x_{23} \ge K] + (V - V_2)(1 + r)\mathbf{M}[S_2 + x_{23}|S_2 + x_{23} \ge K]$$
$$= u_2S_2 - VK - \beta\frac{u_2^2}{\lambda} + ((V - V_2)(1 + r) - u_2)(S_2 + \mathbf{M}[x_{23}|x_{23} \ge K - S_2]), \tag{5.6}$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяем по формуле (5.2).

Математическое ожидание в третьем слагаемом, учитывая соотношение (5.3), вычисляем как

$$\mathbf{M}[u_2S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{23})|\tau_2 \le T - t_2, S_2 + x_{23} < K]$$
$$= u_2S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + \mathbf{M}[x_{23}|x_{23} < K - S_2]), \tag{5.7}$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяется по (5.1).

Математическое ожидание в четвертом слагаемом, учитывая соотношение (5.4), определяем как

$$\mathbf{M}\big[u_2S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK|\tau_2 \le T - t_2, S_2 + x_{23} \ge K\big]$$
$$= u_2S_2 - VK + (V - V_2 - u_2)(1 + r)(S_2 + \mathbf{M}[x_{23}|x_{23} \ge K - S_2]), \tag{5.8}$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяем по формуле (5.2).

Вычисляем вероятность:

в первом слагаемом:

$$p_1 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} = e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T - t_2)}\,\Phi\Big(\frac{K - S_2 - \beta(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\Big); \tag{5.9}$$

во втором слагаемом:

$$p_2 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \ge K\} = e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T - t_2)}\,\Big(1 - \Phi\Big(\frac{K - S_2 - \beta(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\Big)\Big); \tag{5.10}$$

в третьем слагаемом:

$$p_3 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 \le T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} = \big(1 - e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)}\big)\,\Phi\Big(\frac{K - S_2 - \beta(T-t_2)}{\sigma\sqrt{T-t_2}}\Big); \tag{5.11}$$

в четвертом слагаемом:

$$p_4 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 \le T - t_2, S_2 + x_{23} \ge K\} = \big(1 - e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)}\big)\,\Big(1 - \Phi\Big(\frac{K - S_2 - \beta(T-t_2)}{\sigma\sqrt{T-t_2}}\Big)\Big). \tag{5.12}$$

Таким образом, выражение для математического ожидания функции будущих потерь на втором шаге полностью определено. Используя соотношения (5.5)–(5.12) и введенные в утверждении теоремы обозначения, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = L_2 &+ \Big(u_2 S_2 - \beta\frac{u_2(V_2+u_2)}{\lambda} - (V_2+u_2)(S_2 + m_{23}^-)\Big)e(u_2,z_2)\varphi(z_2)\\ &+ \Big(u_2S_2 - VK - \beta\frac{u_2^2}{\lambda} + ((V-V_2)(1+r) - u_2)(S_2 + m_{23}^+)\Big)e(u_2,z_2)(1-\varphi(z_2))\\ &+ \big(u_2S_2 - (V_2+u_2)(S_2+m_{23}^-)\big)\,(1 - e(u_2,z_2))\varphi(z_2)\\ &+ \big(u_2S_2 - VK + (V - V_2 - u_2)(1+r)(S_2+m_{23}^+)\big)\,(1-e(u_2,z_2))(1-\varphi(z_2))\\ = L_2 &- \frac{\beta}{\lambda}u_2^2 e(u_2,z_2) - u_2 e(u_2,z_2)\frac{\beta}{\lambda}V_2\varphi(z_2) - u_2\beta(T-t_2) - u_2(1-e(u_2,z_2))d_2 + d_3.\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities // J. Polit. Econ. 1973. Vol. 81, no. 3. P. 637–659.
2. **Zhang M.Y., Russell J., Tsay R.S.** A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data // J. Econometrics. 2001. Vol. 104, no. 1. P. 179–207.
3. **Dufour A., Engle R.F.** The ACD model: Predictability of the time between consecutive trades. Discussion Papers in Finance: 2000-05. California: ISMA Centre, 2000. 58 p. (Business School for Financial Markets).
4. **Фёльмер Г., Шид А.** Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008. 496 с.
5. **Зверев О.В., Хаметов В.М.** Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 1. С. 26–54.
6. **Зверев О.В., Хаметов В.М.** Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 1. Суперхеджирование // Проблемы управления. 2014. № 6. С. 31–44.
7. **Кибзун А.И., Соболь В.Р.** Модернизация стратегии последовательного хеджирования опционной позиции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 17, № 2. С. 179–192.
8. **Bachelier L.** Theorie de la speculation // Annales Scientifiques de lcole Normale Suprieure. 1900. Vol. 3. P. 21–86.
9. **Миллер Б.М., Панков А.Р.** Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
10. **Бертсекас Д., Шрив С.** Стохастическое оптимальное управление. М.: Наука, 1985. 280 с.

Кибзун Андрей Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
e-mail: kibzun@mail.ru

Поступила 13.05.2015

Соболь Виталий Романович
аспирант
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
e-mail: vitsobol@mail.ru