ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.711.3

ТОЧНЫЕ ШТРАФЫ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ[1]

В. В. Карелин, А. В. Фоминых

В статье рассматривается дифференциальное включение с заданными многозначным отображением и начальной точкой. Для этого дифференциального включения требуется найти решение, доставляющее минимум интегральному функционалу. С помощью аппарата опорных функций и аппарата точных штрафных функций в случае непрерывной дифференцируемости опорной функции многозначного отображения по фазовым переменным получены некоторые классические результаты принципа максимума для дифференциальных включений. Отдельно рассмотрен случай, когда опорная функция многозначного отображения не дифференцируема по фазовым переменным.

Ключевые слова: негладкий функционал, дифференциальное включение, опорная функция, точная штрафная функция, принцип максимума.

V. V. Karelin, A. V. Fominykh. Exact penalties in a problem of constructing an optimal solution of a differential inclusion.

A differential inclusion with given set-valued mapping and initial point is considered. For this differential inclusion, it is required to find a solution that minimizes an integral functional. We use the techniques of support functions and exact penalty functions to obtain some classical results of the maximum principle for differential inclusions in the case where the support function of the set-valued mapping is continuously differentiable in the phase variables. We also consider the case where the support function of the set-valued mapping is not differentiable in the phase variables.

Keywords: nonsmooth functional, differential inclusion, support function, exact penalty function, maximum principle.

Введение

В настоящее время дифференциальные включения (или дифференциальные уравнения с многозначной правой частью) практически незаменимы при математическом моделировании систем с неполным описанием [1] и анализе поведения разрывных систем [2]. Известны применения дифференциальных включений в задачах построения функций Ляпунова и оптимизации. Для приложений важна задача поиска решений дифференциального включения. Как правило, получить аналитическое решение дифференциального включения удается лишь в специальных случаях, в остальных случаях для этой цели приходится использовать численные методы.

Отметим, что известные условия существования решения [1;3], как правило, содержат либо требование непрерывности, либо одновременно два требования: одной из полунепрерывностей и выпуклости значений соответствующего многозначного отображения.

В виде дифференциального включения $\dot{x} \in F(x,t)$ могут быть записаны дифференциальные неравенства, неявные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с ограничениями на фазовые координаты. Таким образом, дифференциальное включение является обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку у него из каждой начальной точки x_0 выходит целое семейство траекторий, то можно поставить задачу выделения решений с заданными свойствами, например таких, которые доставляют минимум некоторому функционалу.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00752, 14-01-31521 мол-а), гранта Санкт-Петербургского государственного университета (проект 9.38.205.2014).

В работах [1; 2] приведены теоремы, расширяющие на дифференциальные включения известный принцип максимума Л. С. Понтрягина. При этом принцип максимума получен при достаточно жестких предположениях, в частности при условии, что опорная функция $c(F(x,t),\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ непрерывно дифференцируема по вектору фазовых координат. В настоящей работе задача при этом условии исследуется с применением аппарата точных штрафных [4] и опорных [5] функций. С помощью этого аппарата достаточно просто получается известный принцип максимума В. И. Благодатских. Дополнительно изучается случай, когда дифференцируемость по x опорной функции $c\,(F(x,t),\psi)$ не предполагается.

Идея использования точных штрафных функций в задачах оптимизации была предложена И. И. Ереминым в [6].

Дадим определения основных понятий, которые используются в статье.

О п р е д е л е н и е 1. *Опорной функцией* многозначного отображения F из X в Y называется функция

$$c\,(F(x),\psi)=\max_{f\in F(x)}(f,\psi)\quad \forall x\in X,\quad \forall\psi\in Y^*,$$

где Y^* — сопряженное пространство.

О п р е д е л е н и е 2. Через $C_n[0,T]$ обозначим пространство непрерывных n-мерных вектор-функций, определенных на отрезке $[0,T]$.

О п р е д е л е н и е 3. Через $P_n[0,T]$ обозначим пространство кусочно-непрерывных n-мерных вектор-функций, определенных на отрезке $[0,T]$.

О п р е д е л е н и е 4. *Производная Дини* функции φ из Z в $\mathbb{R}$ в точке $z\in Z$ по направлению $v\in Z$ определяется величиной

$$\varphi'(z,v)=\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{\varphi(z+\alpha v)-\varphi(z)}{\alpha}.$$

О п р е д е л е н и е 5. *Субдифференциал функции* φ из Z в $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ в точке $z\in Z$ есть множество

$$\partial\varphi(z)=\{W\in Z^*\mid \varphi(y)-\varphi(z)\geqslant(W,y-z)\ \forall y\in Z\}.$$

О п р е д е л е н и е 6. *Супердифференциал функции* φ из Z в $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ в точке $z\in Z$ есть множество

$$\bar\partial\varphi(z)=\{V\in Z^*\mid \varphi(y)-\varphi(z)\leqslant(V,y-z)\ \forall y\in Z\}.$$

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot x\in F(x,t) \tag{1.1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0)=x_0. \tag{1.2}$$

Здесь $F(x,t)$, $t\in[0,T]$, — заданное многозначное отображение, которое будем считать полунепрерывным сверху, $x(t)$ — n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной с кусочно непрерывной на $[0,T]$ производной, $T>0$ — заданный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t\in[0,T]$ и каждой фазовой точке $x\in\mathbb{R}^n$ функция $F(x,t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$. Требуется подобрать такую вектор-функцию $x^*(t)\in C_n[0,T]$, являющуюся решением включения (1.1) и удовлетворяющую начальному условию (1.2), которая доставляет минимум функционалу

$$I(x)=\int\limits_0^T f_0(x,t)\,dt, \tag{1.3}$$

где f_0 — заданная вещественная скалярная функция, которую будем считать непрерывной по обоим аргументам и непрерывно дифференцируемой по x.

2. Эквивалентная постановка задачи

Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x,t)$. Поскольку $\forall t \in [0,T]$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $F(x,t)$ представляет собой выпуклое замкнутое и ограниченное множество, включение (1.1) можно переписать иначе [7]: $(\dot{x}, \psi) \leqslant c\,(F, \psi)$ $\forall t \in [0,T]$, где $\psi \in \mathbb{R}^n$, $\|\psi\| = 1$. Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, тогда с учетом (1.2) получим $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau$.

Введем функции

$$l(\psi, z, t) = (z, \psi) - c\,(F, \psi), \tag{2.1}$$

$$h(\psi, z, t) = \max\{0, l\,(\psi, z, t)\} \tag{2.2}$$

и составим функционал

$$\varphi(\psi, z) = \sqrt{\int\limits_0^T h^2(\psi, z, t)\,dt}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим множества $\Omega = [z \in P_n[0,T] \mid \varphi(\psi, z) = 0]$, $\Omega_\delta = [z \in P_n[0,T] \mid \varphi(\psi, z) < \delta]$. Тогда $\Omega_\delta / \Omega = [z \in P_n[0,T] \mid 0 < \varphi(\psi, z) < \delta]$.

Нетрудно убедиться, что для функционала (2.3) справедливы соотношения

$$\begin{cases} z \in \Omega, & \text{если } (\dot{x}, \psi) \leqslant c\,(F, \psi)\ \forall t \in [0,T], \\ z \notin \Omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Запишем функционал

$$\Phi(\psi, z) = I(z) + \lambda \varphi(\psi, z), \tag{2.4}$$

в котором $I(z) = I\Big(x_0 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau\Big)$, λ — достаточно большое положительное число. Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях это — точная штрафная функция. Последнее означает, что существует такое положительное число λ^*, что $\forall \lambda > \lambda^*$ задача минимизации функционала (1.3) при наличии ограничений (1.1), (1.2) эквивалентна задаче безусловной минимизации функционала (2.4). Величина λ^* называется *константой точного штрафа.*

3. Дифференциальные свойства функционалов $\varphi(z)$ и $I(z)$

Далее считаем, что вектор-функция $f(x,t)$ непрерывна по обоим аргументам и непрерывно дифференцируема по x и что при всех $t \in [0,T]$ и при всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется включение $f(x,t) \in F(x,t)$. Ниже для краткости будем иногда писать f вместо $f(x,t)$. Далее в статье функции $l(\psi, z, t)$, $h(\psi, z, t)$, $\varphi(\psi, z)$ и $\Phi(\psi, z)$ рассматриваются при фиксированном значении ψ, поэтому будем писать вместо них $l(z,t)$, $h(z,t)$, $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ соответственно. Рассмотрим функционал $\varphi(z)$ подробнее. Пусть $v \in P_n[0,T]$. Положим $z_\alpha(t) = z(t) + \alpha\, v(t)$. Вычислим

$$l(z_\alpha, t) = l(z,t) + \alpha H_1(z_\alpha, t) + o\,(\alpha, t), \quad \frac{o\,(\alpha, t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где $H_1(z_\alpha, t) = (\psi, v(t)) - \max\limits_{f \in F} \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x} \int_0^t v(\tau)\,d\tau,\ \psi\Big)$. Здесь использованы определение опорной функции и свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [1]. С учетом (2.1) и (2.2) далее найдем

$$h(z_\alpha, v) = h(z,t) + \alpha H(z_\alpha, t) + o\,(\alpha, t), \quad \frac{o\,(\alpha, t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H(z_\alpha, t) = H_1(z_\alpha, t), \quad l(z,t) > 0, \quad H(z_\alpha, t) = 0, \quad l(z,t) < 0,$$
$$H(z_\alpha, t) = \max\{0, H_1(z_\alpha, t)\}, \quad l(z,t) = 0.$$

Введем множества $T_+(z) = [t \in [0,T] \mid l(z,t) > 0]$, $T_-(z) = [t \in [0,T] \mid l(z,t) < 0]$, $T_0(z) = [t \in [0,T] \mid l(z,t) = 0]$.

Сначала рассмотрим случай $z \notin \Omega$.

Лемма 1. *Если $z \notin \Omega$, то функционал $\varphi(z)$ супердифференцируем* [8] *и его супердифференциал в точке z имеет вид*

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\psi + \int_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' \frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\psi \, d\tau, \quad f \in F,$$

где символ "штрих" означает операцию транспонирования.

Доказательство. Из выражения (2.3) имеем

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \int_0^T \frac{h(z,t)}{\varphi(z)} H(z_\alpha, t)\, dt + o\,(\alpha), \quad \frac{o\,(\alpha)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0.$$

Поскольку $z \notin \Omega$, имеем $H = H_1$. Тогда с учетом выражения для H_1 и теоремы об интеграле опорной функции, а также положительной однородности опорной функции по второму аргументу [7] получаем

$$\varphi'(z,v) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\varphi(z+\alpha v) - \varphi(z)}{\alpha} = \int_0^T \Big(\frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\psi, v(t)\Big) dt - \max_{f\in F} \int_0^T \bigg(\frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t v(\tau)\, d\tau, \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\psi\bigg)\, dt.$$

Интегрируя по частям в последнем слагаемом, окончательно получаем

$$\varphi'(z,v) = \int_0^T \Big(\frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\psi, v(t)\Big)\, dt - \max_{f\in F} \int_0^T \bigg(v(t), \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' \frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\psi\, d\tau\bigg)\, dt$$
$$= \int_0^T \Big(\frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\psi, v(t)\Big)\, dt + \min_{f\in F} \int_0^T \bigg(v(t), \int_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' \frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\psi\, d\tau\bigg)\, dt = \min_{V\in\bar{\partial}\varphi(z)} (V, v), \tag{3.1}$$

где

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \bigg\{V \in P_n[0,T] \mid V(t) = \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\psi + \int_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' \frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\psi\, d\tau, \ f \in F\bigg\}.$$

Обозначим $\varkappa(z,t) = \dfrac{h(z,t)}{\varphi(z)}$, $\varkappa(z) \in P[0,T]$, тогда $\varkappa(z,t) \geqslant 0$ $\forall t \in [0,T]$, $\|\varkappa(z)\| = 1$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,T]$. Из (3.1) видно, что функционал $\varphi(z)$ супердифференцируем и его супердифференциал имеет вид

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \varkappa(z,t)\psi + \int_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' \varkappa(z,\tau)\psi\, d\tau, \quad f \in F. \tag{3.2}$$

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим случай $z \in \Omega$.

Лемма 2. *Если $z \in \Omega$, то функционал $\varphi(z)$ дифференцируем в смысле Дини по любому направлению $v \in P_n[0,T]$ и его D-производная по направлению v в точке z выражается по формуле*

$$\varphi'(z,v) = \max_{\|w\|\leqslant 1}\Big[\int_0^T \big(w(t)\psi, v(t)\big)\,dt + \min_{f\in F}\int_0^T \Big(\int_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' w(\tau)\psi\,d\tau, v(t)\Big)\,dt\Big],$$

где $w \in P[0,T]$, $\|w\| \leqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $z \in \Omega$, имеем $\varphi(z) = 0$. Тогда из выражения (2.3) получаем

$$\varphi'(z,v) = \lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{\varphi(z+\alpha\, v)-\varphi(z)}{\alpha} = \|H(z_\alpha)\| = \max_{\|w\|\leqslant 1}\int_0^T H(z_\alpha,t)w(t)\,dt.$$

В данном случае $T_+(z) = \varnothing$, поэтому

$$\varphi'(z,v) = \max_{\|w\|\leqslant 1}\int_{T_0\cup T_-} w(t)\max_{\bar w(t)\in[0,1]}\big(\bar w(t)H_1(z_\alpha,t)\big)\,dt = \max_{w\in W_1}\int_0^T H_1(z_\alpha,t)w(t)\,dt,$$

где

$$W_1 = \big\{w \in P[0,T] \mid \|w\| \leqslant 1,\ w(t) \geqslant 0\ \forall t\in T_0,\ w(t) = 0\ \forall t \in T_-\big\}. \tag{3.3}$$

С учетом выражения для H_1 окончательно получаем

$$\varphi'(z,v) = \max_{w\in W_1}\Big[\int_0^T \big(w(t)\psi, v(t)\big)\,dt + \min_{f\in F}\int_0^T \Big(\int_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' w(\tau)\psi\,d\tau, v(t)\Big)\,dt\Big]. \tag{3.4}$$

Лемма доказана.

Находя производную функционала $I(z)$ по направлению $v \in P_n[0,T]$, убеждаемся, что он дифференцируем по Гато $I'(z,v) = \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}\,d\tau, v(t)\Big)\,dt$ и его градиент на множестве $P_n[0,T]$ вычисляется по формуле

$$\triangledown I(z) = \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}\,d\tau. \tag{3.5}$$

Лемма 3. *Если опорная функция $c\,(F,\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x, тогда*

– при $z \notin \Omega$ функционал $\varphi(z)$ дифференцируем по Гато и его градиент на множестве $P_n[0,T]$ находится по формуле

$$\triangledown\varphi(z) = \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\,\psi + \int_t^T -\frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\,\frac{\partial c\,(F(x,\tau),\psi)}{\partial x}\,d\tau,$$

– при $z \in \Omega$ функционал $\varphi(z)$ субдифференцируем [8] *и его субдифференциал в точке z находится по формуле*

$$\partial\varphi(z) = \Big\{W \in P_n[0,T] \mid W(t) = w(t)\psi + \int_t^T -w(\tau)\,\frac{\partial c\,(F(x,\tau),\psi)}{\partial x}\,d\tau,\ w\in W_1\Big\},$$

где множество W_1 определяется формулой (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению опорной функции $c\,(F,\psi) = \max\limits_{f\in F}(f,\psi)$. Видно, что эта функция субдифференцируема и ее субдифференциал имеет вид

$$\partial c(F,\psi) = \mathrm{co}\Big\{\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'\psi\Big\}, \quad f\in R, \quad R = \{f\in F \mid c\,(F,\psi) = (f,\psi)\}.$$

Отсюда следует, что $c\,(F,\psi)$ дифференцируема по x тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{R}$ состоит из единственного элемента, который обозначим f^*. Поэтому в данном случае можно считать, что $c\,(F,\psi) = (f^*,\psi)$ и выполнены соотношения

$$\Big(\frac{\partial f^*}{\partial x}\Big)'\psi = \frac{\partial (f^*,\psi)}{\partial x} = \frac{\partial c\,(F,\psi)}{\partial x}. \tag{3.6}$$

Пусть $z\notin\Omega$. Из выражения (3.2) получаем, что супердифференциал функционала $\varphi(z)$ состоит из единственного элемента f^*, поэтому $\varphi(z)$ дифференцируем по Гато. Тогда его градиент на множестве $P_n[0,T]$ имеет вид

$$\triangledown\varphi(z) = \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\,\psi + \int\limits_t^T -\frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\Big(\frac{\partial f^*}{\partial x}\Big)'\psi\,d\tau. \tag{3.7}$$

Используя соотношения (3.6), из (3.7) окончательно получаем выражение

$$\triangledown\varphi(z) = \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\,\psi + \int\limits_t^T -\frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\,\frac{\partial c\big(F(x,\tau),\psi\big)}{\partial x}\,d\tau,$$

которое доказывает первую часть леммы.

Пусть $z\in\Omega$. Из выражения (3.4) получаем, что производная функционала $\varphi(z)$ по направлению v может быть представлена в виде

$$\varphi'(z,v) = \max_{\|w\|\leqslant 1}\Bigg[\int\limits_0^T \big(w(t)\psi, v(t)\big)\,dt + \Bigg(\int\limits_t^T -\Big(\frac{\partial f^*}{\partial x}\Big)'w(\tau)\psi\,d\tau, v(t)\Bigg)\,dt\Bigg] = \max_{W\in\partial\varphi(z)}(W,v), \tag{3.8}$$

где

$$\partial\varphi(z) = \Bigg\{W\in P_n[0,T] \mid W(t) = w(t)\psi + \int\limits_t^T -w(\tau)\Big(\frac{\partial f^*}{\partial x}\Big)'\psi\,d\tau,\ w\in W_1\Bigg\},$$

а W_1 выписано в (3.3). Используя соотношения (3.6), из (3.8) окончательно получаем выражение

$$\partial\varphi(z) = \Bigg\{W\in P_n[0,T] \mid W(t) = w(t)\psi + \int\limits_t^T -w(\tau)\,\frac{\partial c\big(F(x,\tau),\psi\big)}{\partial x}\,d\tau,\ w\in W_1\Bigg\}, \tag{3.9}$$

которое доказывает вторую часть леммы.

Лемма доказана.

Заметим, что в данном случае также имеет место равенство

$$\gamma\, w(t)\,\frac{\partial c\big(F(x,t),\psi\big)}{\partial x} = \frac{\partial c\big(F(x,t),\gamma w(t)\psi\big)}{\partial x} \quad \forall t\in[0,T], \quad \forall\gamma>0. \tag{3.10}$$

4. Необходимые условия минимума

Теорема 1. *Пусть* $\inf\limits_{z\in\Omega} I(z) = I(z^*) > -\infty$ *и найдется такое положительное число* $\lambda_0 < \infty$, *что* $\forall\lambda > \lambda_0$ *существует* $z(\lambda) \in P_n[0,T]$, *для которого* $\Phi_\lambda(z(\lambda)) = \inf\limits_{z\in P_n[0,T]} \Phi_\lambda(z)$. *Пусть также функционал* $I(z)$ *является локально липшицевым на множестве* Ω_δ/Ω. *Тогда функционал* (2.4) *будет точной штрафной функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно показать [9], что существуют такие числа $a > 0$, $\delta > 0$, что

$$\varphi^{\downarrow}(z) = \liminf_{y\to z} \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{\rho(z,y)} < -a < 0 \quad \forall z \in \Omega_\delta/\Omega. \tag{4.1}$$

Здесь $y \in P_n[0,T]$, $\rho(z,y)$ — метрика на множестве $P_n[0,T]$, которую определим следующим образом: $\rho(z,y) = \max\limits_{t\in[0,T]} \Big|\int_0^t \big(z(t)-y(t)\big)\,dt\Big|$.

Положим

$$y(t) = z(t) + \alpha\, v^*(t),\ \ v^*(t) = -\Big(\frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\,\psi + \int\limits_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'\frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\,\psi\,d\tau\Big).$$

Тогда с учетом леммы 1 имеем

$$\varphi'(z,v^*) = \min_{f\in F}\int\limits_0^T -\Big(\frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\,\psi + \int\limits_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'\frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\,\psi\,d\tau,\ \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\,\psi + \int\limits_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'\frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\,\psi\,d\tau\Big)\,dt.$$

Покажем, что

$$\frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\,\psi + \int\limits_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'\frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)}\,\psi\,d\tau \neq \mathbf{0}, \quad f\in F,$$

тождественно на интервале времени $[0,T]$.

Предположим противное. Тогда $\dfrac{h(z,t)}{\varphi(z)}\,\psi = \mathbf{0}$ $\forall t \in [0,T]$, что противоречит ограничениям на ψ и $\dfrac{h(z,t)}{\varphi(z)}$. Пусть $\varphi(y) \to \varphi(z)$ при $y \to z$, т. е. существует последовательность $\{z_k\} \in \Omega_\delta/\Omega$ такая, что $\varphi'(z_k,v^*) \to 0$ при $k\to\infty$, где

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x_k,t)}{\partial x}, \quad f\in F, \quad x_k(t) = x_0 + \int\limits_0^t z_k(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\Big\|\frac{h(z_k,t)}{\varphi(z_k)}\,\psi + \int\limits_t^T -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'\frac{h(z_k,\tau)}{\varphi(z_k)}\,\psi\,d\tau\Big\| \to 0, \quad f\in F, \ \text{ при } \ k\to\infty.$$

Следовательно, $\Big\|\dfrac{h(z_k,t)}{\varphi(z_k)}\,\psi\Big\| \to 0$ при $k\to\infty$, что опять же противоречит условиям $\|\psi\| = 1$, $\Big\|\dfrac{h(z)}{\varphi(z)}\Big\| = 1$. Тогда приходим к заключению, что $\varphi(y)-\varphi(z) = \alpha\,\varphi'(z,v^*) + o(\alpha) < 0$ $\forall z \in \Omega_\delta/\Omega$.

Теперь найдем $\rho(z,y) = \alpha\max\limits_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t v^*(t)\,dt\Big| > 0$. Из последних двух неравенств следует (4.1).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть также опорная функция многозначного отображения* $F(x,t)$ *из* (1.1) *непрерывно дифференцируема по* x. *Для того чтобы точка* $x^* = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)\,d\tau$ *удовлетворяла включению* (1.1) *и условию* (1.2) *и доставляла минимум функционалу* (1.3), *необходимо, чтобы нашлась такая вектор-функция* $\Psi(t)$, *что для всех* $t \in [0,T]$ *выполняются соотношения*

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial c\big(F(x^*,t),\Psi(t)\big)}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x^*,t)}{\partial x}, \tag{4.2}$$

$$\big(\dot{x}^*,\Psi(t)\big) - c\left(F(x^*,t),\Psi(t)\right) = 0, \tag{4.3}$$

$$\Psi(T) = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В теореме 1 было показано, что функционал (2.4) — точная штрафная функция, поэтому существует такое число $\lambda^* > 0$, что $\forall \lambda > \lambda^*$ задача минимизации функционала (1.3) при наличии ограничений (1.1), (1.2) эквивалентна задаче безусловной минимизации функционала (2.4).

Положим $\Psi(t) = \lambda w(t)\psi$, где вектор-функция $w(t)$ берется из множества W_1. Поскольку по лемме 3 при $z \in \Omega$ функционал $\varphi(z)$ субдифференцируем и его субдифференциал выписан в (3.9), функционал $I(z)$ дифференцируем по Гато и его градиент выписан в (3.5), то из необходимого условия минимума [9] $0_n \in \partial\Phi(z^*)$ имеем с учетом (3.10), что в точке минимума для всех $t \in [0,T]$ должно выполняться условие

$$\int_t^T \frac{\partial f_0(x^*,t)}{\partial x}\,d\tau + \Psi(t) + \int_t^T -\frac{\partial c\big(F(x^*,t),\Psi(t)\big)}{\partial x}\,d\tau = 0_n, \tag{4.5}$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0,T]$. Дифференцируя (4.5) на интервале времени $[0,T]$, получаем систему дифференциальных уравнений $\dot{\Psi}(t) = -\dfrac{\partial c\big(F(x^*,t),\Psi(t)\big)}{\partial x} + \dfrac{\partial f_0(x^*,t)}{\partial x}$ с концевым условием $\Psi(T) = \mathbf{0}$ и приходим к соотношениям (4.2), (4.4).

При $t \in T_0$ из вида функции $l(z,t)$ получаем $(z,\Psi) = c(F,\Psi)$, при $t \in T_-$ $w(t) = 0$, и соотношение (4.3) остается в силе. Таким образом, (4.3) должно иметь место при любом $t \in [0,T]$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 сформулирована для задачи со свободным правым концом. Нетрудно показать, что соотношения (4.2), (4.3) будут иметь место и для задачи с фиксированным правым концом, однако концевое значение $\Psi(T)$ для этой задачи в общем случае будет ненулевым, т. е. здесь (4.4) уже не будет иметь места.

Пользуясь известными условиями минимума в терминах производной по направлению, из леммы 2 получаем, что справедлива

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Для того чтобы точка* x^* *удовлетворяла включению* (1.1), *условию* (1.2) *и доставляла минимум функционалу* (1.3), *необходимо, чтобы выполнялось соотношение*

$$\max_{\|w\|\leqslant 1}\Bigg[\int_0^T\bigg(\int_t^T \frac{\partial f_0(x^*,\tau)}{\partial x}\,d\tau + \lambda w(t)\psi, v(t)\bigg)\,dt$$

$$+\min_{f\in F}\int_0^T\bigg(\int_t^T -\Big(\frac{\partial f(x^*,\tau)}{\partial x}\Big)'\lambda w(\tau)\,\psi\,d\tau, v(t)\bigg)\,dt\Bigg] \geqslant 0 \quad \forall v \in P_n[0,T]. \tag{4.6}$$

Пусть $\bar{F} \subset F$ — множество таких $f \in F$, при которых (4.6) имеет место.

Можно показать, что имеет место

Лемма 5. *Соотношение* (4.6) *эквивалентно условию: при каждом фиксированном* $\bar{f} \in \bar{F}$ *найдется такая вектор-функция* $\bar{w} \in W_1$, *что выполняется соотношение*

$$\int_t^T \frac{\partial f_0(x^*,\tau)}{\partial x}\,d\tau + \lambda\bar{w}(t)\,\psi + \int_t^T -\Big(\frac{\partial \bar{f}(x^*,\tau)}{\partial x}\Big)'\lambda\bar{w}(\tau)\,\psi\,d\tau = 0_n \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.7}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Для того, чтобы точка* x^* *удовлетворяла включению* (1.1), *условию* (1.2) *и доставляла минимум функционалу* (1.3), *необходимо, чтобы нашлись такие вектор-функции* $\bar{f} \in F$ *и* $\bar{\Psi}(t)$, *для которых при всех* $t \in [0,T]$ *справедливы соотношения*

$$\dot{\bar{\Psi}}(t) = -\Big(\frac{\partial \bar{f}(x^*,t)}{\partial x}\Big)'\,\bar{\Psi}(t) + \frac{\partial f_0(x^*,t)}{\partial x}, \tag{4.8}$$

$$\big(\dot{x}^*, \bar{\Psi}(t)\big) - c\big(F(x^*,t), \bar{\Psi}(t)\big) = 0, \tag{4.9}$$

$$\bar{\Psi}(T) = \mathbf{0}. \tag{4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 4 для доказательства достаточно показать, что соотношение (4.6) эквивалентно (4.8), (4.10) при некоторых $\bar{f} \in F$ и $\bar{\Psi}(t)$.

По лемме 5 соотношение (4.6) эквивалентно (4.7) при каждом фиксированном $\bar{f} \in \bar{F}$. Дифференцируя (4.7) на промежутке $[0,T]$ и обозначая $\bar{\Psi}(t) = \lambda\bar{w}(t)\psi$, приходим к системе дифференциальных уравнений (4.8) с краевым условием (4.10).

Соотношение (4.9) доказывается так же, как в теореме 2.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 3 сформулирована для задачи со свободным правым концом. Нетрудно показать, что соотношение (4.8) будет иметь место и для задачи с фиксированным правым концом, однако концевое значение $\Psi(T)$ для этой задачи в общем случае будет ненулевым, т. е. здесь (4.10) уже не будет иметь места.

5. Пример

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = x_1$, в которой ограничение на управление задается множеством $U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid |u_1| \leqslant 1,\ u_2 = 0\}$. Пусть заданы начальное положение $x_0 = (0,0)$ и конечное состояние $x(1) = (-1/2, -1/3)$ системы. Требуется подобрать такое управление $u^* \in U$, при котором функционал $I(x) = \int_0^1 x_2(t)\,dt$ принимает наименьшее значение.

Систему можно переписать в виде включения $\dot{x} \in F(x)$, где $F(x) = \begin{pmatrix}[-1,1]\\ x_1\end{pmatrix}$. Поскольку опорная функция $c\,(A,b)$ отрезка $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \in [-1,1]\}$ имеет вид $|b|$, то в данном случае опорная функция многозначного отображения $F(x)$ выражается формулой $c\,(F,\psi) = |\psi_1| + x_1\psi_2$. Видно, что функция $c\,(F,\psi)$ является непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным и ее градиент выписывается следующим образом: $\dfrac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, 0)$. Для градиента $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}$ подынтегральной функции f_0 справедливо выражение $\dfrac{\partial f_0}{\partial x} = (0,1)$.

Из теоремы 2 с учетом замечания 1 следует, что вектор-функция $\psi(t)$ должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = 1. \tag{5.1}$$

Точно так же получаем, что для $\psi(t)$ для всех t необходимо выполнение соотношений $(\dot{x}, \psi(t)) = u_1\psi_1 + x_1\psi_2 = c\,(F, \psi) = |\psi_1| + x_1\psi_2$. Отсюда для всех t должно выполняться равенство

$$u_1(t)\,\psi_1(t) = |\psi_1(t)|. \tag{5.2}$$

Из (5.1), (5.2) уже нетрудно получить оптимальное управление

$$\begin{gathered} u_1^*(t) = -1, \quad t \in [0, \tau_1), \\ u_1^*(t) = 1, \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u_1^*(t) = [-1, 1], \quad t \in [\tau_2, 1], \end{gathered} \tag{5.3}$$

и соответствующую ему оптимальную траекторию

$$\begin{gathered} x_1(t) = -t, \quad x_2(t) = -t^2/2, \quad t \in [0, \tau_1), \\ x_1(t) = t + S_1, \quad x_2(t) = t^2/2 + S_1 t + S_2, \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \\ x_1(t) = -t + 1/2, \quad x_2(t) = -t^2/2 + 1/2t - 1/2, \quad t \in [\tau_2, 1], \end{gathered} \tag{5.4}$$

где $\tau_1 = 13/24$, $\tau_2 = 19/24$, $S_1 = -13/12$, $S_2 = 169/576$. Для поиска величин τ_1, τ_2, S_1, S_2 в (5.3), (5.4) использованы граничные условия и условие непрерывности траектории.

Нетрудно убедиться, что условия (5.1), (5.2) могут быть получены непосредственно из принципа максимума Понтрягина. Здесь же продемонстрирован несколько иной подход, когда осуществляется переход от исходной системы к соответствующему дифференциальному включению, для которого применяются полученные условия оптимальности (теорема 2) для поиска оптимального процесса $\big(x^*(t), u^*(t)\big)$.

6. Заключение

Таким образом, в данной статье продемонстрировано применение теории точных штрафных функций к задаче оптимального управления дифференциальным включением. Аппарат опорных функций позволяет свести исходную задачу к оптимизационной задаче при наличии ограничений. С помощью точных штрафов эта задача при наличии ограничений сводится к минимизации негладкого функционала $\Phi(z)$ на всем пространстве. При условии непрерывной дифференцируемости опорной функции $c\,(F(x,t), \psi)$ по вектору фазовых координат этот функционал оказывается субдифференцируемым, что позволяет выписать необходимые условия минимума в терминах субдифференциала, совпадающие с некоторым классическим результатом для этой задачи. В случае недифференцируемости $c\,(F(x,t), \psi)$ по x найдена D-производная по направлениям функционала $\Phi(z)$, которая позволяет сформулировать необходимые условия минимума. Приведен пример применения теоретических результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
2. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 226 с.
3. **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 512 с.
4. **Карелин В.В.** Точные штрафы в задаче наблюдения // Вест. СПбГУ. Сер. 10. 2008. Вып. 4. С. 3–7.
5. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
6. **Ерёмин И.И.** Метод “штрафов” в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 143, № 4. С. 748–751.

7. **Благодатских В.И.** Принцип максимума для дифференциальных включений // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
8. **Васильев Л.В., Демьянов В.Ф.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
9. **Демьянов В.Ф.** Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

Поступила 14.05.2015

Карелин Владимир Витальевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: vlkarelin@mail.ru

Фоминых Александр Владимирович
аспирант
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: alexfomster@mail.ru