

УДК 517.977.5

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ МЕЖОРБИТАЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ
В НОРМАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ¹****И. Н. Кандоба, И. В. Козьмин, В. Б. Костоусов, Е. К. Костоусова,
А. Б. Ложников, В. И. Починский**

В работе рассматривается задача оптимального управления нелинейной динамической системой, описывающей движение специального космического аппарата в нормальном гравитационном поле. Этот аппарат предназначен для транспортировки полезной нагрузки с одной околоземной эллиптической орбиты на другую, более высокую целевую орбиту. Искомое управление должно удовлетворять ряду ограничений и обеспечивать доставку на заданную целевую орбиту полезной нагрузки максимальной массы с выполнением ряда требований к текущему фазовому состоянию динамической системы. Предлагаются подходы к решению этой задачи, приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: межорбитальный переход, оптимальное управление, конечная тяга, полезная нагрузка, фазовые ограничения.

I. N. Kandoba, I. V. Koz'min, V. B. Kostousov, E. K. Kostousova, A. B. Lozhnikov, V. I. Pochinskii. On an optimal orbit transfer in a normal gravitational field.

We consider an optimal control problem for a nonlinear dynamic system describing the motion of a special-purpose spacecraft in a normal gravitational field. The spacecraft is designed for transporting a payload from a near-Earth elliptic orbit to a higher target orbit. The required control must satisfy a number of constraints and provide the transfer of a maximum-weight payload to a given target orbit under some requirements on the current phase state of the system. We propose approaches to the solution of this problem and present results of numerical simulation.

Keywords: orbit transfer, optimal control, finite thrust, payload, state constraints.

1. Введение

В настоящее время одной из приоритетных задач в ракетно-космической отрасли является создание бюджетных технических средств, обеспечивающих выведение на околоземные орбиты полезной нагрузки максимальной массы. Один из подходов для решения этой задачи основан на применении специальных космических аппаратов — разгонных блоков, представляющих собой, как правило, цилиндрическую платформу, на которой размещается полезная нагрузка. Разгонный блок (РБ) является дополнительной ступенью ракеты-носителя (РН) и может быть доставлен на относительно низкие (опорные) орбиты с помощью РН легкого класса. Конструктивные особенности двигательной установки РБ позволяют ему функционировать достаточно продолжительное время практически в безвоздушном пространстве в условиях существенно меньшего влияния гравитационного поля Земли. Эти обстоятельства обуславливают значительно меньшие энергетические затраты для перемещения расположенной на РБ полезной нагрузки с опорных орбит на более высокие (целевые) орбиты по сравнению с обычными РН, например, Союз-2.

Задача заключается в построении управления РБ, обеспечивающего перевод с опорной орбиты на заданную целевую орбиту полезной нагрузки максимальной массы. При этом конструктивные особенности и технические характеристики РБ диктуют ряд требований к допустимому управлению и траектории движения. Эти требования приводят к возникновению

¹Работа выполнена при поддержке программы ориентированных фундаментальных исследований УрО РАН (проект 13-1-012-НПО).

в задаче ограничений на управление и текущее фазовое состояние нелинейной динамической системы, описывающей управляемое движение РБ.

В работе предлагаются методы построения допустимых в этой задаче управлений, которые существенно учитывают специфику рассматриваемой нелинейной динамической системы, в частности и то обстоятельство, что в нормальном поле тяготения функция гравитационного ускорения в отличие от центрального поля уже не обладает свойством сферической симметрии.

2. Постановка задачи

Будем считать, что РБ оснащен одним сравнительно мощным маршевым двигателем (МД), развивающим основную реактивную тягу, и восьмью относительно слабыми двигателями малой тяги (ДМТ), обеспечивающими требуемую пространственную ориентацию РБ во время его движения. Для описания движения РБ как твердого тела в инерциальной стартовой системе координат на промежутке $[t_0, t_f]$ используются уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= W_R(B, m, U, u) + g(x), \\ \dot{\omega} &= \Lambda(\omega, m) + M(m, U, u), \\ \dot{B} &= BA(\omega), \\ \dot{m} &= - \sum_{k=0}^8 \mu_k u_k. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Начальный момент t_0 рассматриваемого промежутка управления соответствует моменту выхода РН на опорную орбиту. Полагаем, что в этот момент происходит отделение РБ от РН и задаются начальные условия для системы (2.1):

$$x(t_0) = x^{(0)}, \quad v(t_0) = v^{(0)}, \quad \omega(t_0) = \omega^{(0)} = 0, \quad B(t_0) = B^{(0)}, \quad m(t_0) = m^{(0)}. \quad (2.2)$$

Здесь $x, v \in \mathbb{R}^3$ — векторы положения и скорости центра масс РБ; $\omega \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость; $B = \{b^j\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — матрица поворота со столбцами b^j (компоненты столбцов b^j — это проекции единичных векторов, направленных вдоль осей подвижной связанной системы координат на оси инерциальной стартовой системы); m — масса РБ; μ_k — положительные константы массового расхода топлива ($k = 0, 1, \dots, 9$); $W_R \in \mathbb{R}^3$ и $g \in \mathbb{R}^3$ — реактивное и гравитационное ускорения соответственно; $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^3$ и $M \in \mathbb{R}^3$ — функции специального вида. Выражения, задающие функции W_R , A , M и Λ , будут конкретизированы ниже, а что касается гравитационного ускорения g , то в нормальном поле тяготения оно задается функцией

$$g(x) = -g_0 \frac{a^2}{\|x\|^3} x + C_{20} g_0 \left(\frac{a}{\|x\|} \right)^4 \tilde{f}(x),$$

где g_0 — гравитационная постоянная на экваторе, a — большая экваториальная полуось общеземного эллипсоида, C_{20} — коэффициент зональной гармоник, а функция \tilde{f} определяется достаточно сложным выражением (см. [1, с. 31; 4]).

Управлениями служат функции:

1) $U(t) \in \mathbb{R}^2$, где U_i — углы поворота сопла МД ($i=1, 2$),

$$U(t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_f]; \quad \mathbb{U} = \{U = (U_1, U_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |U_1| \leq U_1^{\max}, |U_2| \leq U_2^{\max}\}; \quad (2.3)$$

2) $u(t) \in \mathbb{R}^9$, где $u_k(t) \in \{0, 1\}$ — функции типа включено/выключено, определяющие интервалы работы МД ($k = 0$) и ДМТ ($k = 1, \dots, 8$), т. е.

$$u_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{i=1}^{N_k} [\tau_i^{k+}, \tau_i^{k-}), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad t_0 \leq \tau_1^{k+} < \tau_1^{k-} < \tau_2^{k+} < \tau_2^{k-} < \dots < \tau_{N_k}^{k+} < \tau_{N_k}^{k-} \leq t_f. \quad (2.4)$$

Кроме того, к управляемому движению РБ предъявляется ряд дополнительных требований. Эти требования обуславливают наличие в задаче ограничений на управление и текущее фазовое состояние системы (2.1), (2.2). На практике число таких ограничений достаточно велико. Укажем наиболее существенные из них.

Прежде всего должны быть выполнены терминальные ограничения — РБ должен быть выведен на целевую орбиту с заданной точностью:

$$|i - \bar{i}| \leq \Delta_i, \quad |\Omega - \bar{\Omega}| \leq \Delta_\Omega, \quad |h_{\min} - \bar{h}_{\min}| \leq \Delta_{h_{\min}}, \quad |h_{\max} - \bar{h}_{\max}| \leq \Delta_{h_{\max}}, \quad |\omega_{\text{ор}} - \bar{\omega}_{\text{ор}}| \leq \Delta_\omega. \quad (2.5)$$

Здесь i — наклонение плоскости орбиты, Ω — долгота восходящего узла, h_{\min} и h_{\max} — минимальная и максимальная высоты орбиты соответственно, $\omega_{\text{ор}}$ — аргумент перигея. Эти параметры определяют эллиптическую оскулирующую орбиту (вообще говоря, отличную от круговой). Они однозначно определяются значениями $x(t_f)$, $v(t_f)$ [1; 4; 5]. Через \bar{i} , $\bar{\Omega}$, \bar{h}_{\min} , \bar{h}_{\max} , $\bar{\omega}_{\text{ор}}$ обозначены значения соответствующих параметров целевой орбиты, через Δ_i , Δ_Ω , $\Delta_{h_{\min}}$, $\Delta_{h_{\max}}$, Δ_ω — допустимые отклонения от этих параметров.

Следующие неравенства отражают содержательный смысл некоторых дополнительных, помимо (2.3) и (2.4), ограничений на управление: $N_0 \leq N_0^{\max}$, $\tau_1^{k+} - t_0 \geq \delta t_1$, $\tau_i^{k+} - \tau_{i-1}^{k-} \geq \delta t_2$, $\delta \tau \leq \tau_i^{k-} - \tau_i^{k+} \leq \Delta \tau$, где N_0^{\max} , δt_1 , δt_2 , $\delta \tau$, $\Delta \tau$ — заданные величины.

К фазовым ограничениям относятся, в частности, следующие. На продолжительных участках полета, где МД выключен, должно быть обеспечено равномерное вращение РБ вокруг его оси симметрии с заданной угловой скоростью; при этом ось симметрии на этих участках должна быть сориентирована перпендикулярно направлению на Солнце:

$$\omega(t) \equiv \bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, 0, 0)^\top, \quad x^{*\top} b^1(t) \equiv 0.$$

Опорная и целевая орбиты считаются эллиптическими, непересекающимися и компланарными. Пусть заданы значения параметров этих орбит; $x^{(0)}$, $v^{(0)}$ согласованы с опорной орбитой; момент t_f не фиксирован. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

З а д а ч а 1. Для управляемой системы (2.1) с заданными начальными условиями (2.2) найти кусочно-непрерывные программные управления $U(t)$ вида (2.3) и $u_k(t)$, имеющие структуру (2.4), которые максимизируют значение функционала $J_0[U, u] = m(t_f)$ и обеспечивают выполнение условий (2.5) на параметры целевой орбиты. При этом должны быть выполнены все дополнительные ограничения на управления и фазовое состояние.

Далее в задаче 1 будем исследовать только межорбитальные переходы РБ с двукратным включением МД ($N_0 = 2$).

Поскольку задача 1 характеризуется сложной нелинейной динамикой и обременена достаточно большим числом ограничений на управление и фазовое состояние динамической системы, представляется целесообразным сначала ее исследовать в упрощенной постановке.

3. Двухимпульсный межорбитальный переход центра масс РБ

Рассмотрим задачу построения оптимального импульсного управления, обеспечивающего орбитальный переход центра масс РБ (ЦМ) с помощью МД. Под импульсом понимается мгновенное ($t_i^- - t_i^+ = 0$, $i = 1, \dots, N_0$) изменение на $\Delta v^{(i)} = \Delta v(t_i^+)$ скорости v ЦМ в момент времени t_i^+ , $i = 1, \dots, N_0$ ($t_i^\pm = \tau_i^{0\pm}$, $i = 1, \dots, N_0$), а величина $\Delta V^{(i)} = \|\Delta v^{(i)}\|$ может быть произвольной (в том числе теоретически неограниченной). В этом случае в качестве оптимизируемого критерия может быть использована сумма приращений $\Delta V^{(i)}$ величины скорости в моменты t_i^+ сообщения импульсов. Как известно [3, с. 32], задача минимизации суммарного приращения величины скорости в точках сообщения импульсов равносильна задаче максимизации массы выводимого на целевую орбиту РБ.

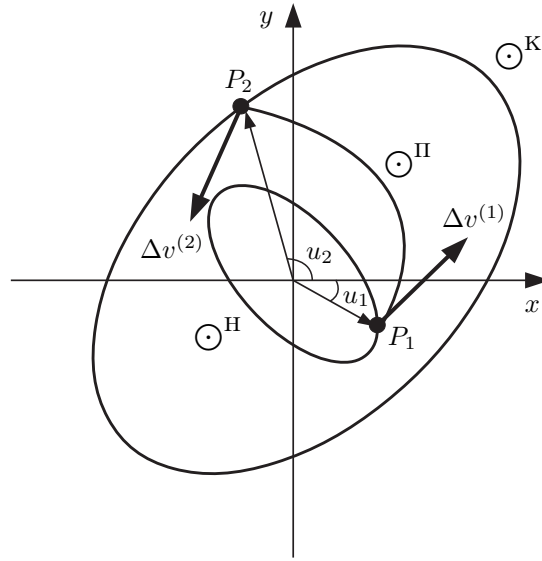


Рис. 1. Схема двухимпульсного перехода ЦМ между двумя компланарными эллиптическими орбитами.

Примем, что движение ЦМ на промежутке времени $[t_0, t_f]$ под воздействием импульсного управления описывается уравнениями

$$\dot{x} = v(t, \hat{U}), \quad \dot{v} = g(x), \quad (3.1)$$

где управляющими параметрами для заданного количества импульсов N_0 являются моменты $t_i^+ \in [t_0, t_f]$ сообщения импульсов, а также величины $\Delta V^{(i)}$ и единичные векторы $\Delta v^{(i)} / \|\Delta v^{(i)}\|$, задающие направления импульсов ($i = 1, \dots, N_0$). Тогда допустимое импульсное управление \hat{U} имеет следующую структуру:

$$\hat{U} = \{t_i^+, \Delta v^{(i)}\}_{i=1}^{N_0}, \quad t_i^+ \in [t_0, t_f], \quad i = 1, \dots, N_0. \quad (3.2)$$

Таким образом, вспомогательная задача оптимального управления ЦМ может быть сформулирована следующим образом.

З а д а ч а 2. Для управляемой системы (3.1) с заданными начальными условиями $x(t_0) = x^{(0)}$, $v(t_0) = v^{(0)}$ найти программное управление \hat{U} структуры (3.2), которое минимизирует значение функционала $J_1[\hat{U}] = \sum_{i=1}^{N_0} \Delta V^{(i)}$ и обеспечивает выполнение условий (2.5) на параметры целевой орбиты.

Пусть в двухимпульсном управлении начальный импульс сообщается в точке P_1 схода с опорной орбиты \odot^H , а конечный — в точке P_2 входа на орбиту целевую \odot^K ($N_0 = 2$, $t_1^+ = t_0$, $t_2^+ = t_f$) (см. рис. 1). Для построения управления, обеспечивающего оптимальный переход ЦМ между заданными опорной и целевой орбитами, предлагается следующий подход, основанный на специальной процедуре минимизации функции суммарного импульса $\Delta V = \Delta V^{(1)} + \Delta V^{(2)}$. Для двух точек P_1 и P_2 на опорной и целевой орбитах, заданных соответствующими значениями аргументов широты u_1 и u_2 , движение ЦМ по переходной орбите $\odot^П$ на фиксированном интервале времени $[t_0, t_f]$ описывается решением краевой задачи

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = g(x), \quad x(t_0) = P_1(u_1), \quad x(t_f) = P_2(u_2). \quad (3.3)$$

Поскольку движение ЦМ осуществляется в нормальном поле тяготения, то его переходная орбита $\odot^П$ не является плоской (лежащей в плоскости компланарных эллиптических опорной и целевой орбит) и импульсы $\Delta v^{(1)}$, $\Delta v^{(2)}$ скорости ЦМ в заданных точках P_1 и P_2 на опорной и целевой орбитах являются также трехмерными. Эти импульсы могут быть представлены в следующем виде:

$$\Delta v^{(1)} = v(t_0) - v_H(u_1), \quad \Delta v^{(2)} = v(t_f) - v_K(u_2),$$

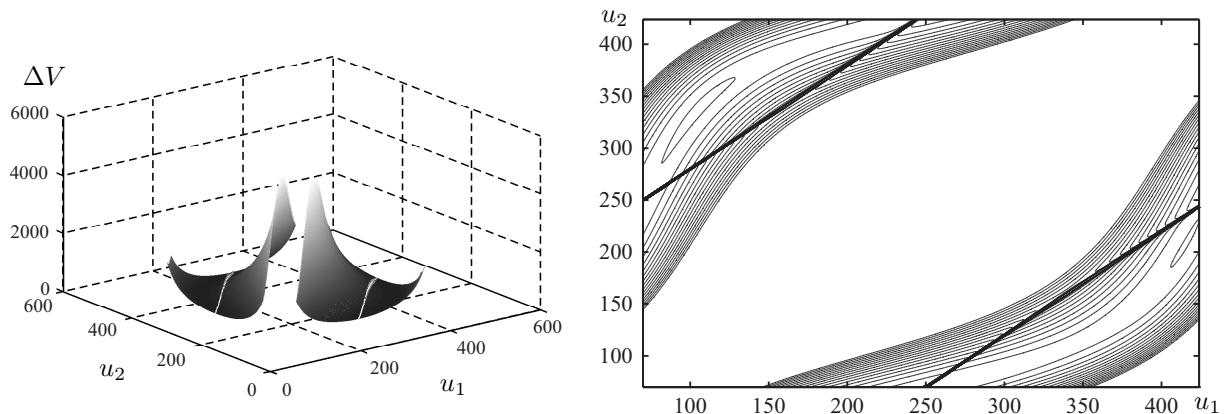


Рис. 2. График функции $\Delta V = \Delta V(u_1, u_2)$ и ее линий уровня.

где для фиксированного значения t_f начальная $v(t_0)$ и конечная $v(t_f)$ скорости ЦМ определяются в результате решения краевой задачи (3.3); $v_H(u_1)$, $v_K(u_2)$ — скорости движения ЦМ по опорной и целевой орбитам в точках P_1 и P_2 соответственно. Эти скорости можно аналитически вычислить, используя значения параметров соответствующих орбит и аргументов широты u_1 и u_2 , по известным [1, с. 194] формулам небесной механики с учетом необходимого преобразования систем координат.

Таким образом, задачу построения оптимального импульсного управления, обеспечивающего переход ЦМ между заданными опорной и целевой орбитами, можно сформулировать как задачу минимизации функции суммарного импульса $\Delta V = \Delta V(t_f, u_1, u_2)$ — функции трех переменных. Алгоритм решения этой задачи основан на ее декомпозиции на две проблемы: внутреннюю и внешнюю оптимизационные задачи.

Под внутренней оптимизационной задачей понимается задача минимизации функции $\Delta V(t_f) = \Delta V(t_f, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, где \bar{u}_1 , \bar{u}_2 — некоторые фиксированные значения параметров u_1 и u_2 соответственно. Численное решение этой задачи связано с многократным решением краевой задачи (3.3).

Внешней оптимизационной задачей является задача минимизации функции $\Delta V(u_1, u_2) = \Delta V(t_f^*(u_1, u_2), u_1, u_2)$, где $t_f^*(u_1, u_2)$ — решение внутренней оптимизационной задачи, соответствующее паре значений u_1 и u_2 .

Численная реализация описанной выше процедуры глобальной минимизации функции $\Delta V = \Delta V(t_f, u_1, u_2)$ сопряжена с решением вопросов, связанных с единственностью и устойчивостью решений краевой задачи (3.3). Не для всех пар значений u_1 , u_2 эта краевая задача является корректно поставленной. Более подробное изложение этого приведено ниже.

Результаты численного моделирования. Описанный выше алгоритм построения оптимального двухимпульсного перехода ЦМ между двумя заданными точками на опорной и целевой орбитах был численно апробирован в рамках достаточно объемного вычислительного эксперимента. В этом эксперименте варьировались значения аргументов широты u_1 и u_2 , задающих различные пары точек P_1 и P_2 на указанных орбитах. В результате были численно построены функции суммарного импульса ΔV как функции двух аргументов $\Delta V = \Delta V(u_1, u_2)$.

Результаты численного моделирования функции $\Delta V = \Delta V(u_1, u_2)$ представлены на рис. 2. Отображенная на этом рисунке функция ΔV была численно построена для двух соосных (коаксиальных) опорной и целевой орбит — аргументы перигея опорной и целевой орбит совпадают. Параметры этих орбит имеют следующие значения: для опорной орбиты $h_{\min} = 260$ км, $h_{\max} = 528.4$ км; для целевой орбиты $\bar{h}_{\min} = 800$ км, $\bar{h}_{\max} = 2500$ км. Остальные параметры взяты одинаковыми: $i = \bar{i} = 97.372^\circ$, $\Omega = \bar{\Omega} = 55.4993^\circ$, $\omega_{\text{ор}} = \bar{\omega}_{\text{ор}} = 68.942^\circ$. Здесь минимальное значение ΔV_{\min} функции ΔV равно приблизительно 600 м/сек.

Численный анализ таких функций суммарного импульса $\Delta V = \Delta V(u_1, u_2)$ (не обязательно для соосных орбит) показывает, что они являются функциями овражного типа. Множество их локальных минимумов сосредоточено вдоль узких длинных областей, где расположено дно оврагов. В этих областях функции меняются мало. Как показывает анализ результатов вычислительного эксперимента, существует достаточно длинная область в плоскости переменных (u_1, u_2) , где значения оптимизируемого в задаче 2 критерия близки к экстремальному. С увеличением эксцентриситета орбит линии уровня и ограниченные ими узкие области становятся более изогнутыми.

Появление двух узких белых полос на рис. 2 слева и соответствующих им двух прямых темных полос на рис. 2 справа объясняется особенностями используемого подхода к решению задачи. Это области, где решение краевой задачи (3.3) не единственно, либо неустойчиво. Известно, что для случая центрального гравитационного поля (когда $C_{20} = 0$ в формуле для $g(x)$) задача (3.3) имела бы бесконечное число решений при $|u_2 - u_1| = 180^\circ$: одно решение соответствует одной плоскости переходной орбиты. В этом случае оптимальное по критерию минимизации функции суммарного импульса ΔV решение легко выделить: оно соответствует переходной орбите, лежащей в плоскости целевой и опорной орбит. Для нормального гравитационного поля в области неединственности решения переменные u_1, u_2 близки к значениям, где $|u_2 - u_1| = 180^\circ$ (см. рис. 2 справа), но для этого поля оптимальное решение выделить сложнее, так как соответствующая ему переходная траектория не принадлежит одной плоскости. Вблизи области неединственности решение неустойчиво. Для вычисления значений функции $\Delta V(u_1, u_2)$ в области некорректности краевой задачи (3.3) необходима модификация ее постановки. Одна из возможных модификаций состоит в выборе другой независимой переменной для ΔV вместо t_f . Если взять в качестве такой переменной одну из компонент скорости движения ЦМ по переходной траектории в начальный или конечный момент времени, например $\hat{v} = v_1(t_0)$, то внутренняя оптимизационная задача будет состоять в минимизации $\Delta V(\hat{v}) = \Delta V(\hat{v}, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, где ΔV находится в результате решения на интервале времени $[t_0, t_f]$ краевой задачи

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = g(x), \quad x(t_0) = P_1(\bar{u}_1), \quad v_1(t_0) = \hat{v}, \quad x(t_f) = P_2(\bar{u}_2),$$

в которой конечный момент t_f выступает в качестве неизвестного параметра.

4. Межорбитальный переход РБ как твердого тела с помощью конечной тяги

Результаты исследования вспомогательной задачи 2 позволяют сделать заключение, что существует достаточно много потенциально приемлемых альтернатив в выборе упомянутых выше точек на опорной и целевой орбитах для осуществления близкого к оптимальному орбитального перехода РБ.

Кроме того, решение задачи 2 дает полезную для решения задачи 1 априорную информацию о приблизительных энергетических затратах и направлениях вектора тяги МД в схемах выведения РБ с двукратным включением МД. В частности, решение задачи 2 может быть положено в основу начального приближения допустимого управления в задаче 1. Ниже приводится один из способов построения такого содержательного начального приближения, основанный на “распределении” заданного импульса скорости, а также предлагается общая схема решения задачи 1. Под “распределением” импульса скорости понимаем определение направления вектора тяги МД и промежутка времени его работы, на котором реализуется заданное импульсом приращение скорости центра масс РБ в системе (2.1).

В предлагаемых подходах к “распределению” импульса скорости и построения допустимых в задаче 1 управлений существенно используется специфика выражений, задающих динамическую систему (2.1), а также свойства управлений u_k , $k = 0, 1, \dots, 8$.

Свойства управлений u_k , $k = 0, 1, \dots, 8$. Прежде всего конкретизируем специфику функций, входящих в (2.1):

$$W_R = m^{-1}B(P^I h(U)u_0 + P^{II}L(u)), \quad M = \text{diag} \{J_i^{-1}(m)\} (P^I \tilde{h}(m, U)u_0 + P^{II} \tilde{L}(m, u)),$$

$$h(U) = (\cos U_1 \cos U_2, \sin U_1 \cos U_2, -\sin U_2)^\top, \quad \tilde{h}(m, U) = (0, l_1 \sin U_2, l_1 \sin U_1 \cos U_2)^\top,$$

$$L(u) = \begin{pmatrix} \sin \theta(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \\ \cos \theta(u_1 - u_2) + u_5 - u_7 \\ \cos \theta(-u_3 + u_4) + u_6 - u_8 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}(m, u) = \begin{pmatrix} l_2(-u_5 + u_6 - u_7 + u_8) \\ l_3(-u_3 + u_4) + l_4(-u_6 + u_8) \\ l_3(u_1 - u_2) + l_4(u_5 - u_7) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ J_2^{-1}(J_2 - J_1)\omega_3\omega_1 \\ -J_2^{-1}(J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь P^I и P^{II} — величины тяги МД и каждого из восьми ДМТ; θ — известная константа; $l_i = l_i(m)$ — известные функции ($i = 1, 2, 3, 4$); $J_i = J_i(m)$ — осевые моменты инерции РБ ($i = 1, 2, 3$), $J_2 \equiv J_3$.

Рассмотрим теперь свойства управлений u_k , $k = 0, 1, \dots, 8$.

С одной стороны, укажем некоторые полезные свойства управлений u_k , $k = 1, \dots, 8$, при условии $u_0 \equiv 0$, вытекающие из (4.1) и позволяющие, в частности, использовать известные результаты об оптимальном управлении для ряда задач управления системами типа (4.5), приведенными ниже. Эти функции можно разбить на пары $\{u_1, u_2\}$, $\{u_3, u_4\}$, $\{u_5, u_7\}$, $\{u_6, u_8\}$. Удобно рассматривать вспомогательные управления, являющиеся суммами типа $u_{ij}^{s_i s_j} = s_i u_i + s_j u_j$, где $s_i, s_j \in \{-1, 1\}$: $s_i = +$, если $s_i = 1$, т. е. u_i входит в сумму с плюсом; $s_i = -$, если $s_i = -1$, т. е. u_i входит в сумму с минусом.

С в о й с т в о 1. Если u_i и u_j могут принимать (как в (2.4)) только два значения: 0 и 1, то u_{ij}^{++} могут принимать три неотрицательных значения 0, 1, 2, а управления u_{ij}^{+-} — три значения с разными знаками из множества $\{-1, 0, 1\}$: $u_{ij}^{+-} = 0$, если $u_i = u_j$; $u_{ij}^{+-} = 1$, если $u_i = 1, u_j = 0$; $u_{ij}^{+-} = -1$, если $u_i = 0, u_j = 1$. При этом $u_{ij}^{+-} = 0$ может быть получено при $u_i = u_j = 0$ и при $u_i = u_j = 1$. Второй случай исключаем из рассмотрения при обратном переходе от управлений u_{ij}^{+-} к u_i и u_j , исходя из соображений минимизации расхода топлива.

С в о й с т в о 2. При выборе одной из трех комбинаций значений: либо $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$, либо $u_5 = u_7 = 1, u_6 = u_8 = 0$, либо $u_5 = u_7 = 0, u_6 = u_8 = 1$ получаем для 1-й компоненты вектора M нулевой либо ненулевой член соответствующего знака с множителем $\tilde{u}_1 = -u_5 + u_6 - u_7 + u_8 = -u_{57}^{++} + u_{68}^{++}$, равным соответственно либо $\tilde{u}_1 = 0$, либо $\tilde{u}_1 = -2$, либо $\tilde{u}_1 = 2$. При этом вклад четверки $\{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ в вектор W_R и во 2-ю и 3-ю компоненты вектора M окажется нулевым.

С в о й с т в о 3. При $u_1 = u_2, u_3 = u_4$ вклад $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ в вектор M и во 2-ю и 3-ю компоненты вектора W_R (при $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ также и в 1-ю компоненту W_R) окажется нулевым.

С в о й с т в о 4. Эффект от свойств 2 и 3 в системе (2.1), (4.1) может быть интерпретирован, в частности, как возможность управления первой компонентой ω_1 вектора угловой скорости ω (например, с целью придания ей и дальнейшего удержания желаемого значения $\omega_1 = \bar{\omega}_1$) с помощью релейного управления $\tilde{u}_1 = -u_{57}^{++} + u_{68}^{++}$ со значениями из множества $\{-2, 0, 2\}$. При этом если начальные условия для 2-й и 3-й компонент вектора ω были нулевыми и выполняется $u_1 = u_2, u_3 = u_4$, то эти компоненты по-прежнему останутся нулевыми.

С в о й с т в о 5. Можно ввести также вспомогательные управления $\tilde{u}_2 = -u_3 + u_4 = u_{34}^{-+}$ и $\tilde{u}_3 = u_1 - u_2 = u_{12}^{+-}$, которые входят в M_2 и M_3 соответственно. Тогда, выбирая одну из трех следующих комбинаций: либо $u_3 = u_4 = 0$, либо $u_3 = 0, u_4 = 1$, либо $u_3 = 1, u_4 = 0$, получаем соответственно либо $\tilde{u}_2 = 0$, либо $\tilde{u}_2 = 1$, либо $\tilde{u}_2 = -1$. Аналогично можно получить либо $\tilde{u}_3 = 0$, либо $\tilde{u}_3 = 1$, либо $\tilde{u}_3 = -1$. Таким образом, управление вектором ω при использовании

пар $\{u_3, u_4\}$ и $\{u_1, u_2\}$ указанным образом и выполнении условий $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$ эквивалентно управлению динамикой ω с помощью двух релейных управляющих функций \tilde{u}_2 и \tilde{u}_3 , принимающих значения из множеств $\{-1, 0, 1\}$ и входящих аддитивно в правые части дифференциальных уравнений для 2-й и 3-й компонент вектора ω соответственно.

С в о й с т в о 6. При условии, что скорость вращения ω_1 установлена равной желаемой величине (в частности, значению $\bar{\omega}_1$), эффект от свойства 5 может быть интерпретирован как возможность, при соблюдении условия $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$, управления 2-й и 3-й компонентами вектора ω в силу двумерной *линейной* колебательной системы с помощью двух упомянутых выше релейных управлений $\tilde{u}_2 = u_{34}^{-}$ и $\tilde{u}_3 = u_{12}^{+-}$.

С в о й с т в о 7. Пусть $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$, $u_3 = u_4 = 0$. Тогда $M_1 = M_2 = 0$, а M_3 пропорционально $\tilde{u}_3 = u_1 - u_2 = u_{12}^{+-}$. Поэтому при начальном условии для ω с нулевыми значениями 1-й и 2-й компонент использование $\tilde{u}_3 = u_{12}^{+-}$ позволяет управлять в силу (2.1), (4.1) величиной ω_3 с целью придания ей желаемого значения $\tilde{\omega}_3$ независимо от ω_1 и ω_2 (оставляя их равными нулю). После того как достигнуто значение $\omega = (0, 0, \tilde{\omega}_3)^T = \tilde{\omega}$, использование управления $\tilde{u}_3 \equiv 0$ (т. е. $u_1 = u_2 = 0$) позволяет поддерживать для ω это постоянное значение. При этом $A(\omega)$ упрощается и принимает специфический вид, который обеспечит в силу уравнений $\dot{B} = BA(\tilde{\omega})$ вращательное движение 1-го и 2-го ортов связанной системы координат (столбцов b^j матрицы B) вокруг орта b^3 (сохраняющего свое значение) с постоянной угловой скоростью, равной $\tilde{\omega}_3$.

С другой стороны, функции u_k полностью определяются значениями $\tau_i^{k\pm}$, $i=1, \dots, N_k$, т. е. конечным числом параметров. Это может быть удобно, в частности, для сведения ряда задач управления, упомянутых ниже (см. задачи типа 3–5), к задачам математического программирования, а также может быть учтено при использовании подхода, аналогичного описанному в [4] и основанного на решении вспомогательных задач оптимального управления на фиксированном промежутке времени. Управляющими параметрами в последних будут служить $U(\cdot)$ и $\tau_i^{k\pm}$, а минимизируемые функционалы будут включать слагаемые, отвечающие за суммарную длительность работы двигателей, значения параметров целевой орбиты и другие фазовые ограничения (используется идеология метода внешних штрафов). Для численного решения можно воспользоваться методами спуска в пространстве управлений, в частности методом типа метода сопряженных градиентов. Градиенты функционалов могут быть вычислены аналогично [6, с. 32–34, с. 61–63].

Например, для системы типа

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, U, u) = f^0(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N f^k(\mathbf{x}, U) u_k, \quad t \in [t_0, t_f], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

с минимизируемым функционалом типа

$$J[U(\cdot), u(\cdot)] = \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + J_2[u(\cdot)],$$

где

$$J_2[u(\cdot)] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\mu_k)^2 \sum_{i=1}^{N_k} (\tau_i^{k-} - \tau_i^{k+})^2,$$

получаем формулы

$$\frac{\partial J}{\partial U} = f_U^\top \Psi, \quad \frac{\partial J}{\partial \tau_i^{k+}} = -(\Psi^\top f^k)|_{t=\tau_i^{k+}+0} - (\mu_k)^2 (\tau_i^{k-} - \tau_i^{k+}),$$

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_i^{k-}} = (\Psi^\top f^k)|_{t=\tau_i^{k-}-0} + (\mu_k)^2 (\tau_i^{k-} - \tau_i^{k+}),$$

где $\Psi(\cdot)$ — непрерывное решение сопряженной системы $\frac{d}{dt} \Psi = -f_{\mathbf{x}}^\top \Psi$, $t \in [t_0, t_f]$, $\Psi(t_f) = \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f))$; $(\Psi^\top f^k)|_{t=\tau_i^{k\pm} \pm 0} = \Psi(\mathbf{x}(\tau_i^{k\pm}))^\top f^k(\mathbf{x}(\tau_i^{k\pm}), U(\tau_i^{k\pm} \pm 0))$.

“Распределение” импульса скорости. Пусть в результате решения задачи 2 удалось найти нужные импульсы скорости $\Delta v^{(i)} \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, позволяющие перевести центр масс РБ с опорной орбиты на целевую. Предлагается по ним построить в задаче 1 начальное приближение для функций U , считая, что эти приближения отличны от нуля только на двух промежутках времени $[t_i^+, t_i^-]$, $i = 1, 2$ (на этих промежутках $u_0 = 1$; в остальные моменты времени $u_0 = 0$); начальные точки t_i^+ определяются по моментам сообщения импульсов $\Delta v^{(i)}$.

Будем считать, что на каждом из промежутков $[t_i^+, t_i^-]$ имеем $u_k = 0$, $k = 1, \dots, 8$, и вектор-функция $U \in \mathbb{R}^2$ постоянна: $U(t) \equiv U^{(i)}$, $t \in [t_i^+, t_i^-]$, $i = 1, 2$. Обозначим длины промежутков через Δt_i : $\Delta t_i = t_i^- - t_i^+$. Формулы для нахождения компонент векторов $U^{(i)} \in \mathbb{R}^2$ и значений Δt_i , $i = 1, 2$, могут быть получены из уравнений (2.1) движения РБ. “Распределяя” импульс скорости Δv (индекс $i \in \{1, 2\}$ для компактности формул опустим) на промежуток длины Δt , можно приближенно считать, что $\Delta v / \Delta t \approx W_R$, откуда, используя выражение для реактивного ускорения W_R (см. (4.1)), получаем $\Delta v / \Delta t \approx (P^I / m) B h(U)$, где P^I — величина тяги МД, $h(U) = (\cos U_1 \cos U_2, \sin U_1 \cos U_2, -\sin U_2)^\top$, масса m и матрица B берутся в начальный момент рассматриваемого промежутка $[t^+, t^-]$. Тогда можно найти величины Δt , U_1 и U_2 из трех уравнений, соответствующих покомпонентной записи векторного равенства

$$\frac{m}{P^I} B^\top \Delta v = \Delta t h(U). \quad (4.2)$$

Значение Δt легко вычислить, приравняв евклидовы нормы векторов из обеих частей (4.2), учтя ортогональность матрицы B и соотношение $\|h(U)\| = 1$, а значения U_2 и U_1 — из третьего и второго уравнений (4.2) соответственно. В предположении, что выполнено условие

$$\Delta v^\top b^1(t^+) > 0, \quad (4.3)$$

приходим к следующим выражениям:

$$\Delta t = \frac{m(t^+)}{P^I} \|\Delta v\|, \quad U_1 = \arcsin\left(\frac{\Delta v^\top b^2(t^+)}{\sqrt{\|\Delta v\|^2 - (\Delta v^\top b^3(t^+))^2}}\right), \quad U_2 = \arcsin\left(-\frac{\Delta v^\top b^3(t^+)}{\|\Delta v\|}\right), \quad (4.4)$$

где \arcsin понимается в смысле главного значения. Условие (4.3) выполняется, в частности, если $b^1(t^+) \approx \bar{v} / \|\bar{v}\|$, где $\bar{v} = \text{sign}(v^\top(t^+) \Delta v) v(t^+)$. При этом для соосных опорной и целевой орбит и переходных орбит типа Гоманна [5, с. 159–161] величины U_i оказываются близкими к нулю (так как при таких маневрах и указанном условии вектор Δv примерно коллинеарен вектору скорости и, значит, вектору $b^1(t^+)$ и приблизительно ортогонален двум другим столбцам ортогональной матрицы B), и соотношения (4.4) приводят к управлению $U \in \mathbb{U}$.

Общая схема решения задачи 1. В заключение кратко, не вдаваясь в детали, остановимся на вопросе осуществления межорбитального перехода РБ с помощью конечной тяги. Реализация одного из подходов к построению допустимого в основной задаче 1 управления сопряжена с численным решением нескольких вспомогательных задач управления вращением РБ как твердого тела. В этих задачах вращательное движение РБ на некотором промежутке времени $[t_1, t_2]$ описывается уравнениями следующего типа из системы (2.1):

$$\dot{\omega} = \Lambda(\omega, \bar{m}) + M(\bar{m}, 0, u), \quad \dot{B} = B \cdot A(\omega) \quad (u_0 \equiv 0). \quad (4.5)$$

Задача 3. Осуществить разворот первого столбца b^1 матрицы B по заданному вектору \bar{v} : $b^1(t_2) = \bar{v} / \|\bar{v}\|$.

Задача 4. Осуществить разворот первого столбца b^1 матрицы B ортогонально заданному направлению x^* : $x^{*\top} b^1(t_2) = 0$.

Задача 5. Установить заданную угловую скорость: $\omega(t_2) = \bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, 0, 0)^\top$.

Приведенные формулировки задач 3–5 не претендуют на полноту. В частности, промежуток $[t_1, t_2]$ может быть как фиксированным, так и нефиксированным; в задачах не указан

критерий качества. С точки зрения минимизации расхода топлива можно ввести в формулировку условие минимизации функционала

$$J_3[u(\cdot)] = \sum_{k=1}^8 \mu_k \sum_{i=1}^{N_k} (\tau_i^{k-} - \tau_i^{k+}).$$

Заметим, что решение задачи 4 может быть сведено к решению задачи типа 3. С учетом специфики формул для правых частей в (4.5) (см. (4.1)) для решения задачи 5 можно адаптировать (с учетом описанных выше свойств 4 и 6 функций u_k) известные законы управления [2, с. 525–537], а также несложно найти (с учетом свойств 4, 6 и 7) приближение к решению задачи 3 в том случае, когда вектор \bar{v} примерно ортогонален $b^3(t_1)$.

Для построения допустимых в задаче 1 управлений РБ с двукратным включением МД предлагается общая двухимпульсная схема выведения РБ с помощью конечной тяги. Эта схема реализуется в результате последовательного выполнения на промежутке $[t_0, t_f]$ следующих шагов.

1) Решение задачи 2 при $N_0 = 2$, т. е. нахождение импульсов скорости $\Delta v^{(i)} \in \mathbb{R}^3$ и моментов t_i^+ их сообщения, $i = 1, 2$.

2) Нахождение u на промежутке $[t_0, t_1^+]$ путем решения задачи 3 для некоторого подходящего значения \bar{v} , например для $\bar{v} = \text{sign}(v^{(1)\top} \Delta v^{(1)})v^{(1)}$, где $v^{(1)}$ вычислено в момент $t = t_1^+$ в силу системы (3.1).

3) Нахождение Δt_1 и $U^{(1)}$ по формулам (4.4) и использование на промежутке $[t_1^+, t_1^-]$, где $t_1^- = t_1^+ + \Delta t_1$, управлений $U \equiv U^{(1)}$, $u_0 \equiv 1$, $u_k \equiv 0$, $k = 1, \dots, 8$.

4) Нахождение u на некотором промежутке $[t_1^-, t_1]$ путем решения комбинации задач 4 и 5.

5) Пассивное движение РБ ($u \equiv 0$) на некотором промежутке $[t_1, t_2]$ с выполнением условий $\omega \equiv (\bar{\omega}_1, 0, 0)^\top$ и $x^{*\top} b^1 \approx 0$.

6) Нахождение u на промежутке $[t_2, t_2^+]$ путем решения задачи 3 для некоторого подходящего значения \bar{v} , например для $\bar{v} = \text{sign}(v^{(2)\top} \Delta v^{(2)})v^{(2)}$, где через $v^{(2)}$ обозначена скорость центра масс, вычисленная в момент $t = t_2^+$ в силу системы (3.1) на $[t_1^+, t_2^+]$ с начальными условиями, учитывающими сообщение импульса $\Delta v^{(1)}$ в момент t_1^+ .

7) Нахождение Δt_2 и $U^{(2)}$ по формулам типа (4.4). Осуществление на промежутке $[t_2^+, t_f]$, где $t_f = t_2^+ + \Delta t_2 + \delta t$, маневра РБ с целью выполнения терминальных ограничений (2.5). При этом в качестве начального приближения берется $U \equiv U^{(2)}$, $u_0 \equiv 1$, $u_k \equiv 0$, $k = 1, \dots, 8$ при $t \in [t_2^+, t_2^+ + \Delta t_2]$, а для дальнейшего уточнения управления может быть использована схема, например, подобная предложенной в [4].

Что же касается оптимального в основной задаче 1 управления, то для его построения можно воспользоваться известным аппаратом задач нелинейного программирования. В частности, может быть применен описанный в [7] метод дискретизации задачи оптимального управления на основе формул Рунге — Кутты четвертого порядка. Однако следует отметить, что его использование приводит к задаче достаточно большой размерности.

5. Заключение

Разработаны новые и модифицированы известные методы и численные алгоритмы построения допустимых управлений для нелинейной динамической системы, описывающей движение РБ при наличии ограничений на управление и текущее фазовое состояние системы. Результаты численного моделирования свидетельствуют о применимости предлагаемых подходов к решению прикладных задач, которые в настоящее время являются достаточно актуальными для разработчиков систем управления для ракетно-космической техники. Кроме того, исследуемая в работе задача представляет также теоретический интерес как пример нерешенной в

общем случае задачи оптимального управления нелинейной динамической системой с фазовыми ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г.** Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.
2. **Атанс М., Фалб П.** Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
3. **Ивашкин В.В.** Оптимизация космических маневров. М.: Наука, 1975. 392 с.
4. **Костоусова Е.К., Починский В.И.** О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 201–216.
5. **Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.** Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
6. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
7. **Enright P.J., Conway V.A.** Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming // J. Guidance, Control and Dynamics. 1992. Vol. 15, № 4. P. 994–1002.

Поступила 12.05.2015

Кандоба Игорь Николаевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kandoba@imm.uran.ru

Костоусов Виктор Борисович
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. отделом
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: vkost@imm.uran.ru

Ложников Андрей Борисович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ABLozhnikov@yandex.ru

Козьмин Иван Викторович
науч. сотрудник
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ikozmin@imm.uran.ru

Костоусова Елена Кирилловна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kek@imm.uran.ru

Починский Вениамин Иванович
канд. техн. наук
ведущий науч. сотрудник
ОАО НПО автоматики
им. акад. Н. А. Семихатова