ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.542

# КОНЕЧНЫЕ ПОЧТИ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ С ГРАФАМИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, ВСЕ СВЯЗНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ КЛИКАМИ[1]

**М. Р. Зиновьева, А. С. Кондратьев**

Определены конечные почти простые группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами, т. е. полными графами. Ключевым для доказательства этого является следующий полученный нами факт, имеющий независимый интерес: в графе простых чисел конечной простой неабелевой группы существуют две несмежные нечетные вершины, не делящие порядок группы внешних автоморфизмов этой группы.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, граф простых чисел.

M. R. Zinov'eva, A. S. Kondrat'ev. Finite almost simple groups with prime graphs all of whose connected components are cliques.

We find finite almost simple groups with prime graphs all of whose connected components are cliques, i.e., complete graphs. The proof is based on the following fact, which was obtained by the authors and is of independent interest: the prime graph of a finite simple nonabelian group contains two nonadjacent odd vertices that do not divide the order of the outer automorphism group of this group.

Keywords: finite group, almost simple group, prime graph.

## Введение

Пусть $G$ — конечная группа и $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка. Граф со множеством вершин $\pi(G)$, в котором две вершины $r$ и $s$ смежны тогда и только тогда, когда $G$ содержит элемент порядка $rs$, называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы $G$ и обозначается через $\Gamma(G)$.

Лючидо и Могхаддамфар [11] определили конечные простые неабелевы группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются *кликами*, т. е. полными графами. А. В. Васильев и Е. П. Вдовин [1] устранили неточности, допущенные в этой статье М. Р. Зиновьева и В. Д. Мазуров [3] определили конечные простые неабелевы группы, графы простых чисел которых совпадают с графами простых чисел групп Фробениуса или 2-фробениусовых групп.

В данной работе мы рассматриваем конечные *почти простые* группы, т. е. группы с простым неабелевым цоколем, с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами, и получаем следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — конечная почти простая, но не простая группа. Все связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются кликами тогда и только тогда, когда граф $\Gamma(G)$ несвязен и $G$ изоморфна группе из следующего списка*:

(1) $S_6$, $M_{10}$, $PGL_2(9)$, $S_8$, $S_{12}$, $\mathrm{Aut}(L_2(8))$, $\mathrm{Aut}(L_3(3))$, $L_3(4):2_1$, $L_3(8):2$, $L_3(8):3$, $\mathrm{Aut}(L_3(8))$, $\mathrm{Aut}(U_3(3))$, $U_3(9):2$, $\mathrm{Aut}(U_3(9))$, $\mathrm{Aut}(U_5(2))$, $\mathrm{Aut}(^3D_4(2))$, $\mathrm{Aut}(Sz(32))$;

(2) $L_2(2^m))\langle f\rangle$, *где $f$ — полевой автоморфизм группы $L_2(2^m)$ и $|f| = 2^k > 1$*;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 15-11-10025 (теорема 1), а также РФФИ, проект 13-01-00469, Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект 15-16-1-5, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006) (теорема 2).

(3) $PGL_2(p)$, *где* $p > 3$ *— простое число Ферма или Мерсенна*;

(4) $L_2(p^m)\langle df\rangle$, *где* $p$ *— нечетное простое число,* $m$ *четно,* $d$ *и* $f$ *— диагональный и инволютивный полевой автоморфизмы группы* $L_2(p^m)$ *соответственно*;

(5) $L_3(2^m)\langle x\rangle$, *где* $m \geq 5$, $(2^m-1)_3 \neq 3$, $|x| = 2\cdot 3^k$, $x^2$ *— полевой автоморфизм, а* $x^{3^k}$ *— графовый автоморфизмы группы* $L_3(2^m)$;

(6) $L_3(p):2$, *где* $p \geq 127$ *— простое число Мерсенна и* $(p-1)_3 \geq 9$;

(7) $U_3(2^m)\langle f\rangle$, *где* $(2^m+1)_3 \neq 3$, $f$ *— полевой автоморфизм группы* $U_3(2^m)$ *и* $|f| = 2^l\cdot 3^k$ *для* $l > 0$;

(8) $U_3(p):2$, *где* $p \geq 17$ *— простое число Ферма и* $(p+1)_3 \geq 9$;

(9) $G_2(3^m)\langle f\rangle$, *где* $f$ *— полевой автоморфизм группы* $G_2(3^m)$ *и* $\varnothing \neq \pi(|f|) \subseteq \{2,3\}$;

(10) $PSp_4(q)\langle f\rangle$, *где* $f$ *— полевой автоморфизм группы* $PSp_4(q)$ *и* $|f| = 2^k > 1$;

(11) $PSp_4(q)\langle df\rangle$, *где* $d$ *и* $f$ *— диагональный и полевой автоморфизмы группы* $PSp_4(q)$ *соответственно и* $|f| = 2^k > 1$.

Ключевым для доказательства теоремы 1 является следующий полученный нами результат, имеющий независимый интерес.

**Теорема 2.** *Пусть* $G$ *— конечная простая неабелева группа. Тогда в графе* $\Gamma(G)$ *существуют две несмежные нечетные вершины, не делящие* $|\mathrm{Out}(G)|$, *причем такие вершины можно выбрать из* $\pi_1(G)$, *за исключением следующих случаев*:

(1) $\pi_1(G)$ *является кликой*;

(2) $G \cong L_3^{\varepsilon}(q)$, *где* $q = p^m > 2$, $p$ *— простое число,* $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+,-\}$ *и либо* $\pi(q+\varepsilon 1) = \{2\}$ *и* $(q-\varepsilon 1)_3 = 3$, *либо* $p$ *делит* $2m$;

(3) $G \cong U_5(2)$.

## 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения в основном стандартны, их можно найти, например, в [6;7;9]. В частности, если $A$ и $B$ — группы, $p$ — простое число и $n$ — натуральное число, мы используем следующие обозначения: $\pi(n)$ — для множества всех простых делителей числа $n$, $n_p$ — для наибольшей степени числа $p$, делящей $n$, $\mathbb{Z}_n$ (или просто $n$) — для циклической группы порядка $n$, $A:B$ ($A \leftthreetimes B$) — для расщепляемого расширения (полупрямого произведения) группы $A$ посредством группы (на группу) $B$. Если $K$ — конечная простая группа лиева типа, то $Inndiag(K)$ обозначает группу, порожденную всеми внутренними и диагональными автоморфизмами группы $K$. Кроме того, через $L_n^{\varepsilon}(q)$ для $\varepsilon \in \{+,-\}$ обозначаются $L_n(q) = PSL_n(q) = A_{n-1}(q)$ при $\varepsilon = +$ и $U_n(q) = PSU_n(q) = {}^2A_{n-1}(q)$ при $\varepsilon = -$.

Пусть $G$ — конечная группа. Обозначим множество связных компонент графа $\Gamma(G)$ через $\{\pi_i(G) \mid i = 1,\dots,s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $\Gamma(G)$; если порядок группы $G$ четен, считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Мы используем описание связных компонент всех конечных почти простых групп, полученное в [4; 5; 12], арифметический критерий смежности двух вершин и описание коклик максимального размера в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы, полученные в [1; 2]. Некоторое множество вершин графа называется его *кокликой*, если элементы этого множества попарно несмежны в этом графе. Коклика мощности $n$ называется *$n$-кокликой*.

**Предложение 1** (теорема Жигмонди [13]). *Пусть* $q$, $n$ *— натуральные числа, большие* 1. *Тогда существует простое число* $r$, *делящее* $q^n-1$ *и не делящее* $q^i-1$ *при* $1 \leq i < n$, *причем* $r \equiv 1 \pmod n$, *кроме следующих случаев:* $q = 2$ *и* $n = 6$; $q = 2^k-1$ *для некоторого простого числа* $k$ *и* $n = 2$.

В обозначениях предложения 1 простое число, делящее $q^n-1$ и не делящее $q^i-1$ при любом натуральном $i < n$, называется *примитивным простым делителем* числа $q^n-1$ и обозначается через $r_n(q)$.

**Предложение 2** (лемма Героно [8]). *Пусть $p$, $q$ — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел $a$, $b$. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

**Предложение 3** [11, Theorem 1; 1, следствие 7.6]. *Пусть $G$ — конечная простая неабелева группа и все связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются кликами. Тогда $G$ изоморфна одной из следующих групп: $M_{11}$, $M_{22}$, $J_1$, $J_2$, $J_3$, $HiS$, $A_n$ $(n \in \{5, 6, 7, 9, 12, 13\})$, $L_2(q)$ $(q > 3)$, $L_3(4)$, $L_3^{\varepsilon}(q)(\varepsilon \in \{+, -\},\ \pi(q + \varepsilon 1) = \{2\},\ (q - \varepsilon 1)_3 \neq 3)$, $U_4(3)$, $U_6(2)$, $Sp_6(2)$, $PSp_4(q)$ $(q > 2)$, $D_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, $Sz(q)$ $(q = 2^{2k+1} > 2)$, $G_2(q)$ $(q = 3^k)$.*

## 2. Доказательство теоремы 2

Пусть $P$ — конечная простая неабелева группа.

**Случай 1.** $P$ изоморфна одной из спорадических групп.

Утверждение теоремы для этого случая следует из неравенства $|\mathrm{Out}(G)| \leq 2$ (см. [7]), описания связных компонент (см. [12]) и коклик максимального размера (см. [1, табл. 1]) графа $\Gamma(P)$.

**Случай 2.** $P$ изоморфна знакопеременной группе $A_n$ для $n \geq 5$.

Хорошо известно, что $\mathrm{Out}(P)$ — 2-группа. Если $n \leq 13$, то утверждение теоремы для этого случая следует из информации о порядках элементов группы $P$ из [7]. Если $n = 14$, то вершины 5 и 11 принадлежат $\pi_1(P)$ и несмежны в графе $\Gamma(P)$. Если $n \in \{15, 16\}$, то граф $\Gamma(P)$ связен и вершины 7 и 11 в нем несмежны. Если $n = 17$, то вершины 7 и 11 принадлежат $\pi_1(P)$ и несмежны в графе $\Gamma(P)$.

Пусть $n \geq 18$. По [5, лемма 1] в интервале $((n{+}1)/2, n)$ лежат по крайней мере три нечетных простых числа $p_1$, $p_2$ и $p_3$, пусть $p_1 < p_2 < p_3$. Положим $r = p_1$ и $s = p_2$. Ясно, что вершины $r$ и $s$ несмежны в графе $\Gamma(P)$. Если граф $\Gamma(P)$ связен, то $r, s \in \pi(P) = \pi_1(P)$. Если $\Gamma(P)$ несвязен, то по [12] $n \in \{p, p+1, p+2\}$ для некоторого нечетного простого числа $p$ и $\pi_1(P) = \pi((n-3)!)$, поэтому $r$ и $s$ принадлежат $\pi_1(P)$.

**Случай 3.** $P$ — конечная простая группа лиева типа над полем из $q = p^m$ элементов, где $p$ — простое число и $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим все возможности для $P$, кроме рассмотренных в случае 2. При этом для вычисления компонент связности графа $\Gamma(P)$ и проверки включения $r, s \in \pi_1(P)$ мы используем [4; 5; 12], для вычисления $|\mathrm{Out}(P)|$ — [7], для проверки равенства $(rs, |\mathrm{Out}(P)|) = 1$ — предложение 1.

Пусть $P \cong A_1(q)$, где $5 < q \neq 9$. Тогда $|\mathrm{Out}(P)| = (2, q-1) \cdot m$. Предположим сначала, что $q$ четно. Тогда $m \geq 2$, $s(P) = 3$, $\pi_1(P) = \{2\}$, $\pi_2(P) = \pi(q{-}1)$, $\pi_3(P) = \pi(q{+}1)$ и $|\mathrm{Out}(P)| = m$. Пусть $m = 6$. Возьмем $r = 7 \in \pi_2(P)$ и $s = 13 \in \pi_3(P)$. Тогда $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$ и $(rs, m) = 1$. Пусть теперь $m \neq 6$. Возьмем $r = r_m(2) \in \pi_2(P)$ и $s = r_{2m}(2) \in \pi_3(P)$. Тогда $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$ и по предложению 1 $(rs, m) = 1$. Предположим теперь, что $q$ нечетно и $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$. Тогда $s(P) = 3$, $\pi_1(P) = \pi(q - \varepsilon 1)$, $\pi_2(P) = \pi((q + \varepsilon 1)/2)$, $\pi_3(P) = \{p\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2m$. Если $m \leq 2$, то возьмем $r = p \in \pi_3(G)$ и в качестве $s$ — любое нечетное простое число из $\pi_1(G) \cup \pi_2(G)$ (такое $s$ существует, так как в противном случае по предложению 2 мы получили бы $q = 9$). Если $m > 2$, то положим $r = r_m(p)$ и $s = r_{2m}(p)$. Тогда в любом случае $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$ и по предложению 1 $(rs, |\mathrm{Out}(P)|) = 1$.

Пусть $P \cong A_2^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $q > 2$. Тогда $|\mathrm{Out}(P)| = 2(3, q - \varepsilon 1)m$.

Предположим, что $\pi(q{+}\varepsilon 1) = \{2\}$. По предложению 2 либо $q = 9$ и $\varepsilon 1 = -$, либо $q = p > 2$. В первом случае $|\mathrm{Out}(P)| = 4$ и по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика, следовательно, для $r = 3 \in \pi_1(G)$ и $s = 73 \in \pi_2(G)$ выполняется утверждение теоремы.

Пусть выполняется второй случай. Положим $r = p$ и $s$ равным $r_3(p)$ при $\varepsilon = +$ и $r_6(p)$ при $\varepsilon = -$. Тогда по [1, предложение 3.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$, а по предложению 1 $(rs, |\mathrm{Out}(P)|) = 1$. Предположим, что $\pi_1(G) = \pi(q(q^2 - 1))$ не является кликой. Тогда ввиду предложения 3 $(q - \varepsilon 1)_3 = 3$, поэтому $|\mathrm{Out}(P)| = 6$ и $p > 3$. По [2, предложение 3.12] единственной кокликой максимального размера в $\pi_1(G)$ является $\{3, p\}$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть теперь $\pi(q+\varepsilon 1) \neq \{2\}$. Пусть сначала $\varepsilon = +$. Тогда ввиду предложения 1 существуют простые числа $r = r_{2m}(p) \in \pi_1(G)$ и $s = r_{3m}(p) \in \pi_2(G)$, взаимно простые с $|\mathrm{Out}(P)|$). Ввиду [2, предложение 3.12, рис. 7] в порожденном подграфе $\pi_1(G)$ каждая 2-коклика содержится в некоторой коклике максимального размера, которая имеет вид $\{p, r_2(q)\}$ при $(q-1)_3 \neq 3$ и $\{p, 3, r_2(q)\}$ при $(q-1)_3 = 3$. Поэтому $\pi_1(G)$ содержит две несмежные вершины, взаимно простые с $|\mathrm{Out}(P)|$, тогда и только тогда, когда $p$ не делит $2m$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть теперь $\varepsilon = -$. Пусть $m \geq 2$. Предположим, что не существует примитивный простой делитель числа $p^m - 1$. Тогда по предложению 1 либо $q = 2^6$, либо $q = p^2$ и $\pi(p+1) = \{2\}$.

Пусть выполняется первый случай. Тогда $(q+1)_3 = 1$, $|\mathrm{Out}(P)| = 12$ и ввиду [2, предложение 3.12] и предложения 1 вершины $7 \in \pi_1(G)$ и $r_6(q) \in \pi_2(G)$ несмежны в $\Gamma(P)$ и взаимно просты с $|\mathrm{Out}(P)|$), а 2-кокликами в $\pi_1(G)$ являются $\{2, 3\}$ или $\{2, 7\}$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть выполняется второй случай. Тогда $(q+1)_3 = 1$, $|\mathrm{Out}(P)| = 4$ и ввиду [2, предложение 3.12] $\pi_1(G)$ содержит 2-коклику $\{p, r\}$, где $r \in \pi(p-1) \setminus \{2\}$, так что выполняется утверждение теоремы.

Таким образом, ввиду предложения 1 можно считать, что существуют нечетные простые числа $r = r_m(p) \in \pi_1(G)$ и $s = r_{6m}(p) \in \pi_2(G)$, взаимно простые с $|\mathrm{Out}(P)|$). Ввиду [2, предложение 3.12, рис. 7] в порожденном подграфе $\pi_1(G)$ каждая 2-коклика содержится в некоторой коклике максимального размера, которая имеет вид $\{p, r_1(q)\}$ при $(q+1)_3 \neq 3$ и $\{p, 3, r_1(q)\}$ при $(q+1)_3 = 3$. Поэтому $\pi_1(G)$ содержит две несмежные вершины, взаимно простые с $|\mathrm{Out}(P)|$, тогда и только тогда, когда $p$ не делит $2m$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть $m = 1$. Тогда $|\mathrm{Out}(P)| = 2(3, q+1)$. Ввиду предложения 1 существуют нечетные простые числа $r \in \pi(p-1) \setminus \{2\}$ и $s = r_6(p) \in \pi_2(G)$, взаимно простые с $|\mathrm{Out}(P)|$. Ввиду [2, предложение 3.12, рис. 7] в порожденном подграфе $\pi_1(G)$ каждая 2-коклика содержится в некоторой коклике максимального размера, которая имеет вид $\{p, r_1(q)\}$ при $(q+1)_3 \neq 3$ и $\{p, 3, r_1(q)\}$ при $(q+1)_3 = 3$. Поэтому $\pi_1(G)$ содержит две несмежные вершины, взаимно простые с $|\mathrm{Out}(P)|$, тогда и только тогда, когда $p > 2$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть $P \cong L_4(3)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 4$. Положим $r = 3$ и $s = 5$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_4(4)$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 4$. Положим $r = 7$ и $s = 17$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_4(5)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 8$. Положим $r = 5$ и $s = 13$. По [1, предложение 3.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_4(q)$, $q > 5$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (4, q-1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{3m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_5(4)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 4$. Положим $r = 7$ и $s = 17$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_5(q)$, $q \neq 4$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (5, q-1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{3m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(3)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 4$. Положим $r = 5$ и $s = 13$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(4)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 12$. Положим $r = 7$ и $s = 17$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(7)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 12$. Положим $r = 5$ и $s = 19$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(q)$, $q \notin \{2,3,4,7\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (6, q-1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{4m}(p)$ и $s = r_{5m}(p)$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_7(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 31$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_8(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 31$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_9(2)$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 127$ и $s = 31$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_n(q)$, где $n \geq 7$ и $(n,q) \neq (7,2),(8,2)$. Тогда $s(P) \in \{1,2\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (n, q-1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{m(n-2)}(p)$ и $s = r_{m(n-3)}(p)$. По [1, предложение 2.1] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Если $P \cong U_4(2), U_4(3), U_6(2)$, то по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика.

Пусть $P \cong U_4(q)$, где $q \notin \{2,3\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (4, q+1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{4m}(p)$ и $s = r_{6m}(p)$. По [1, предложение 2.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_6(5)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 12$. Положим $r = 7$ и $s = 13$. По [1, предложение 2.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_6(q)$, где $q \notin \{2,5\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (6, q+1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ $r = r_{10m}(p)$. По [1, предложение 2.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_n(q)$, где $8 \leq n$ четно. Тогда $s(P) \in \{1,2\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (n, q+1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{nm}(p)$ и $s = r_{2(n-3)m}(p)$. По [1, предложение 2.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Если $P \cong U_5(2)$, то получаем утверждение (3) теоремы 2.

Пусть $P \cong U_5(q)$, где $q \neq 2$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (5, q+1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{4m}(p)$ и $s = r_{6m}(p)$. По [1, предложение 2.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_7(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [1, предложение 2.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_n(q)$, где $7 \leq n$ нечетно, $(n,q) \neq (7,2)$. Тогда $s(P) \in \{1,2\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (n, q+1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{2(n-2)m}(p)$ и $s = r_{2(n-4)m}(p)$. По [1, предложение 2.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_5(q) \cong S_4(q)$. Тогда $|\mathrm{Out}(P)| = (2, q-1) \cdot m$, $s(P) = 2$, $\pi_1(P) = \pi(q(q^2-1))$, $\pi_2(P) = \pi((q^2+1))/(2, q-1)$, причем $\pi_1(P)$ является кокликой в $\Gamma(P)$. По предложению 1 либо $\pi(q+1) = \{2\}$ и $m = 1$, либо существует число $r_{2m}(p)$. В первом случае положим $r = p \in \pi_1(G)$ и $s = r_4(p)$. Во втором случае положим $r = r_{2m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. Тогда в любом случае $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$ и по предложению 1 $(rs, |\mathrm{Out}(P)|) = 1$.

Если $P \cong S_6(2)$, то по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика.

Пусть $P \cong O_7(3)$ или $P \cong S_6(3)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_7(q)$ или $P \cong S_6(q)$, где $q \notin \{2,3\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (2, q-1) \cdot m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.4] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong S_8(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong S_{10}(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 5$ и $s = 17$. По [2, предложение 2.4] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{2n+1}(q)$ или $P \cong S_{2n}(q)$, где $n \geq 4$ и $(n,q) \neq (4,2),(5,2)$. Тогда $s(P) \in \{1,2\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (2, q-1) \cdot m$. Положим $r = r_{2(n-1)m}(p)$ и $s = r_{2(n-2)m}(p)$. По [2, предложение 2.4] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Если $P \cong O_8^+(2)$, то по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика.

Пусть $P \cong O_8^+(3)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 24$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_8^+(q)$, где $q \notin \{2,3\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (4, q^4-1) \cdot 6m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.5] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{10}^{+}(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{10}^{+}(q)$, где $q \neq 2$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (4, q^5 - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{8m}(p)$ и $s = r_{6m}(p)$. По [2, предложение 2.5] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{12}^{+}(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 11$ и $s = 17$. По [2, предложение 2.5] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{2n}^{+}(q)$, где $n \geq 6$ и $(n, q) \neq (6, 2)$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (4, q^n - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{2(n-2)m}(p)$ и $s = r_{2(n-3)m}(p)$. По [2, предложение 2.5] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{8}^{-}(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{8}^{-}(q)$, где $q > 2$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (4, q^4 + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.5] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{10}^{-}(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 11$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{12}^{-}(2)$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 17$. По [2, предложение 2.5] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{2n}^{-}(q)$, где $n \geq 5$ и $(n, q) \neq (5, 2), (6, 2)$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (4, q^n + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{2(n-2)m}(p)$ и $s = r_{2(n-3)m}(p)$. По [2, предложение 2.5] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(4)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(7)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 7$ и $s = 19$. По [1, предложение 3.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(q)$, где $7 < q \equiv 1 \pmod 3$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = m$. Пусть $m = 1$ и $\pi(q + 1) = \{2\}$. Тогда $p = 2^s - 1$, где $3 \leq s$ — простое число, и $q - 1 = p - 1 = 2(2^{s-1} - 1)$. Если $2^{s-1} - 1 = 3^t$ для некоторого натурального числа $t$, то по [8] $s = 3$ и $q = 7$, но $q > 7$; противоречие. Значит, $q = p = 2^s - 1$, где $s \geq 5$, и можно положить $r \in \pi(p - 1) \setminus \{2, 3\}$ и $s = r_{3m}(p)$. Пусть $m \neq 1$ или $\pi(q + 1) \neq \{2\}$. Положим $r = r_{2m}(p) \notin \{2, 3\}$ и $s = r_{3m}(p)$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(5)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(17)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 7$ и $s = 17$. По [1, предложение 3.2] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(q)$, где $2 < q \equiv -1 \pmod 3$, $q \notin \{5, 17\}$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = m$. Пусть $m = 1$ и $\pi(q - 1) = \{2\}$. Тогда $p = 2^{2^n} + 1$, где $n \geq 1$, и $q + 1 = p + 1 = 2(2^{2^n - 1} + 1)$. Если $2^{2^n - 1} + 1 = 3^t$ для некоторого натурального числа $t$, то по [8] $2^n \in \{2, 4\}$ и $q \in \{5, 17\}$; противоречие. Значит, $q = p = 2^{2^n} + 1$, где $n \geq 3$, и можно положить $r \in \pi(p + 1) \setminus \{2, 3\}$ и $s = r_{6m}(p)$. Пусть $m \neq 1$ или $\pi(q - 1) \neq \{2\}$. Положим $r = r_m(p) \notin \{2, 3\}$ и $s = r_{6m}(p)$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $G \cong G_2(q)$, где $q = 3^m$. Тогда $s(G) = 3$, $\pi_1(G) = \pi(q(q^2 - 1))$, $\pi_2(G) = \pi(q^2 + q + 1)$, $\pi_3(G) = \pi(q^2 - q + 1)$ и $|\mathrm{Out}(G)|) = 2m$. Положим $r = r_{3m}(3)$ и $s = r_{6m}(3)$. Тогда $r \in \pi_2(G)$ и $s \in \pi_3(G)$, следовательно, $r$ и $s$ несмежны в графе $\Gamma(G)$.

Если $P \cong {}^3D_4(2)$, то по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика.

Пусть $P \cong {}^3D_4(4)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 6$. Положим $r = 7$ и $s = 13$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^3D_4(q)$, где $q \notin \{2, 4\}$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 3m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{3m}(p)$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong F_4(2)$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong F_4(q)$, где $q > 2$. Тогда $s(P) \in \{2, 3\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| \in \{m, 2m\}$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1} > 2$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2n + 1$. Положим $r = r_{6n}(p)$ и $s = r_{4n}(p)$. По [2, предложение 2.9] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^2F_4(2)'$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 3$ и $s = 5$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_6(q)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (3, q-1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{8m}(p)$ и $s = r_{5m}(p)$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^2E_6(2)$. Тогда $s(P) = 4$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 6$. Положим $r = 7$ и $s = 11$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^2E_6(q)$, где $q > 2$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (3, q+1)\cdot 2m$. Положим $r = r_{10m}(p)$ и $s = r_{8m}(p)$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1} > 2$. Тогда $s(P) = 4$, $\pi_1(G) = \{2\}$, $\pi_2(G) = \pi(q-1)$, $\pi_3(G) = \pi(q + \sqrt{2q} + 1)$, $\pi_4(G) = \pi(q - \sqrt{2q} + 1)$ и $|\mathrm{Out}(G)| = 2n + 1$. Легко проверить, что $(q + \sqrt{2q} + 1)(q - \sqrt{2q} + 1) = q^2 + 1 = (q^4 - 1)/(q^2 - 1)$. Положим $r = r_{2n+1}(2)$ и $s = r_{4(2n+1)}(2)$. Тогда $r \in \pi_2(G)$ и $s \in \pi_3(G) \cup \pi_4(G)$, следовательно, $r$ и $s$ несмежны в графе $\Gamma(G)$.

Пусть $P \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2n + 1$. Положим $r = r_{2(2n+1)}(3)$ и $s = r_{2n+1}(3)$. По [2, предложение 2.9] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_7(2)$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 5$ и $s = 31$. По [7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_7(3)$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\mathrm{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 11$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_7(q)$, где $q \notin \{2, 3\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\mathrm{Out}(P)| = (2, q-1) \cdot m$. Положим $r = r_{5m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_8(q)$. Тогда $s(P) \in \{4, 5\}$ и $|\mathrm{Out}(P)| = m$. Положим $r = r_{18m}(p)$ и $s = r_{14m}(p)$. По [2, предложение 2.7] $r$ и $s$ несмежны в $\Gamma(P)$.

Теорема доказана.

## 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $G$ — конечная почти простая, но не простая группа и все связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются кликами. Положим $P = Soc(G)$. Ввиду теоремы 2 и предложения 3 граф $\Gamma(G)$ несвязен и группа $P$ изоморфна одной из следующих групп: $M_{11}$, $M_{22}$, $J_1$, $J_2$, $J_3$, $HiS$, $A_n$ ($n \in \{5, 6, 7, 9, 12, 13\}$), $L_2(q)$ ($q > 3$), $L_3^{\varepsilon}(q)$ ($q = p^m > 2$, $p$ — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, причем $\pi(q + \varepsilon 1) = \{2\}$ или $p$ делит $2m$), $L_3(4)$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $U_6(2)$, $Sp_6(2)$, $PSp_4(q)$ ($q > 2$), $D_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, $Sz(q)$ ($q > 2$), $G_2(q)$ ($q = 3^m$).

Далее рассмотрим возможности для $G$. Ввиду теоремы 2 и [7] можно считать, что группа $P$ изоморфна одной из групп $L_2(q)$ ($q > 32$), $L_3^{\varepsilon}(q)$ ($q = p^m > 11$, $p$ — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, причем $\pi(q + \varepsilon 1) = \{2\}$ или $p$ делит $2m$), $PSp_4(q)$ ($q > 2$), $G_2(3^m)$ ($m > 1$), $Sz(q)$ ($q > 2$).

**Лемма 1.** *Если $P \cong L_2(q)$, где $q > 32$, то граф $\Gamma(G)$ несвязен и выполняется один из пп.* (2)–(4) *теоремы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $q = 2^m > 2^5$. Тогда $s(P) = 3$, $\pi_1(P) = \{2\}$, $\pi_2(P) = \pi(q-1)$, $\pi_3(P) = \pi(q+1)$ и $P < G \leq \mathrm{Aut}(P) = P \rtimes \langle f \rangle$, где $f$ — полевой автоморфизм порядка $m$ группы $P$ (см. [9, Proposition 2.5.12]). Возьмем $p \in \pi(G/P) \subseteq \pi(m)$.

Предположим, что $m \neq p$. Тогда $m/p \geq 2$. Для элемента $x = f^{m/p}$ порядка $p$ имеем $C := C_P(x) \cong L_2(2^{m/p})$. Поэтому $\pi_1(C) = \{2\}$, $\pi_2(C) = \pi(2^{m/p} - 1)$, $\pi_3(C) = \pi(2^{m/p} + 1)$. Если $p$ нечетно, то $1 \neq 2^{m/p} - 1 \mid (q-1)$ и $1 \neq 2^{m/p} + 1 \mid (q+1)$, откуда граф $\Gamma(G)$ связен, что не так. Поэтому $\pi(G/P) = \{2\}$ и $\pi_1(G) = \pi(2(q-1))$ — клика в графе $\Gamma(G)$, так что заключение леммы выполняется.

Таким образом, можно считать, что $m = p > 5$ и $G = \mathrm{Aut}(P)$. Имеем $C_P(f) \cong L_2(2) \cong S_3$. Если $p \in \pi(P)$, то $p \in \pi(C_P(f)) = \{2, 3\}$, противоречие. Поэтому $p \notin \pi(P)$ и $\{2, p\} \cup \pi(q+1) \subseteq$

$\pi_1(G)$, так как 3 делит $q+1$. Но по условию $\pi_1(G)$ — полный граф, значит, числа $r_{2m}(2)$ и $p$ смежны в графе $\Gamma(G)$, что не так.

Пусть $q$ нечетно. Тогда $q = p^m > 3$, где $p$ — нечетное простое число и $m \in \mathbb{N}$. Пусть $q \equiv \epsilon 1 \pmod 4$ при $\epsilon \in \{+,-\}$. Тогда $s(P) = 3$, $\pi_1(P) = \pi(q-\epsilon 1)$, $\pi_2(P) = \{p\}$, $\pi_3(P) = \pi((q+\epsilon 1)/2)$ и $P < G \le \mathrm{Aut}(P) = Inndiag(P) \rightthreetimes \langle f \rangle$, где $Inndiag(P) = P\langle d \rangle \cong PGL_2(q)$, $d$ — диагональный автоморфизм и $f$ — полевой автоморфизм порядка $m$ группы $P$ соответственно (см. [9, Proposition 2.5.12]).

Пусть $q - 1 = 2^k$. Тогда $\epsilon = +$, $p^m - 2^k = 1$ и по предложению 2 либо $p^m = 3^2$, либо $m = 1$. Но $q \ne 9$. Значит, $q = p$ и $G \cong PGL_2(p)$. Отсюда $\pi_1(G) = \pi(q+1)$ и $\pi_2(G) = \{p\}$ — клики в графе $\Gamma(G)$.

Пусть $q+1 = 2^k$. Тогда $\epsilon = -$, $2^k - p^m = 1$ и по предложению 2 $m = 1$ и $k$ — простое число. Таким образом, $q = p = 2^k - 1$ и $q - 1 = 2(2^{k-1}-1)$. Если $k = 2$, то $q = 3$; противоречие. Поэтому $k \ge 3$ и, следовательно, $3 \in \pi(q-1)$. Имеем $G \cong PGL_2(p)$. Отсюда $\pi_1(G) = \pi_1(q-1)$ и $\pi_2(G) = \{p\}$ — клики в графе $\Gamma(G)$.

Пусть теперь $q \pm 1 \ne 2^k$. По предложению 1 существуют два простых числа $r = r_m(p)$ и $s = r_{2m}(p)$, не смежные в графе $\Gamma(G)$ и не делящие $2m$. Предположим, что $Inndiag(P) \le G$. Поскольку $PGL_2(p)$ содержит циклические подгруппы порядков $q-1$ и $q+1$, имеем $\pi(q^2-1) \subseteq \pi_1(G)$. Но $\pi_1(G)$ — клика, поэтому $r$ и $s$ смежны в графе $\Gamma(G)$. Поскольку $(rs, |G/P|) = 1$, $r$ и $s$ смежны в графе $\Gamma(P)$, противоречие.

Итак, $G \cap Inndiag(P) = 1$. Предположим, что $G \cap \langle f \rangle \ne 1$, и возьмем элемент $x$ некоторого простого порядка $t \in \pi(m)$ из $G \cap \langle f \rangle$. Тогда $O^{p'}(C_P(x)) \cong L_2(p^{m/t})$ (см. [9, Proposition 4.9.1]) и, следовательно, $\pi(p(p^{2m/t}-1)) \subseteq \pi_1(G)$. Предположим, что $t$ нечетно. Тогда $(p^{m/t}-1)/2$ и $(p^{m/t}+1)/2$ — неединичные делители чисел $(q-1)/2$ и $(q+1)/2$ соответственно, откуда $\pi(q^2-1) \subseteq \pi_1(G)$, что противоречит несмежности вершин $r$ и $s$ в графе $\Gamma(G)$. Таким образом, $|G/P|$ — степень 2. В частности, $m$ четно и $\pi(p(q-1)) \subseteq \pi_1(G)$. Но тогда $p$ и $r$ смежны в графе $\Gamma(G)$, а значит, и в графе $\Gamma(P)$, что невозможно.

Итак, $G \cap \langle f \rangle = 1$. Поэтому $m$ четно, $\epsilon = +$ и $G = P\langle df_1 \rangle$, где $f_1 = f^{m/2}$. Предположим, что вершины 2 и $t \in \pi(p(q+1)/2)$ смежны в графе $\Gamma(G)$. Тогда в $G$ существует инволюция $\tau$, централизующая элемент $z$ порядка $t$ из $P$. Поскольку $|C_P(z)| \in \{p, (q+1)/2\}$, $\tau \in G \setminus P$. Но по [9, Proposition 4.9.1(d)] инволюции $\tau$ и $f_1$ сопряжены относительно $Inndiag(P)$, что, как показано в предыдущем абзаце, невозможно. Поэтому $\pi_1(G) = \pi(q-1)$ — клика.

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $P \cong L_3^{\varepsilon}(q)$, где $q = p^m > 11$, $p$ — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, причем $\pi(q+\varepsilon 1) = \{2\}$ или $p$ делит $2m$. Тогда граф $\Gamma(G)$ несвязен и выполняется один из пп.* (5)–(8) *теоремы* 1.

Доказательство. Имеем $s(P) = 2$, $\pi_1(P) = \pi(p(q^2-1))$, $\pi_2(P) = \pi((q^2+\varepsilon q+1)/(3, q-\varepsilon 1))$, и $P < G \le \mathrm{Aut}(P) = Inndiag(P) \rightthreetimes K$, где $K = \langle g \rangle \times \langle f \rangle$ для графового автоморфизма порядка 2 и полевого автоморфизма $f$ порядка $m$ группы $P$, если $\varepsilon = +$, и $K = \langle f \rangle$ для полевого автоморфизма $f$ порядка $2m$ группы $P$, если $\varepsilon = -$, причем $|Inndiag(P)/P| = (3, q-\varepsilon 1)$ (см. [7; 9, Proposition 2.5.12]). Поскольку граф $\Gamma(G)$ несвязен, ввиду [10, Tabl. I, II] имеем, что $G \cap Inndiag(P) = P$ и $\pi(G/P) \subseteq \{2,3\}$, причем, если $\varepsilon = +$, то $G/P = P(\langle g^k \rangle \times \langle f^{m/n} \rangle)/P$, где $k \in \{0,1\}$ и $\pi(n) = \{3\}$.

Предположим, что $\pi(q+\varepsilon 1) = \{2\}$. Пусть сначала $\varepsilon = +$. Тогда по предложению 2 $q = p$ — простое число Мерсенна и, следовательно, группа $G$ сопряжена в $\mathrm{Aut}(P)$ с подгруппой $Inndiag(P)\langle g \rangle$. Поскольку $p > 11$, имеем $(p-1)_3 > 1$. Если $(p-1)_3 = 3$, то по [2, предложение 3.12] в $\pi_1(P)$ имеется коклика $\{3, p\}$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $(p-1)_3 \ge 9$ и, следовательно, $p \ge 127$, так что выполняется п. (6) теоремы 1.

Пусть теперь $\varepsilon = -$. Тогда по предложению 2 $q = p$ — простое число Ферма и, следовательно, группа $G$ сопряжена в $\mathrm{Aut}(P)$ с подгруппой $Inndiag(P)\langle f \rangle$. Поскольку $p > 11$, имеем $(p+1)_3 > 1$. Если $(p+1)_3 = 3$, то по [2, предложение 3.12] в $\pi_1(P)$ имеется коклика $\{3, p\}$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $(p+1)_3 \ge 9$ и, следовательно, $p \ge 17$, так что выполняется п. (8) теоремы 1.

Таким образом, можно считать, что $\pi(q+\varepsilon 1) \neq \{2\}$. Тогда $p$ делит $2m$. Пусть $r \in \pi(q+\varepsilon 1) \setminus \{2\}$. Тогда по [2, предложение 3.12] в $\pi_1(P)$ имеется коклика $\{r, p\}$.

Предположим, что $p > 2$. Тогда $p$ делит $m$ и, в частности, $m \geq 3$. Возьмем в качестве $r$ число $r_{2m}(p)$ при $\varepsilon = +$ и $r_m(p)$ при $\varepsilon = -$. Тогда по предложению 1 $r$ не делит $2m$ и, следовательно, не делит $|G/P|$. Поскольку вершины $p$ и $r$ смежны в графе $\Gamma(G)$, то $p$ делит $|G/P|$ и, следовательно, $p = 3$, $Inndiag(P) = P$ и $G \setminus P$ содержит некоторый элемент $x$ порядка 3, централизующий некоторый элемент порядка $r$ из $P$. Ввиду [9, Proposition 4.9.1] $C_P(x) \cong L_3^{\varepsilon}(q_0)$, где $q = q_0^3$, поэтому $r$ делит $|C_P(x)| = q_0^3(q_0^2-1)(q_0-\varepsilon 1)$. Поскольку $(q_0+\varepsilon 1, q_0-\varepsilon 1) = 2$, $r$ делит $q_0^2 - 1 = p^{2m/3} - 1$, что противоречит выбору числа $r$.

Итак, $p = 2$. Тогда $m > 3$. По предложению 1 либо $m = 6$ и $\varepsilon = -$, либо существуют простые числа $r_{2m}(2)$ при $\varepsilon = +$ и $r_m(p)$ при $\varepsilon = -$, не делящие $2m$. Возьмем в качестве $r$ в первом случае число 7, а во втором случае $r_{2m}(2)$ при $\varepsilon = +$ и $r_m(p)$ при $\varepsilon = -$. Тогда $r$ не делит $|G/P|$. Поскольку вершины $p$ и $r$ смежны в графе $\Gamma(G)$, то 2 делит $|G/P|$ и $G \setminus P$ содержит инволюцию, централизующую некоторый элемент порядка $r$ из $P$. Обратно, если $x$ — инволюция из $G \setminus P$, то ввиду [9, Propositions 4.9.1, 4.9.2] группа $O^{2'}(C_P(x))$ изоморфна $L_2(q)$, $L_3(\sqrt{q})$ (при четном $m$) или $U_3(q)$ (при нечетном $m$) при $\varepsilon = +$ и $L_2(q)$ при $\varepsilon = -$, так что 2 смежна в графе $\Gamma(G)$ с любой вершиной из $\pi(q+\varepsilon 1) \neq \{2\}$.

Если $(q-\varepsilon 1)_3 = 3$, то по [2, предложение 3.12] в $\pi_1(P)$ имеется 3-коклика $\{2, 3, r\}$. Поскольку вершины 3 и $r$ смежны в графе $\Gamma(G)$, то 3 делит $|G/P|$ и $G \setminus P$ содержит элемент порядка 3, централизующий некоторый элемент порядка $r$ из $P$, и мы, как и выше, приходим к противоречию.

Таким образом, выполняется п. (5) или (7) теоремы 1.

Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Если $P \cong PSp_4(q)$, то граф $\Gamma(G)$ несвязен и выполняется один из пп.* (10)–(11) *теоремы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P \cong PSp_4(q)$, где $q = p^m > 2$, $p$ — простое число и $m \in \mathbb{N}$. Поскольку граф $\Gamma(G)$ несвязен, ввиду [10, Tabl. I] имеем, что $G \cap Inndiag(P) = P$, $m$ четно, $G/P$ — циклическая 2-группа и при $p = 2$ группа $G$ не содержит элемента, индуцирующего на $P$ инволютивный графовый автоморфизм. Поскольку группа $\mathrm{Out}(P)$ изоморфна $\mathbb{Z}_{2m}$ при $p = 2$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m$ при $p \neq 2$ (см. [9, Proposition 2.5.12]), получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Если $P \cong G_2(q)$, где $q = 3^m > 3$, то граф $\Gamma(G)$ несвязен и выполняется п.* (9) *теоремы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P \cong G_2(q)$, где $q = 3^m > 3$. Тогда $s(P) = 3$, $\pi_1(G) = \pi(q(q^2-1))$, $\pi_2(G) = \pi(q^2-q+1)$, $\pi_3(G) = \pi(q^2+q+1)$ и $P < G \leq \mathrm{Aut}(P) = P \leftthreetimes (\langle g \rangle \times \langle f \rangle)$, где $g$ и $f$ — графовый и полевой автоморфизмы группы $P$ соответственно, причем $|g| = 2$ и $|f| = m$ (см. [9, Proposition 2.5.12]). Поскольку граф $\Gamma(G)$ несвязен, ввиду [10, Table I] имеем, что $s(G) = 2$ и либо $\pi_2(G) = \pi(q^2+q+1)$, $G = P \leftthreetimes \langle g \rangle$ и $m$ нечетно, либо $\pi_2(G) = \pi(q^2-q+1)$ и $G = P\langle f^{m/n} \rangle$, где $\varnothing \neq \pi(n) \subseteq \{2, 3\}$. В первом случае имеем $\pi_1(G) = \pi(q(q^2-1)(q^2-q+1))$ в противоречие с тем, что по [2, предложение 2.7] и предложению 1 вершины $r_{2m}(p)$ и $r_{6m}(p)$ несмежны в $\Gamma(P)$ и взаимно просты с $2m$. Поэтому выполняется второй случай.

Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Если $P \cong Sz(q)$ $(q > 2)$, то граф $\Gamma(G)$ несвязен и $G$ изоморфна группе* $\mathrm{Aut}(Sz(32))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P \cong Sz(q)$, где $q = 2^m$ и $m > 1$ нечетно. Тогда $s(P) = 4$, $\pi_1(G) = \{2\}$, $\pi_2(G) = \pi(q-1)$, $\pi_3(G) = \pi(q-\sqrt{2q}+1)$, $\pi_4(G) = \pi(q+\sqrt{2q}+1)$ и $P < G \leq \mathrm{Aut}(P) = P \leftthreetimes \langle f \rangle$, где $f$ — полевой автоморфизм порядка $m$ группы $P$ (см. [9, Proposition 2.5.12]). Пусть $p \in \pi(G/P)$ и $x$ — элемент порядка $p$ из $G \cap \langle f \rangle$. Тогда $C := C_P(x) \cong Sz(q_0)$, где $q = q_0^p$.

Поскольку граф $\Gamma(G)$ несвязен, ввиду теоремы Грюнберга — Кегеля (см. [12, Theorem 1]) $p \in \pi_1(G)$.

Предположим, что $m \neq p$. Тогда $q_0 > 2$, $s(C) = 4$, $\pi_1(C) = \{2\}$, $\pi_2(C) = \pi(q_0 - 1)$, $\pi_3(C) = \pi(q_0 - \sqrt{2q_0} + 1)$, $\pi_4(G) = \pi(q_0 + \sqrt{2q_0} + 1)$. Числа $q_0 - 1$, $q_0 - \sqrt{2q_0} + 1$ и $q_0 + \sqrt{2q_0} + 1$ являются неединичными делителями чисел $q-1$, $q-\sqrt{2q}+1$ и $q+\sqrt{2q}+1$ соответственно, а в $P$ есть циклические подгруппы порядков $q-1$, $q-\sqrt{2q}+1$ и $q+\sqrt{2q}+1$, поэтому $\pi_1(P) \cup \{p\} \subseteq \pi_1(G)$. Но по предложению 1 существует число $r = r_m(2)$, взаимно простое с $2m$. Поэтому 2 и $r$ смежны в графе $\Gamma(G)$, а значит, и в графе $\Gamma(P)$, что не так.

Таким образом, $m = p$, $G = \mathrm{Aut}(P)$ и $C \cong Sz(2)$ — группа Фробениуса порядка 20. Следовательно, $\{2, 5, p\} \subseteq \pi_1(G)$. Если $p \neq 5$, то 2 и 5 смежны в графе $\Gamma(G)$, а значит, и в графе $\Gamma(P)$, что не так. Поэтому $m = p = 5$.

Лемма доказана.

Теорема 1 следует из лемм 1–5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
2. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
3. **Зиновьева М.Р., Мазуров В.Д.** О конечных группах с несвязным графом // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 99–105.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов. // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
6. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
7. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
8. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
9. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surv. Monogr.; vol. 40, no. 3.)
10. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum; 2002. Vol. 107. P. 189–190.
11. **Lucido M.S., Moghaddamfar A.R.** Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory. 2004. Vol. 7, no. 3. C. 373–384.
12. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
13. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.

Зиновьева Марианна Рифхатовна
канд. физ.-мат. наук
докторант
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Поступила 20.06.2015

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru