ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.856

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Г. Жадан

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Для ее решения предлагается вариант прямого симплекс-метода, обобщающий соответствующий метод для задач линейного программирования. Дается описание перехода из одной крайней точки допустимого множества в другую крайнюю точку.

Ключевые слова: линейная задача полуопределенного программирования, крайние точки, прямой симплекс-метод.

V. G. Zhadan. On a variant of the simplex method for a linear semidefinite programming problem.

A linear semidefinite programming problem is considered. A variant of the primal simplex method, which generalizes the corresponding method for linear programming problems, is proposed for this problem. A passage from an extreme point of the admissible set to another extreme point is described.

Keywords: linear semidefinite programming problem, extreme points, primal simplex-type method.

Введение

Теории и методам решения линейных задач оптимизации традиционно уделяется большое внимание (см., например, [1–3]). Среди них особый интерес вызывают линейные задачи полуопределенного программирования. Эти задачи условной оптимизации, представленные в канонической форме, заключаются в минимизации на конусе положительно полуопределенных симметричных матриц линейной целевой функции при линейных ограничениях типа равенства [4]. К настоящему времени предложены достаточно эффективные численные методы решения линейных задач полуопределенного программирования, обобщающие главным образом методы внутренней точки для задач линейного программирования. Гораздо меньше исследованы методы симплексного типа, и на это имеется ряд причин. Среди них одна из основных причин заключается в отсутствии полиэдральности у конуса положительно полуопределенных матриц и, как следствие, наличие бесконечного числа крайних точек у допустимого множества. Тем не менее, имеется ряд работ, в которых строятся обобщения симплекс-метода для задач полуопределенного программирования. В [5] предложено довольно универсальное обобщение симплекс-метода для задач с ограничениями, задаваемыми в форме линейных матричных неравенств. Для задач конического программирования с произвольными замкнутыми выпуклыми конусами обобщение симплекс-метода рассматривалось в [6]. Еще один вариант симплекс-метода для полуопределенного программирования, использующий конечные аппроксимации конуса положительно полуопределенных матриц, приводится в [7]. В [8] был предложен метод аффинно-масштабирующего типа, в котором допускался выход на границу допустимого множества и, следовательно, движение по его граням, а также перескок с грани на грань.

Цель настоящей работы состоит в разработке стандартной процедуры симплекс-метода, аналогичной той, которая используется в линейном программировании для перехода из одной

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-08259, а также при содействии Программы ведущих научных школ НШ-4640.2014.1.

крайней точки в другую. Основное внимание здесь уделяется переходу в том случае, когда количество ограничений типа равенства не может совпадать с количеством переменных в крайней точке, равному так называемому "треугольному" числу (числу элементов симметричных матриц, расположенных на диагонали и под ней).

Работа состоит из четырех разделов. В разд. 1 дается постановка задачи и приводятся условия оптимальности. В разд. 2 указываются основные сведения, касающиеся характеризации крайних точек и их невырожденности. Стандартный вариант метода в регулярном случае, когда неравенство, связывающее ранг матрицы в крайней точке и число ограничений в задаче, выполняется как равенство, рассматривается в разд. 3. В разд. 4 предлагается модификация метода, позволяющая осуществлять переход в новую крайнюю точку в нерегулярном случае.

1. Задача полуопределенного программирования и условия оптимальности

Пусть $\mathbb{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n. Пусть, кроме того, $\mathbb{S}^n_+$ — подмножество из $\mathbb{S}^n$, состоящее из положительно полуопределенных матриц. Множество $\mathbb{S}^n_+$ является конусом в $\mathbb{S}^n$. Для указания на то, что матрица $M \in \mathbb{S}^n$ положительно полуопределена, будем пользоваться также неравенством $M \succeq 0$. Конус $\mathbb{S}^n_+$ *самосопряженный*, но не является полиэдральным, его размерность равняется "треугольному" числу $n_\triangle = n(n+1)/2$.

Скалярное произведение (по Фробениусу) между двумя квадратными матрицами M_1 и M_2 одного и того же порядка n определяется как след матрицы $M_1^T M_2$ и обозначается $M_1 \bullet M_2 = \mathrm{tr}\,(M_1^T M_2) = \sum_{i,j=1}^n m_1^{ij} m_2^{ij}$, где m_1^{ij} и m_2^{ij} — (ij)-е элементы соответственно матриц M_1 и M_2. Если M_1 и M_2 — две положительно полуопределенные матрицы из $\mathbb{S}^n$, то $M_1 \bullet M_2 \geq 0$. Более того, $M_1 \bullet M_2 = 0$ в том и только в том случае, когда $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0_{nn}$. Здесь и ниже 0_s — нулевой вектор, состоящий из s нулевых компонент, 0_{sl} — нулевая матрица размерности $s \times l$.

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования следующего вида:

$$\begin{gathered} \min C \bullet X, \\ A_i \bullet X = b^i, \qquad 1 \leq i \leq m, \quad X \succeq 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь все матрицы C, X и A_i, $1 \leq i \leq m$, принадлежат пространству $\mathbb{S}^n$. Относительно матриц A_i, $1 \leq i \leq m$, считаем, что они линейно независимы. Задача линейного программирования в канонической форме является частным случаем задачи (1.1), когда дополнительно требуется, чтобы все матрицы были диагональными.

Двойственной к (1.1) является задача

$$\begin{gathered} \max\langle b, u\rangle, \\ \sum_{i=1}^m u^i A_i + V = C, \quad V \succeq 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

в которой $b = (b^1, \ldots, b^m)^T \in \mathbb{R}^m$, $V \in \mathbb{S}^n$, угловые скобки обозначают обычное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Ниже матрица $V = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i$ обозначается как $V(u)$.

Пусть $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_D$ — допустимые множества в задачах (1.1) и (1.2), т. е. $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_A \cap \mathbb{S}^n_+$, $\mathcal{F}_A = \{X \in \mathbb{S}^n \colon A_i \bullet X = b^i,\ 1 \leq i \leq m\}$, $\mathcal{F}_D = \{[u, V] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n \colon V = V(u) \succeq 0\}$.

Предполагается, что допустимые множества $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_D$ непустые и задачи (1.1) и (1.2) имеют решения. Выполнение, например, условий Слейтера для обоих множеств $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_D$, которые заключаются в существовании у них внутренних точек, гарантирует наличие решений.

Пусть X_* и $[u_*, V_*]$ — оптимальные решения соответственно задач (1.1) и (1.2), при этом обязательно $V_* = V(u_*)$ и обе симметричные положительно полуопределенные матрицы X_* и V_* коммутируют между собой. Поэтому можно указать ортогональную матрицу Q такую, что $X_* = QD(\eta_*)Q^T$ и $V_* = QD(\theta_*)Q^T$, где $D(\eta_*)$ и $D(\theta_*)$ — диагональные матрицы, на диагоналях которых расположены векторы собственных значений $\eta_* = [\eta_*^1, \ldots, \eta_*^n]$, $\theta_* = [\theta_*^1, \ldots, \theta_*^n]$ матриц X_* и V_* соответственно. Для собственных значений η_*^i и θ_*^i выполняется *условие комплементарности*: $\eta_*^i \geq 0$, $\theta_*^i \geq 0$ и $\eta_*^i \theta_*^i = 0$, $1 \leq i \leq n$. Если, кроме того, $\eta_*^i + \theta_*^i > 0$ для всех $1 \leq i \leq n$, то говорят, что имеет место *условие строгой комплементарности.* Подпространства в $\mathbb{R}^n$, которые порождаются собственными векторами матриц X_* и V_*, соответствующими ненулевым собственным значениям (фактически столбцами матрицы Q), оказываются ортогональными друг к другу, а в случае строгой комплементарности их сумма дает все пространство $\mathbb{R}^n$ (см., например, [4]).

Обратимся теперь к условиям оптимальности для пары задач (1.1) и (1.2). Мы предположили, что их решения существуют, поэтому следующая система равенств и неравенств

$$\begin{array}{rcl} X \bullet V & = & 0, \\ A_i \bullet X & = & b^i, \quad 1 \le i \le m, \\ V & = & C - \sum\limits_{i=1}^{m} u^i A_i, \\ X \succeq 0, & & V \succeq 0 \end{array} \tag{1.3}$$

обязательно имеет решение. При этом, как уже отмечалось, для матриц $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$ равенство $X \bullet V = 0$ возможно в том и только в том случае, когда $XV = VX = 0_{nn}$.

Далее нам потребуется векторная форма представления равенств (1.3). С этой целью введем ряд обозначений, которые являются стандартными при рассмотрении линейных задач полуопределенного программирования.

Если M — квадратная матрица порядка n, то символом $\mathrm{vec}\, M$ обозначается прямая сумма ее столбцов, т. е. вектор-столбец длины n^2, в котором последовательно один под другим располагаются столбцы матрицы M. Для симметричных матриц имеет смысл вместо вектор-столбца $\mathrm{vec}\, M$ рассматривать вектор-столбец $\mathrm{hvec}\, M$. В него также помещаются последовательно сверху вниз столбцы матрицы M, но не полностью, а только их нижние части, начинающиеся с диагонального элемента. Аналогичным образом определяется вектор-столбец $\mathrm{svec}\, M$. От $\mathrm{hvec}\, M$ он отличается только тем, что все элементы, не стоящие на диагонали матрицы M, при помещении в $\mathrm{svec}\, M$ умножаются на $\sqrt{2}$. Как вектор $\mathrm{hvec}\, M$, так и вектор $\mathrm{svec}\, M$ имеют длину $n_\triangle$.

Для перехода от вектора $\mathrm{vec}\, M$ к вектору $\mathrm{hvec}\, M$ и для обратного перехода используются *элиминационные* и *дуплицирующие* $(0,1)$-матрицы (см. [9]). Элиминационная матрица $\mathcal{L}_n$ для каждой квадратной матрицы M порядка n совершает преобразование $\mathcal{L}_n \mathrm{vec}\, M = \mathrm{hvec}\, M$. Напротив, дуплицирующая матрица $\mathcal{D}_n$ для каждой симметричной матрицы M порядка n осуществляет обратное преобразование $\mathcal{D}_n \mathrm{hvec}\, M = \mathrm{vec}\, M$. Матрица $\mathcal{L}_n$ имеет размерность $n_\triangle \times n^2$, матрица $\mathcal{D}_n$ — размерность $n^2 \times n_\triangle$. Обе матрицы $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ являются матрицами полного ранга, равного $n_\triangle$. Матрица $\mathcal{L}_n$ полуортогональная, т. е. $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_n^T = I_{n_\triangle}$. Кроме того, $\mathcal{L}_n \mathcal{D}_n = I_{n_\triangle}$.

Пусть E_n — квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны единице. Пусть, кроме того, D_2 — диагональная матрица порядка $n_\triangle$, на диагонали которой располагается вектор $\mathrm{svec}\, E_n$. Наряду с матрицами $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ в дальнейшем будем пользоваться также матрицами $\widetilde{\mathcal{L}}_n = D_2 \mathcal{L}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n D_2^{-1}$.

Таким образом, для симметричной матрицы M порядка n, как можно проверить, $\mathrm{svec}\, M = \widetilde{\mathcal{L}}_n \mathrm{vec}\, M$, $\mathrm{vec}\, M = \widetilde{\mathcal{D}}_n \mathrm{svec}\, M$. Скалярное произведение $M_1 \bullet M_2$ между двумя матрицами M_1 и M_2 из $\mathbb{S}^n$ в этом случае записывается как обычное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n_\triangle}$, а именно, $M_1 \bullet M_2 = \langle \mathrm{svec}\, M_1, \mathrm{svec}\, M_2 \rangle$.

Проводя векторизацию равенств, входящих в условия оптимальности (1.3), получаем

$$\langle \mathrm{svec}\, X, \mathrm{svec}\, V \rangle = 0, \quad \mathcal{A}_{svec} \mathrm{svec}\, X = b, \quad \mathrm{svec}\, V = \mathrm{svec}\, C - \mathcal{A}_{svec}^T u. \tag{1.4}$$

Здесь через $\mathcal{A}_{svec}$ обозначена матрица размерности $m \times n_\triangle$ со строками $\mathrm{svec}\, A_i$, $1 \le i \le m$.

Разные способы решения системы (1.4), дополненные требованиями положительной полуопределенности матриц X и V, приводят к разным численным методам решения задач (1.1) и (1.2). Ниже будет рассмотрен один из таких способов, который можно трактовать как обобщение симплекс-метода для решения задач линейного программирования.

2. Крайние точки допустимого множества

Итерационный процесс в симплекс-методе строится с использованием *крайних точек* допустимого множества $\mathcal{F}_P$. В связи с этим поясним сначала, в чем состоит характеризация крайних точек $X \in \mathcal{F}_P$ и, в частности, невырожденных крайних точек (см., например, [4]).

Допустимое множество $\mathcal{F}_P$ есть пересечение конуса $\mathbb{S}^n_+$ с аффинным множеством $\mathcal{F}_A$. Так как оба этих множества выпуклые, то *грани множества* $\mathcal{F}_P$ являются пересечениями граней конуса $\mathbb{S}^n_+$ и множества $\mathcal{F}_A$. Грани конуса $\mathbb{S}^n_+$ тесно связаны с подпространствами $\mathcal{L}$ пространства $\mathbb{R}^n$, а именно, $\mathcal{G}$ есть грань $\mathbb{S}^n_+$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{L}) = \{M \in \mathbb{S}^n_+ \colon \mathcal{R}(M) \subseteq \mathcal{L}\}$. Здесь $\mathcal{R}(M)$ обозначает пространство столбцов матрицы M. Если размерность $\mathcal{L}$ равна r, то $\operatorname{rank} X \leq r$ для всех элементов X из $\mathcal{G}(\mathcal{L})$, а размерность $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ равняется $r_\triangle$. Сама матрица X может быть представлена в виде: $X = Q\Lambda Q^T$, где Q — матрица полного ранга размерности $n \times r$ и $\Lambda \in \mathbb{S}^r_+$. Для всех матриц $X \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ матрица Q одна и та же. *Сопряженная грань* $\mathcal{G}^\star(\mathcal{L})$ к грани $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ определяется как грань, соответствующая ортогональному подпространству $\mathcal{L}^\perp$, т. е. $\mathcal{G}^\star(\mathcal{L}) = \mathcal{G}(\mathcal{L}^\perp)$.

Рассмотрим далее понятие *минимальной грани* конуса $\mathbb{S}^n_+$, содержащей точку X. Для точки $X \in \mathbb{S}^n_+$ она определяется как $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+) = \{Y \in \mathbb{S}^n_+ \colon \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X)\}$. Таким образом, если матрица $X \in \mathbb{S}^n_+$ имеет ранг r, то грань $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ изоморфна конусу $\mathbb{S}^r_+$ и, следовательно, имеет размерность $r_\triangle$. Сопряженная грань $\mathcal{G}^*_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ изоморфна конусу $\mathbb{S}^{n-r}_+$ и имеет размерность $(n-r)_\triangle$.

Если теперь от конуса $\mathbb{S}^n_+$ перейти к допустимому множеству $\mathcal{F}_P$, то получаем, что минимальная грань для точки $X \in \mathcal{F}_P$ относительно множества $\mathcal{F}_P$ уже определяется как $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P) = \mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+) \bigcap \mathcal{F}_A = \{Y \in \mathcal{F}_P \colon \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X)\}$.

Пусть r есть ранг матрицы $X \in \mathcal{F}_P$ и $X = QQ^T$, где Q — матрица полного ранга размерности $n \times r$. Положим $A_i^Q = Q^T A_i Q$. Размерность грани $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P)$ равна величине

$$\dim \mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P) = r_\triangle - \operatorname{rank}[A_1^Q, \ldots, A_m^Q]. \tag{2.1}$$

Точка X является крайней точкой множества $\mathcal{F}_P$, если размерность грани $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P)$ нулевая. Согласно (2.1) матрица $X \in \mathcal{F}_P$ ранга r является крайней точкой множества $\mathcal{F}_P$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}[A_1^Q, \ldots, A_m^Q] = r_\triangle$. Для линейно независимых матриц $A_1, A_2, \ldots, A_m$ данное равенство может выполняться только в случае, когда $r_\triangle \leq m$.

В принципе может оказаться так, что количество ограничений типа равенства m не совпадает ни с одним “треугольным” числом. В этом случае для крайней точки $X \in \mathcal{F}_P$ ранга r неравенство $r_\triangle \leq m$ может выполняться только как строгое, т. е. $r_\triangle < m$. Такую крайнюю точку будем называть *нерегулярной*. В отличие от нее крайняя точка $X \in \mathcal{F}_P$ ранга r, когда $r_\triangle = m$, называется *регулярной*.

Возьмем произвольную матрицу X из допустимого множества $\mathcal{F}_P$ ранга r. Предположим далее, что для X имеет место разложение

$$X = Q \operatorname{Diag}(\eta^1, \ldots, \eta^r, 0, \ldots, 0) Q^T, \tag{2.2}$$

где Q — ортогональная матрица порядка n и $\eta^i > 0$, $1 \leq i \leq r$. Касательное подпространство к $\mathbb{S}^n_+$ в X (точнее, к подпространству из $\mathbb{S}^n$ матриц ранга r, для которых справедливо (2.2)) имеет следующий вид [10]: $\mathcal{T}_X = \left\{ Q \begin{bmatrix} G & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix} Q^T \colon G \in \mathbb{S}^r, \ F \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \right\}$. Размерность $\mathcal{T}_X$ определяется рангом матрицы X и равняется $\dim \mathcal{T}_X = r_\triangle + r(n-r) = n_\triangle - (n-r)_\triangle$.

О п р е д е л е н и е 1 [11]. Точка $X \in \mathcal{F}_P$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_X + \mathcal{N}_A = \mathbb{S}^n$, где $\mathcal{N}_A$ — подпространство в $\mathbb{S}^n$, параллельное аффинному множеству $\mathcal{F}_A$.

Размерность $\mathcal{N}_A$ в силу сделанного предположения о линейной независимости матриц A_i, $1 \leq i \leq m$, равна $n_\triangle - m$. Так как $\dim \mathbb{S}^n = n_\triangle$, то равенство $\mathcal{T}_X + \mathcal{N}_A = \mathbb{S}^n$ имеет место только тогда, когда $\dim \mathcal{T}_X + \dim \mathcal{N}_A \geq n_\triangle$. Таким образом, чтобы крайняя точка $X \in \mathcal{F}_P$ была невырожденной, должны выполняться следующие соотношения между рангом r матрицы X, размерностью пространства $\mathbb{R}^n$ и количеством ограничений типа равенства, а именно, $r_\triangle \leq m \leq n_\triangle - (n-r)_\triangle$.

Пусть Q_B и Q_N — подматрицы ортогональной матрицы Q из (2.2), состоящие соответственно из первых r и последующих $n-r$ столбцов. Для того, чтобы точка $X \in \mathcal{F}_P$ была невырожденной [11], необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{bmatrix} Q_B^T A_i Q_B & Q_B^T A_i Q_N \\ Q_N^T A_i Q_B & 0_{(n-r)(n-r)} \end{bmatrix}$, $1 \leq i \leq m$, были линейно независимы.

Определение 2. Точка $X \in \mathcal{F}_P$, имеющая разложение (2.2), называется *сильно невырожденной*, если матрицы $Q_B^T A_i Q_B$, $1 \leq i \leq m$, линейно независимы.

Из вышесказанного следует, что любая сильно невырожденная точка X заведомо будет невырожденной в обычном смысле.

Ниже предполагается, что крайние точки $X \in \mathcal{F}_P$ сильно невырожденные. Кроме того, если они нерегулярные, то их ранг r удовлетворяет условию $r_\triangle > m - r$. В этом случае будем говорить, что задача (1.1) является *сильно невырожденной* и *вполне регулярной*.

3. Итерация метода в регулярном случае

Пусть задана начальная крайняя точка $X_0 \in \mathcal{F}_P$ и строится последовательность крайних точек $\{X_k\}$, причем таким образом, что соответствующие значения целевой функции в задаче (1.1) монотонно убывают от итерации к итерации.

Предположим, что $X \in \mathcal{F}_P$ — текущая крайняя точка ранга $r < n$, для которой справедливо представление (2.2). Для дальнейшего изложения его удобнее переписать в виде

$$X = Q_B D(\eta_B) Q_B^T. \tag{3.1}$$

Здесь по-прежнему Q_B — подматрица ортогональной матрицы Q, состоящая из первых r столбцов, $\eta_B = [\eta^1, \ldots, \eta^r]$. Считаем сначала для простоты, что X является регулярной крайней точкой, причем сильно невырожденной.

Пусть X не является оптимальным решением и нам желательно перейти в новую крайнюю точку $\bar{X}$ с меньшим значением целевой функции. Опишем этот переход, следуя идеологии симплекс-метода, применяемого для решения задач линейного программирования в канонической форме. Воспользуемся для этого условиями оптимальности (1.3) и (1.4), с помощью которых можно найти вектор двойственных переменных $u \in \mathbb{R}^m$ и вычислить слабую двойственную переменную (двойственную невязку) $V = V(u)$.

Из свойств функции следа для произведения матриц получаем $X \bullet V = (Q_B D(\eta_B) Q_B^T) \bullet V = \operatorname{tr}(Q_B D(\eta_B) Q_B^T V) = \operatorname{tr}(D(\eta_B) V^{Q_B}) = D(\eta_B) \bullet V^{Q_B}$, где введено обозначение $V^{Q_B} = Q_B^T V Q_B$. Отсюда видно, что равенство $X \bullet V = 0$ заведомо выполняется для матрицы V такой, что $V^{Q_B} = 0_{rr}$.

Введем дополнительные обозначения $A_i^{Q_B} = Q_B^T A_i Q_B \in \mathbb{S}^r$. Пусть $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ — $(m \times r_\triangle)$-матрица, строками которой являются векторы $\operatorname{svec}(A_i^{Q_B})$, $1 \leq i \leq m$. Тогда равенство $V^{Q_B} = 0_{rr}$ сводится к следующей системе m уравнений относительно m-мерного вектора u:

$$\operatorname{svec} V^{Q_B} = \operatorname{svec} C^{Q_B} - (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T u = 0_{r_\triangle}, \tag{3.2}$$

где $C^{Q_B} = Q_B^T C Q_B$. Так как, по предположению, точка X регулярная, то система (3.2) есть система m уравнений относительно m переменных. Если точка X сильно невырожденная, то квадратная матрица $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ неособая, и, разрешая систему (3.2), получаем

$$u = \left((\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T\right)^{-1} \operatorname{svec} C^{Q_B}. \tag{3.3}$$

В случае, когда матрица $V = V(u)$ положительно полуопределенная, X вместе с $[u, V]$ являются решениями соответственно задач (1.1) и (1.2). Предположим далее, что V не есть положительно полуопределенная матрица, т. е. среди ее собственных значений имеются отрицательные. Заметим, что матрица V подобна матрице $V^Q = Q^T V Q$ и, следовательно, имеет те же самые собственные значения, что и матрица V^Q. Но V^Q есть матрица окаймления, так как у нее левый верхний блок нулевой. Поэтому в том случае, когда внедиагональные блоки V^Q ненулевые, обязательно у V^Q, а стало быть и у V имеются отрицательные собственные значения [9].

Рассмотрим разложение матрицы $V = HD(\theta)H^T$, где H — ортогональная матрица, θ — вектор собственных значений V. Пусть h_j обозначает j-й столбец матрицы H (собственный вектор матрицы V). Тогда V можно также записать в виде $V = \sum_{j=1}^n \theta^j h_j h_j^T$.

Предположим, что θ^k — отрицательное собственное значение V и ему соответствует собственный вектор h_k. В этом случае $V^{h_k} = h_k^T V h_k = \theta^k < 0$ или в другой записи

$$V^{h_k} = C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \theta^k < 0. \tag{3.4}$$

Здесь введены величина $C^{h_k} = h_k^T C h_k$ и m-мерный вектор $\mathcal{A}^{h_k}$ с компонентами $h_k^T A_i h_k$, $1 \le i \le m$. Имеет место следующее свойство вектора h_k.

Утверждение 1. *Вектор h_k не принадлежит подпространству $\mathcal{L}(Q_B)$, порожденному столбцами матрицы Q_B.*

Доказательство от противного. В самом деле, если допустить, что $h_k = Q_B z$ для некоторого ненулевого вектора $z \in \mathbb{R}^r$, то должно выполняться равенство $V h_k = V Q_B z = \theta^k Q_B z$. Отсюда после умножения этого равенства слева на матрицу Q_B^T получаем $V^{Q_B} z = \theta^k z$, что невозможно, поскольку матрица V^{Q_B} нулевая.

Утверждение доказано.

Воспользуемся матрицей единичного ранга $h_k h_k^T$ и перейдем в новую точку $\bar{X}$, полагая

$$\bar{X} = X + \alpha \Delta X, \quad \Delta X = Q_B \Delta Z Q_B^T + h_k h_k^T, \tag{3.5}$$

где α — некоторый положительный шаг, $\Delta Z \in \mathbb{S}^r$. Подберем матрицу ΔZ так, чтобы

$$A_i \bullet Q_B \Delta Z Q_B^T + A_i \bullet h_k h_k^T = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{3.6}$$

Тогда новая точка $\bar{X}$ удовлетворяет ограничениям типа равенства в задаче (1.1).

Так как у матриц $M_1 M_2$ и $M_2 M_1$ один и тот же след, то (3.6) можно переписать как

$$(A_i^{Q_B}) \bullet \Delta Z + h_k^T A_i h_k = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{3.7}$$

Если от матриц перейти к соответствующим векторам, то данная система принимает вид

$$\mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \mathrm{svec}\, \Delta Z + \mathcal{A}^{h_k} = 0_m. \tag{3.8}$$

Разрешая систему (3.8) относительно вектора $\mathrm{svec}\, Z$, получаем

$$\mathrm{svec}\, \Delta Z = -(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^{-1} \mathcal{A}^{h_k}. \tag{3.9}$$

Вычислим $C \bullet \Delta X$. Имеем согласно (3.5) $C \bullet \Delta X = C^{Q_B} \bullet \Delta Z + C^{h_k}$. Примем также во внимание (3.4). Тогда после перехода к векторной записи и подстановки вектора (3.9) получаем

$$\begin{aligned} C \bullet \Delta X &= \langle \mathrm{svec}\, C^{Q_B}, \mathrm{svec}\, \Delta Z \rangle + C^{h_{j_k}} = -\langle \mathrm{svec}\, C^{Q_B}, (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^{-1} \mathcal{A}^{h_k} \rangle + C^{h_k} \\ &= -\langle ((\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T)^{-1} \mathrm{svec}\, C^{Q_B}, \mathcal{A}^{h_k} \rangle + C^{h_k} = C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \theta^k < 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Следовательно, вдоль направления ΔX целевая функция в задаче (1.1) убывает. Таким образом, матрицу $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ в данном случае можно рассматривать как матрицу базиса, а матрицу Q_B

и вектор η_B — как *базисную пару переменных* (базисные наборы, состоящие, соответственно, из собственных векторов и собственных значений).

Для перехода в новую базисную пару (новую крайнюю точку) надо еще определить шаг перемещения $\alpha > 0$. Обозначим $\bar{X}(\alpha) = X + \alpha\Delta X$. При перемещении вдоль ΔX с шагом $\alpha > 0$ матрица $\bar{X}(\alpha)$ принимает вид $\bar{X}(\alpha) = X + \alpha\Delta X = Q_B\,[D(\eta_B) + \alpha\Delta Z]\,Q_B^T + \alpha h_k h_k^T$. Поскольку матрица единичного ранга $h_k h_k^T$ положительно полуопределенная, то максимально возможный шаг $\bar{\alpha}$, при котором матрица $\bar{X}(\alpha)$ остается положительно полуопределенной, определится из условия, когда у матрицы $M(\alpha) = D(\eta_B) + \alpha\Delta Z$ впервые появляется отрицательное собственное значение.

Пусть P — невырожденная матрица порядка r, с помощью которой обе матрицы $D(\eta_B)$ и ΔZ приводятся к диагональныму виду одновременно, а именно, $D(\eta_B) = PP^T$, $\Delta Z = PD(\lambda)P^T$. Поэтому $M(\alpha) = P[D(\bar{e}) + \alpha D(\lambda)]P^T$, где $\bar{e}$ — r-мерный вектор со всеми компонентами, равными единице. Отсюда видно, что выбор $\bar{\alpha}$ зависит от максимальной по модулю отрицательной компоненты вектора λ. Предположим, что это будет компонента λ_*. Тогда $\bar{\alpha} = -\lambda_*^{-1}$. В случае, когда $\lambda \geq 0_r$, задача (1.1) не имеет решения, так как в силу (3.10) $C \bullet \bar{X}(\alpha) \to -\infty$ при $\alpha \to +\infty$. При этом $\bar{X}(\alpha) \in \mathcal{F}_P$.

Если собственный вектор h_k матрицы $V(u)$ принадлежит грани $\mathcal{G}^*_{\min}(X_k; \mathbb{S}^n_+)$, сопряженной к минимальной грани $\mathcal{G}_{\min}(X_k; \mathbb{S}^n_+)$, то $Q_B^T h_k = 0_r$, и фактически вектор h_k можно рассматривать как один из столбцов матрицы Q_N. В этом случае из базисного набора собственных векторов Q_B мы исключаем какой-то вектор и вводим новый собственный вектор из Q_N.

4. Итерация метода в нерегулярном случае

Предположим теперь, что точка X является нерегулярной, т. е. $r_\triangle < m$, и пусть, для определенности, $m = r_\triangle + p$, где $p < r$. В этом случае система уравнений (3.2) относительно вектора u оказывается недоопределенной и поэтому может иметь целое множество решений.

Считаем по-прежнему, что точка X является сильно невырожденной. Тогда матрица $\mathcal{A}^{Q_B}_{svec}$ имеет полный ранг, равный $r_\triangle$, и общее решение системы (3.2) можно записать как

$$u = \mathcal{A}^{Q_B}_{svec}[(\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T \mathcal{A}^{Q_B}_{svec}]^{-1} \operatorname{svec} C^{Q_B} + \tilde{u}, \tag{4.1}$$

где $\tilde{u}$ — некоторый m-мерный вектор, принадлежащий нуль-пространству матрицы $(\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T$.

Возьмем в качестве u нормальное решение

$$u = (\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})[(\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T (\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})]^{-1} \operatorname{svec} C^{Q_B}, \tag{4.2}$$

т. е. в (4.1) полагаем $\tilde{u} = 0_m$. Среди всех возможных решений оно будет иметь минимальную норму. Снова определим $V = V(u)$. Пусть θ^k — отрицательное собственное значение матрицы V, ему соответствует собственный вектор h_k, входящий в число столбцов ортогональной матрицы H. Как и прежде, вектор h_k не принадлежит линейному подпространству $\mathcal{L}(Q_B)$.

Формула (3.5), задающая приращение ΔX, в данном случае оказывается неприемлемой, поскольку система (3.8) для определения вектора $\operatorname{svec} Z$ становится переопределенной и может иметь решение лишь в том случае, когда вектор $\mathcal{A}^{h_k}$ лежит в пространстве столбцов матрицы $\mathcal{A}^{Q_B}_{svec}$ или, другими словами, принадлежит нуль-пространству матрицы $(\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T$.

Для устранения этого недостатка изменим подход к выбору матрицы ΔX, а именно, будем теперь строить ΔX в виде

$$\Delta X = [Q_B\, h_k]\begin{bmatrix} \Delta Z & w \\ w^T & 1 \end{bmatrix}[Q_B\, h_k]^T, \tag{4.3}$$

где $\Delta Z \in \mathbb{S}^r$ и $w \in \mathbb{R}^r$. Отметим, что данное направление ΔX переходит в направление из (3.5), если положить $w = 0_r$.

Выберем w следующим образом:

$$w = 1/2\widetilde{W}y, \quad \widetilde{W} = [\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_p], \tag{4.4}$$

где все столбцы $\tilde{w}_j \in \mathbb{R}^r$, $1 \leq j \leq p$, матрицы $\widetilde{W}$ — линейно независимы, $y \in \mathbb{R}^p$. Кроме того, потребуем, чтобы векторы $q_{w_j} = Q_B\tilde{w}_j$, $1 \leq j \leq p$, были ортогональны вектору h_k, т. е.

$$\langle h_k, q_{w_j}\rangle = \langle Q_B^T h_k, \tilde{w}_j\rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq p. \tag{4.5}$$

Все векторы q_{w_j}, $1 \leq j \leq p$, принадлежат подпространству $\mathcal{L}(Q_B)$. Вектор $q_y = Q_B\widetilde{W}y$ также принадлежит этому подпространству, и, согласно (4.5), $h_k^T q_y = 0$. Теперь вместо (3.7) имеем $A_i^{Q_B} \bullet \Delta Z + 2\langle Q_B^T A_i h_k, w\rangle + h_k^T A_i h_k = 0$, $1 \leq i \leq m$, или после подстановки вектора w из (4.4)

$$A_i^{Q_B} \bullet \Delta Z + \langle Q_B^T A_i h_k, \widetilde{W}y\rangle + h_k^T A_i h_k = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{4.6}$$

Второе слагаемое в (4.6) можно переписать также в виде: $\langle Q_B^T A_i h_k, \widetilde{W}y\rangle = \langle h_k, A_i Q_B\widetilde{W}y\rangle$.

Пусть $\mathcal{B}$ — матрица размерности $m \times p$, у которой (i,j)-й элемент равняется $h_k^T A_i q_{w_j}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$. Другими словами, i-я строка этой матрицы равняется вектору $h_k^T A_i Q_B \widetilde{W}$. Тогда, объединяя все уравнения (4.6) в единую систему, получаем

$$\mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \operatorname{svec}\Delta Z + \mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k} = 0_m. \tag{4.7}$$

Система (4.7) является системой m уравнений относительно m переменных, а именно, векторов $\operatorname{svec}\Delta Z \in \mathbb{R}^{r_\triangle}$ и $y \in \mathbb{R}^p$.

Возьмем далее $(r_\triangle \times m)$-матрицу $(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T$ и $(p \times m)$-матрицу $\widetilde{U}$, строками которой являются линейно независимые векторы $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_p$ из нуль-пространства матрицы $(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T$. Составим из них квадратную матрицу $\mathcal{P} = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \\ \widetilde{U} \end{bmatrix}$. Данная матрица неособая, ее строки порождают пространство $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\mathcal{W}$ обозначает квадратную неособую матрицу $\mathcal{W} = (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ порядка $r_\triangle$. После умножения системы (4.7) слева на матрицу $\mathcal{P}$ приходим к эквивалентной системе, которая распадается на две подсистемы

$$\mathcal{W} \operatorname{svec}\Delta Z + (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T[\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}] = 0_{r_\triangle}, \tag{4.8}$$

$$\widetilde{U}[\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}] = 0_p. \tag{4.9}$$

Из первой подсистемы (4.8) находим

$$\operatorname{svec}\Delta Z = -\mathcal{W}^{-1}(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T[\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}]. \tag{4.10}$$

Утверждение 2. *Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})$ — пространства столбцов матриц $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ соответственно. Пусть, кроме того, $\mathcal{R}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}) = \varnothing$. Тогда матрица $\widetilde{U}\mathcal{B}$ неособая.*

Доказательство. Покажем, что однородная система уравнений $\widetilde{U}\mathcal{B}y = 0_p$ имеет только тривиальное решение $y = 0_p$. Допустим противное, что существует ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^p$, удовлетворяющий этой системе. Из-за того, что $\mathcal{B}$ — матрица полного ранга, следует принадлежность ненулевого вектора $z = \mathcal{B}y$ нуль-пространству матрицы $\widetilde{U}$, которое совпадает с пространством столбцов матрицы $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$. Мы пришли к противоречию.

Утверждение доказано.

Принимая во внимание утверждение 2 и разрешая вторую подсистему (4.9), получаем $y = -(\widetilde{U}\mathcal{B})^{-1}\widetilde{U}\mathcal{A}^{h_k}$. Для сокращения записи положим $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(\widetilde{U}\mathcal{B})^{-1}\widetilde{U}$. После подстановки найденного y в выражение (4.10) для $\operatorname{svec}\Delta Z$ приходим к

$$\operatorname{svec}\Delta Z = \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T[\widetilde{\mathcal{B}} - I_m]\mathcal{A}^{h_k}. \tag{4.11}$$

Найдем теперь изменение значения целевой функции вдоль направления ΔX.

Утверждение 3. *Матрица* ΔX *является направлением убывания целевой функции в задаче* (1.1), *причем* $C \bullet \Delta X = \theta^k$.

Доказательство. Имеем $C \bullet \Delta X = \begin{bmatrix} Q_B^T C Q_B & Q_B^T C h_k \\ h_k^T C Q_B & h_k^T C h_k \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \Delta Z & w \\ w^T & 1 \end{bmatrix}$. Таким образом, при $C^{Q_B h_k} = Q_B^T C h_k$ получим

$$C \bullet \Delta X = \langle \operatorname{svec} C^{Q_B}, \operatorname{svec} \Delta Z \rangle + 2\langle C^{Q_B h_k}, w \rangle + C^{h_k}. \tag{4.12}$$

Вычислим отдельно первое и второе слагаемые в правой части (4.12). Для первого слагаемого получаем

$$\langle \operatorname{svec} C^{Q_B}, \operatorname{svec} \Delta Z \rangle = \langle \operatorname{svec} C^{Q_B}, \mathcal{W}^{-1} (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \, [\widetilde{\mathcal{B}} - I_m] \, \mathcal{A}^{h_k} \rangle$$

$$= \langle \mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \mathcal{W}^{-1} \operatorname{svec} C^{Q_B}, [\widetilde{\mathcal{B}} - I_m] \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \langle u, [\widetilde{\mathcal{B}} - I_m] \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \langle u, \widetilde{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{h_k} \rangle - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle,$$

причем $\langle u, \widetilde{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{h_k} \rangle = -\langle u, \mathcal{B} y \rangle = -\sum_{i=1}^m u^i A_i^{h_k q_y}$, $A_i^{h_k q_y} = h_k^T A_i q_y$, $1 \le i \le m$. Для второго слагаемого в (4.12) выполняется, соответственно,

$$2\langle C^{Q_B h_k}, w \rangle = \langle C^{Q_B h_k}, \widetilde{W} y \rangle = \langle C h_k, Q^B \widetilde{W} y \rangle = \langle h_k, C q_y \rangle = C^{h_k q_y},$$

где $C^{h_k q_y} = h_k^T C q_y$. Учтем далее, что согласно (3.4) $C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = h_k^T V h_k = \theta^k$. Учтем также, что $V h_k = \theta^k h_k$ и что вектор $q_y = Q_B \widetilde{W} y$ ортогонален вектору h_k. Тогда получаем $C^{h_k q_y} - \sum_{i=1}^m u^i A_i^{h_k q_y} = h_k^T V q_y = \theta^k h_k^T q_y = 0$. Поэтому $C \bullet \Delta X = \theta^k < 0$. Следовательно, вдоль направления ΔX целевая функция убывает.

Утверждение доказано.

Выбор максимально возможного шага α проводится полностью аналогично регулярному случаю. Матрица X положительно полуопределенная, и из (4.3) следует, что симметричная матрица $\bar{X}(\alpha) = X + \alpha \Delta X$ также будет оставаться положительно полуопределенной для α достаточно малых. Определим максимально возможный шаг $\bar{\alpha}$, при котором она сохраняет свою знакоопределенность. Понятно, что этот шаг $\bar{\alpha}$ находится из условия

$$\det \begin{bmatrix} D(\eta_B) + \alpha \Delta Z & \alpha w \\ \alpha w^T & \alpha \end{bmatrix} = 0.$$

При $\alpha > 0$ имеем $\det \begin{bmatrix} D(\eta_B) + \alpha \Delta Z & \alpha w \\ \alpha w^T & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \det[D(\eta_B) + \alpha \Delta Z - \alpha w w^T]$. Поэтому определение $\bar{\alpha}$ сводится к определению максимального по модулю отрицательного α, при котором $\det[D(\eta_B) + \alpha(\Delta Z - w w^T)] = 0$. Обе матрицы $D(\eta_B)$ и $G = \Delta Z - w w^T$ — симметрические, матрица $D(\eta_B)$ положительно определена, поэтому они приводятся к диагональному виду с помощью некоторой невырожденной матрицы P, а именно, $D(\eta_B) = P P^T$, $G = P D(\lambda) P^T$.

Если у вектора $\lambda = [\lambda^1, \ldots, \lambda^r]^T$ хотя бы одна компонента отрицательна, то $\bar{\alpha}$ конечно и равняется $\bar{\alpha} = -\lambda_*^{-1}$, где λ_* — максимальная по модулю компонента из всех отрицательных компонент λ. В противном случае мы приходим к ситуации, когда в задаче (1.1) нет решения.

Рассмотрим вопрос о сходимости метода, предполагая, что задача (1.1) имеет решение. Считаем также дополнительно, что в качестве отрицательного собственного значения θ^k на каждом шаге берется максимальное по модулю значение.

Теорема. *Пусть задача* (1.1) *является сильно невырожденной и вполне регулярной. Пусть, кроме того, начальная точка* $X_0 \in \mathcal{F}_P$ *такова, что множество* $\mathcal{F}_P(X_0) = \{X \in \mathcal{F}_P : C \bullet X \le C \bullet X_0\}$ *ограничено. Тогда симплекс-метод порождает последовательность точек* $\{X_k\} \subset \mathcal{F}_P(X_0)$, *которая либо конечна, и тогда последняя точка есть решение задачи, либо последовательность* $\{X_k\}$ *— бесконечная, и тогда любая ее предельная точка также является решением задачи.*

Доказательство. Если последовательность $\{X_k\}$ конечная, т. е. метод останавливается на некотором k-м шаге, то это может произойти только в том случае, когда после вычисления u_k получаем, что у матрицы $V_k = V(u_k)$ нет отрицательных собственных значений, т. е. пара $[u_k, V_k]$ является допустимой в двойственной задаче. Но тогда выполняются условия оптимальности (1.3), из которых следует, что X_k — решение задачи (1.1).

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{X_k\}$ — бесконечная. Так как она ограниченная, то у нее существуют предельные точки. Пусть $X_{k_s} \to \bar{X}$. В силу сделанных предположений о задаче и правила выбора шага α_k в любом случае, является ли крайняя точка X_k ранга r регулярной или нет, следующая точка X_{k+1} также будет сильно невырожденной крайней точкой, причем того же самого ранга r.

У последовательности $\{X_{k_s}\}$ все соответствующие матрицы Q_B из разложения (3.1) имеют одну и ту же норму Фробениуса, а именно, $\|Q_B\|_F = (\operatorname{tr} Q_B^T Q_B)^{1/2} = \sqrt{r}$, т. е. принадлежат компактному множеству. Поэтому из $\{X_{k_s}\}$ можно извлечь подпоследовательность, для которой матрицы Q_B также сходятся к некоторой матрице $\bar{Q}_B$ такой, что $\bar{Q}_B^T \bar{Q}_B = I_r$. Не умаляя общности, считаем, что сама последовательность $\{X_{k_s}\}$ обладает этим свойством.

Если обратиться к матрице $(\mathcal{A}_{svec}^{\bar{Q}_B})^T$, входящей в систему (3.2) для определения вектора двойственных переменных $\bar{u}$ в точке $\bar{X}$, то поскольку точка $\bar{X}$ сильно невырожденная, матрица $(\mathcal{A}_{svec}^{\bar{Q}_B})^T$ будет иметь полный ранг, совпадающий с рангом по столбцам. Отсюда с учетом непрерывности соответствующих векторов $\operatorname{svec} C^{Q_B}$ приходим к выводу, что решения системы (3.2), а именно, векторы двойственных переменных u_{k_s}, определяемые либо формулой (3.3), либо формулой (4.2), сходятся к $\bar{u}$.

Определим матрицу $\bar{V} = V(\bar{u})$. Данная матрица $\bar{V}$ должна быть положительно полуопределенной. В самом деле, если допустить противное, то у $\bar{V}$ имеется отрицательное собственное значение. Но собственные значения матриц непрерывны по Липшицу. Поэтому у матриц V_{k_s}, достаточно близких к $\bar{V}$, также существуют отрицательные собственные числа. Отсюда следует, что на этих итерациях должен осуществляться переход из точек X_{k_s} в последующие точки X_{k_s+1} с шагом α_{k_s} и с уменьшением значения целевой функции на величину $\alpha_{k_s}\theta^{k_s}$. Однако, шаги α_{k_s} не могут стремиться к нулю, так как из (3.9) или (4.11) следует, что матрицы ΔX_{k_s} ограничены по норме на $\mathcal{F}_P(X_0)$. Поэтому на некоторой k_s-й итерации обязательно получим, что $C \bullet X_{k_s+1} < C \bullet \bar{X}$, что в силу монотонного убывания значений целевой функции вдоль траектории противоречит сходимости $\{X_{k_s}\}$ к $\bar{X}$.

Теорема доказана.

Можно показать, что если задачи (1.1) и (1.2) достаточно хорошие, а именно, они невырожденные и их решения строго комплементарные, то ограниченное множество $\mathcal{F}_P(X_0)$ из условий теоремы существует по крайней мере для X_0, достаточно близких к единственному решению X_* задачи (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
2. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2008. 347 с.
3. **Vanderbei R.J.** Linear programming. Foundations and extensions. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 418 p.
4. Handbook of semidefinite programming / eds. H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 656 p.
5. **Lasserre J.B.** Linear programming with positive semi-definite matreces // Math. Problems in Engineering. 1996. Vol. 2, iss. 6. P. 499–522.
6. **Pataki G.** Cone-LP’s and semidefinite programs: geometry and simplex-type method // Proc. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5). Vancouver, 1996. P. 1–13.
7. **Косолап А.И.** Симплекс-метод для решения задач полуопределенного программирования // Вестн. Донец. нац. ун-та. 2009. Вып. 2. С. 365–369. (Сер. А: Естественные науки.)

8. **Жадан В.Г.** Об одном варианте допустимого аффинно-масштабирующего метода для полуопределенного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 145–160.
9. **Магнус Я.Р., Нейдеккер Ч.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002. 496 с.
10. **Арнольд В.И.** О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 2(158). С. 101–114.
11. **Alizadeh F., Haeberly J.-P.F., Overton M.L.** Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Math. Programming. Ser. B. 1997. Vol. 7, no. 2. P. 129–162.

Жадан Виталий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила 08.05.2015