ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НА МИНИМАКС ПОЗИЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ[1]

Д. В. Корнев, Н. Ю. Лукоянов

В рамках теоретико-игрового подхода рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи движением линейной динамической системы на минимакс позиционного показателя качества в виде нормы отклонений движения в заданные моменты времени от заданных целевых точек. Воздействия управления стеснены как геометрическими, так и интегральными ограничениями. Дана процедура для приближенного вычисления оптимального гарантированного результата и построения закона управления, обеспечивающего этот результат. Процедура базируется на рекуррентной конструкции выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: минимаксное управление, дифференциальные игры, интегральные ограничения, нетерминальный показатель качества.

D. V. Kornev, N. Yu. Lukoyanov. On a minimax control problem for a positional functional under geometric and integral constraints on control actions.

Within the game-theoretical approach we consider a minimax feedback control problem for a linear dynamical system with a positional quality index in the form of the norm of motion deviations at given times from given target points. Control actions are subject to both geometric and integral constraints. A procedure for the approximate calculation of the optimal guaranteed result and for the construction of a control law that ensures the result is developed. The procedure is based on the recursive construction of upper convex hulls of auxiliary program functions. Results of numerical simulations are presented.

Keywords: minimax control, differential games, integral constraints, nonterminal payoff.

Введение

Рассматривается линейная динамическая система, подверженная воздействиям управления и помехи. Возможности управления стеснены геометрическими и интегрально-импульсными ограничениями. На помеху наложены только геометрические ограничения. В рамках теоретико-игрового подхода [1–3] исследуется задача об управлении по принципу обратной связи на минимакс нетерминального показателя качества — позиционного функционала в виде нормы, оценивающей совокупность отклонений движения системы в заданные моменты времени от заданных целевых точек. В силу геометрических ограничений на возможности управления здесь не возникает импульсных постановок и связанных с ними трудностей (см., например, [4–6]). Однако интегральные ограничения требуют дополнительной оптимизации по затратам ресурсов. В работе дана процедура для вычисления оптимального гарантированного результата управления, базирующаяся на рекуррентном построении выпуклых сверху оболочек подходящих вспомогательных функций. На ее основе методом экстремального сдвига [2; 3] построен закон управления, обеспечивающий результат не хуже оптимального гарантированного результата с наперед заданной точностью. Приведен иллюстрирующий пример.

Развиваемые конструкции выпуклых сверху оболочек идейно восходят к стохастическому программному синтезу [2; 7]. Они были разработаны для задач без интегральных ограничений (см., например, [3; 8–12]). Для задач с интегральными ограничениями подобные построения рассматривались в [13–15] для случая терминального показателя качества. В докладе [16] было намечено объединение конструкций из [11] и [14; 15] для решения задач управления с

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

интегральными ограничениями и нетерминальным показателем качества. Настоящая статья посвящена развитию и обоснованию результатов, анонсированных в [16].

1. Постановка задачи

Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad t_0 \leqslant t_* \leqslant t < \vartheta; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^{n_u}, \quad v \in \mathbb{R}^{n_v}. \tag{1.1}$$

Здесь x — фазовый вектор; t — время; точка над символом обозначает производную по t; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные матрицы-функции; u — управляющее воздействие; v — воздействие помехи. Моменты времени t_0 и ϑ зафиксированы, t_* — момент начала процесса управления.

Допустимой реализацией управления считаем всякую измеримую (по Борелю) функцию $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big) = \big\{u(t) \in \mathbb{R}^{n_u},\ t_* \leqslant t < \vartheta\big\}$, которая одновременно удовлетворяет следующим геометрическому и интегральному ограничениям:

$$\|u(t)\|_u \leqslant \lambda_u, \quad t_* \leqslant t < \vartheta; \quad \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \alpha(\tau)\|u(\tau)\|_u d\tau \leqslant \rho_*. \tag{1.2}$$

Реализацию $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big) = \big\{v(t) \in \mathbb{R}^{n_v},\ t_* \leqslant t < \vartheta\big\}$ помехи считаем допустимой, если она измерима и удовлетворяет только геометрическому ограничению

$$\|v(t)\|_v \leqslant \lambda_v, \quad t_* \leqslant t < \vartheta. \tag{1.3}$$

Здесь $\|\cdot\|_u$ и $\|\cdot\|_v$ — нормы в $\mathbb{R}^{n_u}$ и $\mathbb{R}^{n_v}$ соответственно; λ_u, λ_v — заданные постоянные; $\alpha(\tau)$ — скалярная, положительная, непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ функция.

Дополнительно к фазовому вектору x системы (1.1) введем переменную ρ, изменение которой описывается уравнением

$$\dot{\rho} = -\alpha(t)\|u\|_u, \quad t_* \leqslant t < \vartheta, \quad \rho(t_*) = \rho_*. \tag{1.4}$$

Тогда интегральное ограничение из (1.2) можно переписать в виде фазового: $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_*$.

Обозначим

$$\lambda_K = \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \big[\|A(t)\| + \lambda_u\|B(t)\| + \lambda_v\|C(t)\|\big],$$

где

$$\|A(t)\| = \max_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A(t)x\|_E, \quad \|B(t)\| = \max_{\|u\|_u \leqslant 1} \|B(t)u\|_E, \quad \|C(t)\| = \max_{\|v\|_v \leqslant 1} \|C(t)v\|_E.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|_E$ — евклидова норма. В пространстве переменных (t, x, ρ) определим компактное множество K_χ возможных позиций рассматриваемой динамической системы:

$$K_\chi = \Big\{(t, x, \rho) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times [0, \rho_0 + \chi] \colon \|x\|_E \leqslant (1 + R_0 + \chi) \exp\big[(t - t_0)\lambda_K\big] - 1\Big\}, \tag{1.5}$$

где $\chi \geqslant 0$, $R_0 > 0$, $\rho_0 > 0$ — некоторые постоянные. Пусть $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_\chi$, $t_* < \vartheta$. Под движением $x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$, порожденным из позиции (t_*, x_*, ρ_*) допустимыми реализациями $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ и $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$, понимаем абсолютно непрерывную функцию $\big\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ x(t_*) = x_*\big\}$, которая при почти всех $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ вместе с $u = u(t)$ и $v = v(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Заметим, что в согласии с (1.1)–(1.5) имеет место включение

$$\big(t, x(t), \rho(t)\big) \in K_\chi, \quad \rho(t) = \rho_* - \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \alpha(\tau)\|u(\tau)\|_u d\tau, \quad t_* \leqslant t \leqslant \vartheta.$$

Пусть заданы моменты времени ϑ_i оценки качества движения $x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$: $t_0 < \vartheta_i < \vartheta_{i+1} \leqslant \vartheta$, $i = 1, \dots, N-1$, $\vartheta_N = \vartheta$, а также постоянные матрицы D_i размерности $d_i \times n$ $(1 \leqslant d_i \leqslant n)$, целевые векторы $c_i \in \mathbb{R}^n$ и нормы $\mu_i(l_i, \dots, l_N)$, $(l_i, \dots, l_N) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_N}$, $i = 1, \dots, N$. Пусть существуют такие четные по μ нормы $\sigma_i(l_i, \mu)$, $(l_i, \mu) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N-1$, что

$$\mu_i(l_i, \dots, l_N) = \sigma_i\big(l_i, \mu_{i+1}(l_{i+1}, \dots, l_N)\big), \quad i = 1, \dots, N-1. \tag{1.6}$$

Обозначим

$$h(t) = \min\{i = 1, \dots, N : \vartheta_i \geqslant t\}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta. \tag{1.7}$$

Показатель качества, оценивающий движение $x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$, имеет вид

$$\gamma\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) = \mu_{h(t_*)}\Big(D_{h(t_*)}\big(x(\vartheta_{h(t_*)}) - c_{h(t_*)}\big), \dots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big). \tag{1.8}$$

Отметим, что он является позиционным функционалом (см. [3, с. 43], а также [11]).

Задача управления — доставить показателю (1.8) как можно меньшее значение. Действия помехи неизвестны и, в частности, могут быть направлены на максимизацию этого показателя.

Дальнейшая формализация задачи следует теоретико-игровому подходу [1–3]. Под стратегией U управления понимаем произвольную функцию

$$U = \Big\{U(t, x, \rho, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_u},\ \|U(t, x, \rho, \varepsilon)\|_u \leqslant \lambda_u,\ (t, x, \rho) \in K_0,\ \varepsilon > 0\Big\},$$

где ε — параметр точности [2, с. 68]. Законом $\mathcal{U}$ управления называем тройку $\big(U,\ \varepsilon,\ \Delta_\delta\big)$, где Δ_δ — разбиение отрезка времени $[t_*, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \Big\{t_j : t_1 = t_*,\ 0 < t_{j+1} - t_j \leqslant \delta,\ j = 1, \dots, k,\ t_{k+1} = \vartheta\Big\}. \tag{1.9}$$

Из заданной позиции $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$ закон управления $\mathcal{U}$ в паре с допустимой реализацией $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ помехи однозначно формирует движение $\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big], \rho\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big)$ расширенной системы (1.1), (1.4) как решение пошаговых уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u_j(t) + C(t)v(t), \\ &\dot{\rho}(t) = -\alpha(t)\|u_j(t)\|_u, \end{aligned} \qquad t_j \leqslant t < t_{j+1},\ j = 1, \dots, k, \tag{1.10}$$

при начальном условии $x(t_1) = x_*$, $\rho(t_1) = \rho_*$. Начальное состояние $\big(x(t_j), \rho(t_j)\big)$ для отрезка $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ при $j > 1$ совпадает с конечным состоянием $\big(x(t_j), \rho(t_j)\big)$ для предыдущего отрезка $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j$. Величина $u_j(t)$ назначается законом $\mathcal{U}$ по правилу

$$u_j(t) = \begin{cases} 0, \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad \text{если } 0 \leqslant \rho(t_j) < \displaystyle\int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau)\|u_j^*\|_u d\tau, \\ u_j^*, \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad \text{если } \rho(t_j) \geqslant \displaystyle\int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau)\|u_j^*\|_u d\tau, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $u_j^* = U\big(t_j, x(t_j), \rho(t_j), \varepsilon\big)$. Гарантированный результат закона $\mathcal{U}$ управления для заданной позиции $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$ определяется равенством

$$\Gamma(\mathcal{U}; t_*, x_*, \rho_*) = \sup_{v[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big),$$

где верхняя грань берется по всем допустимым реализациям $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ помехи, а $\gamma\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big)$ — значение показателя (1.8), реализовавшегося на движении $x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$, порожденном согласно (1.10), (1.11) законом $\mathcal{U}$ в паре с $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ из позиции (t_*, x_*, ρ_*).

Соответственно гарантированным результатом стратегии U называем величину

$$\Gamma(U; t_*, x_*, \rho_*) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \sup_{\Delta_\delta} \Gamma\big(\mathcal{U} = (U, \varepsilon, \Delta_\delta); t_*, x_*, \rho_*\big). \tag{1.12}$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом управления будет

$$\Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*) = \inf_U \Gamma(U; t_*, x_*, \rho_*), \tag{1.13}$$

а стратегия U_0 управления оптимальна, если $\Gamma(U_0; t_*, x_*, \rho_*) = \Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*)$.

Для $\zeta > 0$ закон $\mathcal{U}$ называем ζ-оптимальным, если $\Gamma(\mathcal{U}; t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*) + \zeta$.

Цель работы состоит в разработке методов для нахождения оптимального гарантированного результата $\Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*)$ и построения ζ-оптимального закона управления.

При решении этой основной задачи ниже будем также рассматривать задачу о самой неблагоприятной помехе. Будем рассматривать стратегии помехи

$$V = \big\{V(t, x, \rho, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_v},\ \|V(t, x, \rho, \varepsilon)\|_v \leqslant \lambda_v,\ (t, x, \rho) \in K_0,\ \varepsilon > 0\big\}$$

и законы $\mathcal{V} = (V, \varepsilon, \Delta_\delta)$ формирования помехи. Из заданной позиции $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$ закон $\mathcal{V}$ в паре с допустимой реализацией $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ управления однозначно формирует движение $\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big], \rho\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big)$ расширенной системы (1.1), (1.4) как решение пошаговых уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v_j^*, \\ &\dot{\rho}(t) = -\alpha(t)\|u(t)\|_u, \end{aligned} \qquad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

при начальном условии $x(t_1) = x_*$, $\rho(t_1) = \rho_*$. Здесь $v_j^* = V\big(t_j, x(t_j), \rho(t_j), \varepsilon\big)$.

Соответственно определяем гарантированный результат закона $\mathcal{V}$:

$$\Gamma(\mathcal{V}; t_*, x_*, \rho_*) = \inf_{u[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big),$$

гарантированный результат стратегии V:

$$\Gamma(V; t_*, x_*, \rho_*) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \inf_{\Delta_\delta} \Gamma\big(\mathcal{V} = (V, \varepsilon, \Delta_\delta); t_*, x_*, \rho_*\big), \tag{1.14}$$

оптимальный гарантированный результат помехи:

$$\Gamma_v(t_*, x_*, \rho_*) = \sup_V \Gamma(V; t_*, x_*, \rho_*), \tag{1.15}$$

и оптимальную стратегию V_0 помехи: $\Gamma(V_0; t_*, x_*, \rho_*) = \Gamma_v(t_*, x_*, \rho_*)$.

Заметим, что из определений величин $\Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*)$ и $\Gamma_v(t_*, x_*, \rho_*)$ вытекает неравенство

$$\Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \Gamma_v(t_*, x_*, \rho_*), \quad (t_*, x_*, \rho_*) \in K_0. \tag{1.16}$$

2. Вспомогательная модель

Пусть $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и $\varrho_* \geqslant 0$. Через $\mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ обозначим множество всех измеримых функций $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{u_*(t) \in \mathbb{R}^{n_u},\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$, которые удовлетворяют условиям

$$\|u_*(t)\|_u \leqslant \lambda_u, \quad t_* \leqslant t < t^*, \quad \int\limits_{t_*}^{t^*} \alpha(\tau)\|u_*(\tau)\|_u d\tau \leqslant \varrho_*,$$

а через $\mathscr{V}(t_*,t^*)$ — множество измеримых функций $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{v_*(t) \in \mathbb{R}^{n_v},\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$, удовлетворяющих условию

$$\|v_*(t)\|_v \leqslant \lambda_v, \quad t_* \leqslant t < t^*.$$

Наряду с исходной расширенной системой (1.1), (1.4) рассмотрим ее модель-копию:

$$\begin{gathered}\dot w = A(t)w + B(t)u_* + C(t)v_*, \quad \dot\varrho = -\alpha(t)\|u_*\|_u, \quad t_0 \leqslant t_* \leqslant t < \vartheta;\\ w(t_*) = w_*, \quad \varrho(t_*) = \varrho_*.\end{gathered} \tag{2.1}$$

В качестве множества возможных позиций (t,w,ϱ) модели (2.1) рассматриваем компакт K_2, определенный в (1.5). Соответственно допустимыми реализациями воздействий u_* и v_* считаем функции $u_*\big[t_*[\cdot]\vartheta\big) \in \mathscr{U}(t_*,\vartheta,\varrho_*)$ и $v_*\big[t_*[\cdot]\vartheta\big) \in \mathscr{V}(t_*,\vartheta)$. В последующих рассуждениях иногда будет удобно представить компоненту w фазового вектора (w,ϱ) модели (2.1) в виде суммы $w = w^{(1)} + w^{(2)}$, где изменение переменных $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ описывается уравнениями

$$\dot w^{(1)} = A(t)w^{(1)} + B(t)u_*, \quad \dot w^{(2)} = A(t)w^{(2)} + C(t)v_*. \tag{2.2}$$

Пусть

$$\begin{gathered}p(t,s,r) \in \mathop{\arg\min}_{\|u\|_u \leqslant \lambda_u} \big[\big\langle s, B(t)u\big\rangle - r\alpha(t)\|u\|_u\big], \quad q(t,s) \in \mathop{\arg\max}_{\|v\|_v \leqslant \lambda_v} \big\langle s, C(t)v\big\rangle,\\ \eta(\varepsilon,t) = \big(\varepsilon + (t-t_0)\varepsilon\big)^{1/2} \exp\big[\lambda_A(t-t_0)\big], \quad \lambda_A = \max_{t\in[t_0,\vartheta]} \|A(t)\|,\\ t \in [t_0,\vartheta], \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $(t_*,x_*,\rho_*) \in K_2$, $(t_*,w_*,\varrho_*) \in K_2$, $t_* < \vartheta$, и $t^* \in (t_*,\vartheta]$, $t^* - t_* < \delta$, имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть $\rho_* \geqslant \eta(\varepsilon,t_*)$ и $\|(x_*,\rho_*) - (w_*,\varrho_*)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon,t_*)$. Пусть $\big(x\big[t_*[\cdot]t^*\big], \rho\big[t_*[\cdot]t^*\big]\big)$ — движение системы* (1.1), (1.4), *порожденное из позиции (t_*,x_*,ρ_*) произвольной допустимой реализацией $v\big[t_*[\cdot]t^*\big)$ помехи и постоянной реализацией управления $u^{\mathrm e}\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{u^{\mathrm e} = p(t_*,x_*-w_*,\rho_*-\varrho_*),\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$, а $\big(w\big[t_*[\cdot]t^*\big], \varrho\big[t_*[\cdot]t^*\big]\big)$ — движение модели* (2.1), *порожденное из позиции (t_*,w_*,ϱ_*) произвольной реализацией $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*,t^*,\varrho_*)$ и постоянной реализацией $v_*^{\mathrm e}\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{v_*^{\mathrm e} = q(t_*,x_*-w_*),\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$. Тогда*

$$\big\|\big(x(t^*),\rho(t^*)\big) - \big(w(t^*),\varrho(t^*)\big)\big\|_E \leqslant \eta(\varepsilon,t^*).$$

2. *Пусть $\rho_* < \eta(\varepsilon,t_*)$, $w_* = w_*^{(1)} + w_*^{(2)}$ и $\|x_* - w_*^{(2)}\|_E \leqslant \eta(\varepsilon,t_*)$. Пусть $\big(x\big[t_*[\cdot]t^*\big], \rho\big[t_*[\cdot]t^*\big]\big)$ — движение системы* (1.1), (1.4), *порожденное из позиции (t_*,x_*,ρ_*) произвольной допустимой реализацией $v\big[t_*[\cdot]t^*\big)$ помехи в паре с нулевой реализацией управления $u \equiv 0$, а $\big(w\big[t_*[\cdot]t^*\big], \varrho\big[t_*[\cdot]t^*\big]\big)$ — движение модели* (2.1), *порожденное из позиции (t_*,w_*,ϱ_*) произвольной реализацией $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*,t^*,\varrho_*)$ и постоянной реализацией $v_*^{\mathrm e}\big[t_*[\cdot]t^*\big) = \big\{v_*^{\mathrm e} = q(t_*,x_*-w_*^{(2)}),\ t_* \leqslant t < t^*\big\}$. Тогда*

$$\|x(t^*) - w^{(2)}(t^*)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon,t^*).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость леммы вытекает из результатов [2, лемма 25.3].

3. Величины $e_j^{\pm}$ и их свойства

Пусть для промежутка времени $[t_*,\vartheta]$ зафиксировано разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида (1.9), в которое включены все моменты ϑ_i оценки качества движения из показателя (1.8), т. е.

$$\vartheta_i \in \Delta_\delta, \quad i = h(t_*),\dots,N. \tag{3.1}$$

Для $t_* = \vartheta$ формально полагаем, что разбиение Δ_δ состоит из одной точки: $t_* = t_1 = t_{k+1} = \vartheta$.

Пусть $j = 1, \ldots, k$, $m \in \mathbb{R}^n$, $\varrho \geqslant 0$ и $\mathscr{U}_j(\varrho) = \mathscr{U}(t_j, t_{j+1}, \varrho)$, $\mathscr{V}_j = \mathscr{V}(t_j, t_{j+1})$. Положим

$$\Delta\psi_j(t_*, m, \varrho) = \min_{\mathscr{U}_j(\varrho)} \max_{\mathscr{V}_j} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \big\langle m, \Psi(\vartheta, \tau)(B(\tau)u(\tau) + C(\tau)v(\tau))\big\rangle d\tau,$$

где $\Psi(\vartheta, \tau)$ — матрица Коши для уравнения $\dot{x} = A(t)x$, символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов, минимум и максимум берутся по функциям $u\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big) \in \mathscr{U}_j(\varrho)$ и $v\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big) \in \mathscr{V}_j$ соответственно и достигаются, так как множества $\mathscr{U}_j(\varrho)$ и $\mathscr{V}_j$ слабокомпактны в пространстве суммируемых с квадратом функций. Функции $\Delta\psi_j(t_*, m, \varrho)$, $j = 1, \ldots, k$, непрерывны по совокупности аргументов (m, ϱ), выпуклы и не возрастают по ϱ.

Попятно по шагам разбиения Δ_δ определим множества $G_j^{\pm}(t_*)$ векторов $m \in \mathbb{R}^n$ и скалярные функции $\varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)$, $m \in G_j^{\pm}(t_*)$, $\varrho \geqslant 0$, по следующим рекуррентным соотношениям.

При $j = k + 1$ имеем

$$G_{k+1}^{+}(t_*) = \{m \colon m = 0\}, \quad \varphi_{k+1}^{+}(t_*, m, \varrho) = 0,$$
$$G_{k+1}^{-}(t_*) = \big\{m \colon m = D_N^{\top} l,\ l \in \mathbb{R}^{d_N},\ \mu_N^*(l) \leqslant 1\big\}, \quad \varphi_{k+1}^{-}(t_*, m, \varrho) = -\langle m, c_N \rangle.$$

Если $1 \leqslant j \leqslant k$, тогда

$$G_j^{+}(t_*) = G_{j+1}^{-}(t_*), \quad \varphi_j^{+}(t_*, m, \varrho) = \operatorname*{conc}_{G_j^{+}(t_*)} \big[\psi_j(t_*, \cdot, \varrho)\big](m),$$

где

$$\psi_j(t_*, m, \varrho) = \min_{\varrho' \in R_j(t_*, \varrho)} [\Delta\psi_j(t_*, m, \varrho - \varrho') + \varphi_{j+1}^{-}(t_*, m, \varrho')], \quad m \in G_j^{+}(t_*), \quad \varrho \geqslant 0,$$
$$R_j(t_*, \varrho) = \left\{\varrho' \colon \max\left[0, \varrho - \lambda_u \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau) d\tau\right] \leqslant \varrho' \leqslant \varrho\right\},$$

и, далее, когда t_j не совпадает ни с одним из моментов ϑ_i, т. е. $t_j < \vartheta_{h(t_j)}$,

$$G_j^{-}(t_*) = G_j^{+}(t_*), \quad \varphi_j^{-}(t_*, m, \varrho) = \varphi_j^{+}(t_*, m, \varrho),$$

иначе, когда $t_j = \vartheta_h$, $h = h(t_j)$,

$$\begin{gathered} G_j^{-}(t_*) = \Big\{m \colon m = \nu m_* + \Psi^{\top}(\vartheta_h, \vartheta) D_h^{\top} l,\ \nu \geqslant 0,\ l \in \mathbb{R}^{d_h},\ \sigma_h^*(l, \nu) \leqslant 1,\ m_* \in G_j^{+}(t_*)\Big\}, \\ \varphi_j^{-}(t_*, m, \varrho) = \max_{(\nu, l, m_*) | m} [\nu \varphi_j^{+}(t_*, m_*, \varrho) - \langle l, D_h c_h \rangle]. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь $h(\cdot)$ — функция из (1.7); верхний индекс “$\top$” означает транспонирование; $\mu_N^*(\cdot)$ и $\sigma_h^*(\cdot)$ — нормы, сопряженные к $\mu_N(\cdot)$ и $\sigma_h(\cdot)$ из (1.6); при каждом фиксированном $\varrho \geqslant 0$ символ $\operatorname*{conc}_{G_j^{+}(t_*)} [\psi_j(t_*, \cdot, \varrho)](m)$ означает выпуклую сверху (вогнутую) оболочку функции $\psi_j(t_*, \cdot, \varrho) = \{\psi_j(t_*, m, \varrho),\ m \in G_j^{+}(t_*)\}$ на множестве $G_j^{+}(t_*)$, т. е. минимальную из вогнутых функций, мажорирующих $\psi_j(t_*, m, \varrho)$ при $m \in G_j^{+}(t_*)$; максимум в (3.2) вычисляется по всем таким тройкам (ν, l, m_*), что $\nu \geqslant 0$, $l \in \mathbb{R}^{d_h}$, $\sigma_h^*(l, \nu) \leqslant 1$, $m_* \in G_j^{+}(t_*)$ и при этом $\nu m_* + \Psi^{\top}(\vartheta_h, \vartheta) D_h^{\top} l = m$.

Можно проверить, что для любого $j = 1, \ldots, k{+}1$ множества $G_j^{\pm}(t_*)$ будут выпуклыми компактами в $\mathbb{R}^n$, содержащими $m = 0$, при этом $\varphi_j^{\pm}(t_*, 0, \varrho) \geqslant 0$, $\varrho \geqslant 0$. Кроме того, здесь и всюду далее полагаем, что функции $\varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)$ непрерывны по совокупности аргументов (m, ϱ), выпуклы и не возрастают по ϱ. Из результатов [17] следует, что это предположение, по крайней мере, выполнено, если единичные шары норм $\mu_i^*(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, являются строго выпуклыми, либо многогранниками, либо, в общем случае, P-множествами [18]. Заметим также, что строгую выпуклость единичных шаров норм $\mu_i^*(\cdot)$ всегда можно обеспечить при помощи подходящей аппроксимации исходного показателя качества (1.8) (см. подробности в [17]). В этом случае дальнейшие рассуждения останутся неизменными, а полученный результат будет верен с точностью до погрешности указанной аппроксимации.

Рассмотрим величины

$$e_j^{\pm}(t_*, w, \varrho) = \max_{m \in G_j^{\pm}(t_*)} \big[\langle m, \Psi(\vartheta, t_j) w\rangle + \varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)\big], \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad \varrho \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, k+1. \quad (3.3)$$

Заметим, что в силу отмеченных выше свойств функций $\varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)$, $m \in G_j^{\pm}(t_*)$, $\varrho \geqslant 0$, эти величины будут неотрицательны и непрерывны по совокупности переменных (w, ϱ).

Лемма 2. *Каковы бы ни были момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида* (1.9), (3.1)*, для любых $j = 1, \ldots, k$, $w \in \mathbb{R}^n$, $\varrho \geqslant 0$ и $h = h(t_j)$ имеем*

$$e_j^{-}(t_*, w, \varrho) = \begin{cases} e_j^{+}(t_*, w, \varrho), & \text{если } t_j < \vartheta_h, \\ \sigma_h\big(D_h(w - c_h), e_j^{+}(t_*, w, \varrho)\big), & \text{если } t_j = \vartheta_h. \end{cases} \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы повторяет обоснование аналогичного утверждения из [11].

Следующие две леммы доказываются по аналогии с теоремами 3 и 4 из [14].

Лемма 3. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta^* > 0$ такое, что, каковы бы ни были момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида* (1.9), (3.1)*, $\delta \leqslant \delta^*$, и позиция $(t_j, w_j, \varrho_j) \in K_2$, $j = 1, \ldots, k$, для всякой реализации $v_*\big[t_j(\cdot)t_{j+1}\big) \in \mathscr{V}_j$ найдется такая реализация $u_*\big[t_j(\cdot)t_{j+1}\big) \in \mathscr{U}_j(\varrho_j)$, что модель* (2.1) *из позиции (t_j, w_j, ϱ_j) под действием этих реализаций придет в такую позицию $\big(t_{j+1}, w(t_{j+1}), \varrho(t_{j+1})\big) \in K_2$, что*

$$e_j^{+}(t_*, w_j, \varrho_j) \geqslant e_{j+1}^{-}\big(t_*, w(t_{j+1}), \varrho(t_{j+1})\big) - \varepsilon(t_{j+1} - t_j).$$

Лемма 4. *Каковы бы ни были момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида* (1.9), (3.1) *и позиция $(t_j, w_j, \varrho_j) \in K_2$, $j = 1, \ldots, k$, найдется реализация $v_*^0\big[t_j(\cdot)t_{j+1}\big) \in \mathscr{V}_j$ такая, что при всякой реализации $u_*\big[t_j(\cdot)t_{j+1}\big) \in \mathscr{U}_j(\varrho_j)$ модель* (2.1) *из позиции (t_j, w_j, ϱ_j) под действием этих реализаций придет в такую позицию $\big(t_{j+1}, w(t_{j+1}), \varrho(t_{j+1})\big) \in K_2$, что*

$$e_j^{+}(t_*, w_j, \varrho_j) \leqslant e_{j+1}^{-}\big(t_*, w(t_{j+1}), \varrho(t_{j+1})\big).$$

4. Оптимальный гарантированный результат

Пусть зафиксированы момент начала процесса управления $t_* < \vartheta$, разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида (1.9), (3.1) и на базе этого разбиения построены множества $G_j^{\pm}(t_*)$, функции $\varphi_j^{\pm}(t_*, m, \varrho)$, $m \in G_j^{\pm}(t_*)$, $\varrho \geqslant 0$, после чего в согласии с (3.3) определены величины $e_j^{\pm}(t_*, w, \varrho)$, $w \in \mathbb{R}^n$, $\varrho \geqslant 0$. Опираясь на систему величин $e_j^{+}(t_*, w, \varrho)$, $j = 1, \ldots, k$, определим стратегию управления $U_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}$ так, чтобы при $t = t_j \in \Delta_\delta$ выполнялись соотношения

$$U_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}(t_j, x, \rho, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho < \eta(\varepsilon, t_j), \\ u_j^{\mathrm{e}}, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad (t_j, x, \rho) \in K_1, \ \varepsilon > 0, \quad (4.1)$$

где u_j^{e} находится из условия экстремального сдвига на сопутствующую точку (w_j, ϱ_j) [2; 14]:

$$u_j^{\mathrm{e}} = p(t_j, s_j, r_j), \quad s_j = x - w_j, \quad r_j = \rho - \varrho_j, \quad (w_j, \varrho_j) \in \mathop{\arg\min}_{\|(x,\rho)-(w,\varrho)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, t_j)} e_j^{+}(t_*, w, \varrho). \quad (4.2)$$

Здесь функции $\eta(\cdot)$ и $p(\cdot)$ определены по формулам из (2.3).

Лемма 5. *Для любого числа* $\zeta > 0$ *найдутся число* $\varepsilon^* > 0$ *и функция* $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *такие, что, каковы бы ни были значение* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *позиция* $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$, $t_* < \vartheta$, *расширенной системы* (1.1), (1.4), *разбиение* Δ_δ *вида* (1.9), (3.1), $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, *и допустимая реализация* $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ *помехи, закон* $\mathcal{U}^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_\delta}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ *управления гарантирует неравенства*

$$e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \gamma^{\pm}\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) - \zeta, \tag{4.3}$$

где в соответствии с (1.7), (1.8)

$$\gamma^+\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) = \mu_{h(t_2)}\Big(D_{h(t_2)}\big(x(\vartheta_{h(t_2)}) - c_{h(t_2)}\big), \ldots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big),$$
$$\gamma^-\big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) = \mu_{h(t_1)}\Big(D_{h(t_1)}\big(x(\vartheta_{h(t_1)}) - c_{h(t_1)}\big), \ldots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big).$$

Доказательство. Положим

$$\lambda_\Psi = \max_{t,\tau \in [t_0,\vartheta]} \|\Psi(t,\tau)\|_E, \quad \lambda_B = \max_{\tau \in [t_0,\vartheta]} \|B(\tau)\|, \quad \alpha_* = \min_{\tau \in [t_0,\vartheta]} \alpha(\tau), \quad L = \lambda_\Psi \lambda_B \alpha_*^{-1}. \tag{4.4}$$

Число $\varepsilon^* > 0$ выберем так, чтобы для любых $x_i, w_i \in \mathbb{R}^n$, $\|x_i - w_i\|_E \leqslant (1 + 2L)\eta(\varepsilon^*, \vartheta)$, $i = 1, \ldots, N$, выполнялось неравенство

$$\max_{i=1,\ldots,N} \Big|\mu_i\big(D_i(x_i - c_i), \ldots, D_N(x_N - c_N)\big) - \mu_i\big(D_i(w_i - c_i), \ldots, D_N(w_N - c_N)\big)\Big| \leqslant \frac{\zeta}{2}. \tag{4.5}$$

Здесь $\eta(\cdot)$ — функции из (2.3), $\mu_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, — нормы из показателя качества (1.8).

Определим функцию $\delta^{(0)}(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$, исходя из условия

$$\alpha(\tau)\lambda_u \delta^{(0)}(\varepsilon) \leqslant \eta(\varepsilon, t_0), \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta. \tag{4.6}$$

Опираясь на лемму 1, определим функцию $\delta^{(1)}(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$. Далее, возьмем числа ζ_i, $i = 1, \ldots, N$: $\dfrac{\zeta}{2(\vartheta - t_0)} = \zeta_1 \geqslant \zeta_2 \geqslant \ldots \geqslant \zeta_N > 0$ так, чтобы для любых $i = 1, \ldots, N-1$, $l_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ и $0 \leqslant \nu \leqslant \zeta_{i+1}(\vartheta - t_0)$ имело место неравенство

$$\sigma_i(l_i, e) \geqslant \sigma_i(l_i, e + \nu) - \zeta_i(\vartheta - \vartheta_i), \quad e \geqslant 0, \tag{4.7}$$

где $\sigma_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N-1$, — нормы из условия (1.6). Задавшись в лемме 3 числом $\varepsilon = \zeta_N$, определим число $\delta^{(3)} > 0$. Положим

$$\delta^*(\varepsilon) = \min\{\delta^{(0)}(\varepsilon),\ \delta^{(1)}(\varepsilon),\ \delta^{(3)}\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon^*]. \tag{4.8}$$

Пусть зафиксированы значение $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, позиция $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$ и разбиение $\Delta_\delta = \{t_j\}_{j=1}^{k+1}$ вида (1.9), (3.1), $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$. Рассмотрим движение $\Big(x\big[t_*[\cdot]\vartheta\big], \rho\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\Big)$ расширенной системы (1.1), (1.4), сформированное по схеме (1.10), (1.11) из позиции (t_*, x_*, ρ_*) законом $\mathcal{U}^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_\delta}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ управления в паре с некоторой допустимой реализацией $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ помехи.

Обозначим $x_j = x(t_j)$, $\rho_j = \rho(t_j)$, $j = 1, \ldots, k+1$. Через j^* обозначим минимальный индекс $j = 1, \ldots, k$, для которого $\rho_j < \eta(\varepsilon, t_j)$. Если такого индекса нет, то полагаем $j^* = k + 1$.

Для каждого $j = 1, \ldots, k$ рассмотрим движение $\Big(w_{[j]}\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big], \varrho_{[j]}\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big]\Big)$ модели (2.1), порождаемое из сопутствующей позиции $\big(t_j, w_j, \varrho_j\big) \in K_2$ реализацией $v_*^{\mathrm{e}}\big[t_j[\cdot]t^{j+1}\big)$, определяемой по лемме 1, в которой полагаем $t_* = t_j$, $t^* = t_{j+1}$, $x_* = x_j$, $\rho_* = \rho_j$, $w_* = w_j$, $\varrho_* = \varrho_j$, и реализацией $u_*\big[t_j[\cdot]t_{j+1}\big)$, найденной по $v_*^{\mathrm{e}}\big[t_j[\cdot]t^{j+1}\big)$ в согласии с леммой 3. Сопутствующая позиция $\big(t_j, w_j, \varrho_j\big)$ каждый раз назначается по следующему правилу: если $1 \leqslant j \leqslant j^* - 1$, пара (w_j, ϱ_j) определяется из соотношений (4.2); если же $j^* \leqslant j \leqslant k$, то $(w_j, \varrho_j) = \big(w_{[j-1]}(t_j), \varrho_{[j-1]}(t_j)\big)$.

При этом для $j = j^*, \dots, k$ полагаем, что $w_{[j]}(t) = w^{(1)}_{[j]}(t) + w^{(2)}_{[j]}(t)$, где изменение переменных $w^{(1)}_{[j]}(t)$ и $w^{(2)}_{[j]}(t)$, $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, описывается уравнениями вида (2.2) при условиях

$$\begin{gathered} w^{(1)}_{[j^*]}(t_{j^*}) = 0,\ w^{(2)}_{[j^*]}(t_{j^*}) = w_{j^*}, \\ w^{(1)}_{[j]}(t_j) = w^{(1)}_{[j-1]}(t_j), \quad w^{(2)}_{[j]}(t_j) = w^{(2)}_{[j-1]}(t_j), \quad j = j^*+1, \dots, k. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Кроме того, в случае $j^* = 1$ полагаем $w_1 = x_1 = x_*$, $\varrho_1 = \rho_1 = \rho_*$.

Покажем, что для всех $j = 1, \dots, k$ справедливо неравенство

$$\|x(t_{j+1}) - w_{[j]}(t_{j+1})\|_E \leqslant (1 + 2L)\eta(\varepsilon, \vartheta). \tag{4.10}$$

Для $j < j^*$ это неравенство вытекает из первого утверждения леммы 1, если учесть включение из (4.2), определяющее в этом случае сопутствующую позицию (t_j, w_j, ϱ_j), и условие (4.6) на выбор (4.8) функции $\delta^*(\varepsilon)$, обеспечивающее здесь неравенство $\rho(t_j) \geqslant \int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau)\|u^{\mathrm{e}}_j\|_u d\tau$.

Пусть $j \geqslant j^*$. Тогда в согласии с построениями выше и леммой 1 имеем

$$\|x(t_{j+1}) - w_{[j]}(t_{j+1})\|_E \leqslant \|x(t_{j+1}) - w^{(2)}_{[j]}(t_{j+1})\|_E + \|w^{(1)}_{[j]}(t_{j+1})\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, \vartheta) + \|w^{(1)}_{[j]}(t_{j+1})\|_E. \tag{4.11}$$

Далее, учитывая соотношения (2.2), (4.4) и (4.9), выводим

$$\|w^{(1)}_{[j]}(t_{j+1})\|_E \leqslant \int\limits_{t_{j^*}}^{t_{j+1}} \|\Psi(t_{j+1}, \tau)B(\tau)u_*(\tau)\|_E d\tau \leqslant L \int\limits_{t_{j^*}}^{\vartheta} \alpha(\tau)\|u_*(\tau)\|_u d\tau \leqslant L\varrho_{j^*} \leqslant 2L\eta(\varepsilon, \vartheta). \tag{4.12}$$

Из оценок (4.11) и (4.12) заключаем, что неравенство (4.10) справедливо и для $j \geqslant j_*$.

Через $J(i)$, $i = h(t_1), \dots, N$, обозначим такое $j = 1, \dots, k+1$, что $t_j = \vartheta_i$. Положим

$$l^{(x)}_i = D_i\big(x(\vartheta_i) - c_i\big), \quad l^{(w)}_i = D_i\big(w_{[J(i)-1]}(\vartheta_i) - c_i\big).$$

Покажем, что для всех $j = 1, \dots, k$ справедливо неравенство

$$e^+_j(t_*, w_j, \varrho_j) \geqslant \mu_h\big(l^{(w)}_h, \dots, l^{(w)}_N\big) - \zeta_h(\vartheta - t_j), \quad h = h(t_{j+1}). \tag{4.13}$$

Будем рассуждать по индукции по убывающему индексу j. В силу леммы 3 имеем

$$e^-_{j+1}\big(t_*, w_{[j]}(t_{j+1}), \varrho_{[j]}(t_{j+1})\big) - e^+_j(t_*, w_j, \varrho_j) \leqslant \zeta_h(t_{j+1} - t_j), \quad h = h(t_{j+1}), \quad j = 1, \dots, k. \tag{4.14}$$

При $j = k$, пользуясь неравенством (4.14) и определением (3.3) величины $e^-_{k+1}(\cdot)$, выводим

$$e^+_k(t_*, w_k, \varrho_k) \geqslant e^-_{k+1}\big(t_*, w_{[k]}(\vartheta), \varrho_{[k]}(\vartheta)\big) - \zeta_N(\vartheta - t_k) = \mu_N\big(l^{(w)}_N\big) - \zeta_N(\vartheta - t_k).$$

Далее предположим, что неравенство (4.13) выполняется при $j = s+1$, $s = 1, \dots, k-1$, и докажем, что тогда оно справедливо для $j = s$.

В согласии с леммой 1 и определением сопутствующих позиций $\big(t_j, w_j, \varrho_j\big)$ имеем

$$e^+_{j+1}\big(t_*, w_{[j]}(t_{j+1}), \varrho_{[j]}(t_{j+1})\big) \geqslant e^+_{j+1}(t_*, w_{j+1}, \varrho_{j+1}), \quad j = 1, \dots, k. \tag{4.15}$$

В случае $t_{s+1} \neq \vartheta_h$, $h = h(t_{s+1})$, учитывая сначала неравенство (4.14), затем равенство (3.4) и неравенство (4.15), в силу неравенства (4.13) для $j = s+1$ и справедливого в этом случае равенства $h(t_{s+1}) = h(t_{s+2}) = h$ получаем

$$\begin{gathered} e^+_s(t_*, w_s, \varrho_s) \geqslant e^-_{s+1}\big(t_*, w_{[s]}(t_{s+1}), \varrho_{[s]}(t_{s+1})\big) - \zeta_h(t_{s+1} - t_s) \\ \geqslant e^+_{s+1}(t_*, w_{s+1}, \varrho_{s+1}) - \zeta_h(t_{s+1} - t_s) \geqslant \mu_h\big(l^{(w)}_h, \dots, l^{(w)}_N\big) - \zeta_h(\vartheta - t_s). \end{gathered}$$

Иначе, если $t_{s+1} = \vartheta_h$, имеем $h(t_{s+2}) - 1 = h(t_{s+1}) = h$, $J(h) = s+1$. Тогда, вновь используя сначала (4.14), а затем (3.4) и (4.15), учитывая далее монотонность нормы $\sigma_h(\cdot)$ по второму аргументу и неравенство (4.7), в согласии с (4.13) при $j = s+1$ и (1.6) заключаем

$$\begin{aligned} e_s^+(t_*, w_s, \varrho_s) &\geqslant e_{s+1}^-\bigl(t_*, w_{[s]}(t_{s+1}), \varrho_{[s]}(t_{s+1})\bigr) - \zeta_h(t_{s+1} - t_s) \\ &\geqslant \sigma_h\bigl(l_h^{(w)}, e_{s+1}^+(t_*, w_{s+1}, \varrho_{s+1})\bigr) - \zeta_h(t_{s+1} - t_s) \\ &\geqslant \sigma_h\bigl(l_h^{(w)}, e_{s+1}^+(t_*, w_{s+1}, \varrho_{s+1}) + \zeta_{h+1}(\vartheta - t_{s+1})\bigr) - \zeta_h(\vartheta - t_s) \\ \geqslant \sigma_h\Bigl(l_h^{(w)}, \mu_{h+1}\bigl(l_{h+1}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\bigr)\Bigr) - \zeta_h(\vartheta - t_s) &\geqslant \mu_h\bigl(l_h^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\bigr) - \zeta_h(\vartheta - t_s). \end{aligned}$$

Итак, неравенство (4.13) доказано. Из него при $j = 1$, принимая во внимание определение сопутствующей позиции $\bigl(t_1, w_1, \varrho_1\bigr)$, выводим неравенство

$$e_1^+(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant e_1^+(t_*, w_1, \varrho_1) \geqslant \mu_{h(t_2)}\bigl(l_{h(t_2)}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\bigr) - \zeta_{h(t_2)}(\vartheta - t_1). \tag{4.16}$$

Доказываемое неравенство (4.3) для $e_1^+(t_*, x_*, \rho_*)$ вытекает из (4.16), если учесть условие (4.5) выбора числа $\varepsilon^* > 0$ вместе с оценкой (4.10) и неравенство $\zeta_{h(t_2)}(\vartheta - t_0) \leqslant \zeta/2$.

Для доказательства неравенства (4.3) относительно $e_1^-(t_*, x_*, \rho_*)$ рассмотрим два случая: $t_1 \neq \vartheta_{h(t_1)}$ и $t_1 = \vartheta_{h(t_1)}$. Если $t_1 \neq \vartheta_{h(t_1)}$, то $h(t_1) = h(t_2)$ и из соотношений (3.4), (4.16), учитывая условие (4.5) с оценкой (4.10) и неравенство $\zeta_{h(t_1)}(\vartheta - t_0) \leqslant \zeta/2$, получаем

$$e_1^-(t_*, x_*, \rho_*) = e_1^+(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \mu_{h(t_1)}\bigl(l_{h(t_1)}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\bigr) - \zeta_{h(t_1)}(\vartheta - t_1) \geqslant \mu_{h(t_1)}\bigl(l_{h(t_1)}^{(x)}, \ldots, l_N^{(x)}\bigr) - \zeta.$$

Если же $t_1 = \vartheta_{h(t_1)}$, то $h(t_1) = h(t_2) - 1$, $J\bigl(h(t_1)\bigr) = 1$ и имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} e_1^-(t_*, x_*, \rho_*) &= \sigma_{h(t_1)}\bigl(l_{h(t_1)}^{(x)}, e_1^+(t_*, x_*, \rho_*)\bigr) \\ &\geqslant \sigma_{h(t_1)}\bigl(l_{h(t_1)}^{(x)}, e_1^+(t_*, x_*, \rho_*) + \zeta_{h(t_2)}(\vartheta - t_1)\bigr) - \zeta_{h(t_1)}(\vartheta - t_1) \\ &\geqslant \sigma_{h(t_1)}\Bigl(l_{h(t_1)}^{(x)}, \mu_{h(t_2)}\bigl(l_{h(t_2)}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\bigr)\Bigr) - \frac{\zeta}{2} \\ \geqslant \mu_{h(t_1)}\Bigl(l_{h(t_1)}^{(x)}, l_{h(t_2)}^{(w)}, \ldots, l_N^{(w)}\Bigr) - \frac{\zeta}{2} &\geqslant \mu_{h(t_1)}\Bigl(l_{h(t_1)}^{(x)}, l_{h(t_2)}^{(x)}, \ldots, l_N^{(x)}\Bigr) - \zeta. \end{aligned}$$

Здесь последовательно учтены равенство (3.4), условие (4.7) выбора величин ζ_i, $i = 1, \ldots, N$, неравенство (4.16) вместе с монотонностью нормы $\sigma_{h(t_1)}(\cdot)$ по второму аргументу, а также соотношение (1.6), условие (4.5) выбора числа $\varepsilon^* > 0$ и оценка (4.10). □

Наряду со стратегией $U_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}$ управления (4.1) рассмотрим стратегию $V_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}$ помехи, определяемую так, чтобы в точках t_j, $j = 1, \ldots, k$, разбиения Δ_δ выполнялись соотношения

$$V_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}(t_j, x, \rho, \varepsilon) = q(t_j, w_j - x), \quad (w_j, \varrho_j) \in \operatorname*{arg\,max}_{\|(x,\rho)-(w,\varrho)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon, t_j)} e_j^+(t_*, w, \varrho), \quad (t_j, x, \rho) \in K_1, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.17}$$

где функции $\eta(\cdot)$ и $q(\cdot)$ определены согласно (2.3). Тогда по аналогии с леммой 5, опираясь на лемму 4 вместо леммы 3 и меняя в лемме 1 местами исходную расширенную систему (1.1), (1.4) и модель (2.1), можно доказать следующее утверждение.

Лемма 6. *Для любого числа $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon^* > 0$ и функция $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, такие, что, каковы бы ни были значение $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, позиция $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$, $t_* < \vartheta$, расширенной системы* (1.1), (1.4), *разбиение Δ_δ вида* (1.9), (3.1), *$\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, и допустимая реализация $u\bigl[t_*[\cdot]\vartheta\bigr)$ управления, закон $\mathcal{V}^{\mathrm{e}} = (V_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ помехи гарантирует неравенства*

$$e_1^\pm(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \gamma^\pm\bigl(x\bigl[t_*[\cdot]\vartheta\bigr]\bigr) + \zeta.$$

Ниже, чтобы подчеркнуть, что величины $e_j^{\pm}(t_*, w, \varrho)$ из (3.3) построены на базе разбиения Δ_δ, используем обозначение $e_j^{\pm}(t_*, w, \varrho; \Delta_\delta)$.

Лемма 7. *Для любого числа $\xi > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что, каковы бы ни были позиция $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$ и разбиения Δ_{δ_1}, Δ_{δ_2} вида* (1.9), (3.1), *$\delta_1, \delta_2 \leqslant \delta$, имеем*

$$|e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_1}) - e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_2})| \leqslant \xi.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $t_* < \vartheta$. Пользуясь леммами 5 и 6, по числу $\zeta = \xi/2$ определим числа $\varepsilon^{*(5)}$, $\varepsilon^{*(6)}$ и функции $\delta^{*(5)}(\cdot)$, $\delta^{*(5)}(\cdot)$. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon^{*(5)}, \varepsilon^{*(6)}\}$, $\delta = \min\{\delta^{*(5)}(\varepsilon), \delta^{*(6)}(\varepsilon)\}$. Зафиксируем позицию $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$, значения $\delta_1, \delta_2 < \delta$ и разбиения Δ_{δ_1}, Δ_{δ_2}. Рассмотрим движение $x^{(1)}\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$ расширенной системы (1.1), (1.4), порожденное из позиции (t_*, x_*, ρ_*) законом $\mathcal{U}_1^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_{\delta_1}}, \varepsilon, \Delta_{\delta_1})$ из леммы 5 в паре с законом $\mathcal{V}_1^{\mathrm{e}} = (V^{\mathrm{e}}_{\Delta_{\delta_2}}, \varepsilon, \Delta_{\delta_2})$ из леммы 6. Имеем

$$e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_2}) - \frac{\xi}{2} \leqslant \gamma^{\pm}\big(x^{(1)}\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]\big) \leqslant e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_1}) + \frac{\xi}{2}.$$

С другой стороны, рассматривая движение $x^{(2)}\big[t_*[\cdot]\vartheta\big]$, порожденное из позиции (t_*, x_*, ρ_*) законами $\mathcal{U}_2^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_{\delta_2}}, \varepsilon, \Delta_{\delta_2})$ и $\mathcal{V}_2^{\mathrm{e}} = (V^{\mathrm{e}}_{\Delta_{\delta_1}}, \varepsilon, \Delta_{\delta_1})$, получаем

$$e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_1}) - \frac{\xi}{2} \leqslant e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_2}) + \frac{\xi}{2}. \qquad \square$$

Пусть $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$. Рассмотрим последовательность разбиений Δ_{δ_k}, $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Из леммы 7 вытекает, что последовательности чисел $e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_k})$, $k = 1, 2, \ldots$, сходятся:

$$\mathrm{e}^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*) = \lim_{k\to\infty} e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_{\delta_k}), \tag{4.18}$$

причем указанные пределы являются равномерными по $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$ и не зависят от выбора последовательности разбиений Δ_{δ_k}. Таким образом, имеет место

Лемма 8. *Для любого числа $\xi > 0$ существует число $\delta^* > 0$ такое, что, каковы бы ни были позиция $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$ и разбиение Δ_δ вида* (1.9), (3.1), *$\delta \leqslant \delta^*$, имеем*

$$|\mathrm{e}^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*) - e_1^{\pm}(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_\delta)| \leqslant \xi.$$

Предельные величины (4.18) в определенном смысле наследуют свойства системы величин (3.3). Прежде всего, полагая в равенстве (3.4) $j = 1$ и переходя к пределу по измельчающимся разбиениям Δ_δ, получаем, что величины (4.18) связаны аналогичным соотношением. Далее, в силу лемм 3 и 4 приходим к следующим утверждениям.

Лемма 9. *Пусть $\varepsilon > 0$, $(t_*, w_*, \varrho_*) \in K_1$, $t_* < \vartheta$ и $t^* \in (t_*, \vartheta]$. Пусть интервал (t_*, t^*) не содержит моментов ϑ_i оценки качества движения из показателя* (1.8). *Тогда для всякой реализации $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{V}(t_*, t^*)$ найдется такая реализация $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$, что модель* (2.1) *под действием этих реализаций перейдет из позиции (t_*, w_*, ϱ_*) в такую позицию $\big(t^*, w^* = w(t^*), \varrho^* = \varrho(t^*)\big) \in K_1$, для которой будет выполнено неравенство*

$$\mathrm{e}^{+}(t_*, w_*, \varrho_*) \geqslant \mathrm{e}^{-}(t^*, w^*, \varrho^*) - \varepsilon(t^* - t_*). \tag{4.19}$$

Доказательство. Из леммы 3 по числу ε найдем число δ^*. Рассмотрим произвольную последовательность чисел $\xi_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ по числу ξ_k, применяя лемму 8, найдем число δ_k^*. Пусть Δ_{δ_k} — разбиение отрезка $[t_*, \vartheta]$ вида (1.9), (3.1), где $\delta_k = \min\{\delta_k^*, \delta^*\}$. Пусть это разбиение содержит момент времени t^*. Индекс этого момента в разбиении Δ_{δ_k} обозначим $j(k)$, т. е. $t_{j(k)} = t^*$. Пусть $\Delta^*_{\delta_k} = \{t^*_s = t_{s+j(k)-1}\}_{s=1}^{k-j(k)+2}$ — разбиение отрезка $[t^*, \vartheta]$, порожденное точками разбиения Δ_{δ_k}. Тогда в согласии с леммой 8 имеем

$$|\mathrm{e}^+(t_*, w_*, \varrho_*) - e_1^+(t_*, w_*, \varrho_*; \Delta_{\delta_k})| \leqslant \xi_k, \quad |\mathrm{e}^-(t^*, w, \varrho) - e_1^-(t^*, w, \varrho; \Delta^*_{\delta_k})| \leqslant \xi_k, \quad (t^*, w, \varrho) \in K_1.$$

Кроме того, так как интервал (t_*, t^*) не содержит моментов ϑ_i оценки качества движения, в силу лемм 2 и 3 для реализации $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{V}(t_*, t^*)$ при каждом k найдется такая реализация $u_*^{(k)}\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$, которая будет обеспечивать неравенство

$$e^-_{j(k)}(t_*, w^*_k, \varrho^*_k; \Delta_{\delta_k}) - e_1^+(t_*, w_*, \varrho_*; \Delta_{\delta_k}) = e_1^-(t^*, w^*_k, \varrho^*_k; \Delta^*_{\delta_k}) - e_1^+(t_*, w_*, \varrho_*; \Delta_{\delta_k}) \leqslant \varepsilon(t^* - t_*).$$

Рассмотрим множество $W = W(t^*, t_*, w_*, \varrho_*)$ — область достижимости в пространстве переменных (w, ϱ) к моменту t^* для движений модели (2.1), порожденных из позиции (t_*, w_*, ϱ_*) какой угодно реализацией из $\mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ в паре с реализацией $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big)$. Множество W компактно (см., например, [19, с. 349]). Поэтому, переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $(w^*_k, \varrho^*_k) \in W$ сходится к $(w^*, \varrho^*) \in W$ при $k \to \infty$. Пусть $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big] \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ — та реализация, которая вместе с $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big]$ из позиции (t_*, w_*, ϱ_*) приводит модель (2.1) в позицию (t^*, w^*, ϱ^*). Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^+(t_*, w_*, \varrho_*) \geqslant e_1^+(t_*, w_*, \varrho_*; \Delta_{\delta_k}) - \xi_k \geqslant e_1^-(t^*, w^*_k, \varrho^*_k; \Delta^*_{\delta_k}) - \varepsilon(t^* - t_*) - \xi_k \\ \geqslant \mathrm{e}^-(t^*, w^*_k, \varrho^*_k) - \varepsilon(t^* - t_*) - 2\xi_k.\end{aligned}$$

В силу леммы 8 и непрерывности каждой из величин $e_1^-(t^*, w, \varrho; \Delta^*_{\delta_k})$ по совокупности переменных (w, ϱ) предельная величина $\mathrm{e}^-(t^*, w, \varrho)$ также непрерывна по (w, ϱ). Следовательно, переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получаем доказываемое неравенство (4.19). $\square$

Аналогично доказывается

Лемма 10. *Пусть* $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_1$, $t_* < \vartheta$ *и* $t^* \in (t_*, \vartheta]$. *Пусть интервал* (t_*, t^*) *не содержит моментов* ϑ_i *оценки качества движения из показателя* (1.8). *Тогда для всякой реализации* $u_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{U}(t_*, t^*, \varrho_*)$ *найдется такая реализация* $v_*\big[t_*[\cdot]t^*\big) \in \mathscr{V}(t_*, t^*)$, *что модель* (2.1) *под действием этих реализаций перейдет из позиции* (t_*, w_*, ϱ_*) *в такую позицию* $\big(t^*, w^* = w(t^*), \varrho^* = \varrho(t^*)\big) \in K_1$, *для которой будет выполнено неравенство*

$$\mathrm{e}^+(t_*, w_*, \varrho_*) \leqslant \mathrm{e}^-(t^*, w^*, \varrho^*).$$

Опираясь на предельную величину $\mathrm{e}^+(t_*, w, \varrho)$, определим стратегии U_0^{e} и V_0^{e} для управления и помехи соответственно, исходя из следующих соотношений:

$$U_0^{\mathrm{e}}(t, x, \rho, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho < \eta(\varepsilon, t), \\ p(t, s_u, r_u), & \text{иначе,} \end{cases} \quad V_0^{\mathrm{e}}(t, x, \rho, \varepsilon) = q(t, s_v), \quad (t, x, \rho) \in K_0, \quad \varepsilon > 0,$$

где

$$\begin{aligned} s_u = x - w_u,\ r_u = \rho - \varrho_u, \quad (w_u, \varrho_u) \in \underset{\|(x,\rho)-(w,\varrho)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon,t)}{\arg\min} \mathrm{e}^+(t, w, \varrho), \\ s_v = w_v - x, \quad (w_v, \varrho_v) \in \underset{\|(x,\rho)-(w,\varrho)\|_E \leqslant \eta(\varepsilon,t)}{\arg\max} \mathrm{e}^+(t, w, \varrho). \end{aligned}$$

Здесь функции $\eta(\cdot)$, $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ определены в согласии с (2.3).

Следующие два утверждения доказываются аналогично леммам 5 и 6 с опорой на леммы 9 и 10 вместо лемм 3 и 4.

Лемма 11. *Для любого числа* $\zeta > 0$ *найдутся такие число* $\varepsilon^* > 0$ *и функция* $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *что, каковы бы ни были значение* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *позиция* $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$, $t_* < \vartheta$, *расширенной системы* (1.1), (1.4), *разбиение* Δ_δ *вида* (1.9), (3.1), $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, *и допустимая реализация* $v\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ *помехи, закон* $\mathcal{U}_0^{\mathrm{e}} = (U_0^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ *управления гарантирует неравенство*

$$\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \gamma\big(x[t_*[\cdot]\vartheta]\big) - \zeta.$$

Лемма 12. *Для любого числа* $\zeta > 0$ *найдутся такие число* $\varepsilon^* > 0$ *и функция* $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *что, каковы бы ни были значение* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, *позиция* $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$ *расширенной системы* (1.1), (1.4), *разбиение* Δ_δ *вида* (1.9), (3.1), $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, *и допустимая реализация* $u\big[t_*[\cdot]\vartheta\big)$ *управления, закон* $\mathcal{V}_0^{\mathrm{e}} = (V_0^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ *формирования помехи гарантирует неравенство*

$$\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \gamma\big(x[t_*[\cdot]\vartheta]\big) + \zeta.$$

Леммы 11 и 12 позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема. *В рассматриваемой задаче управления* (1.1)–(1.8) *имеют место равенства*

$$\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) = \Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*) = \Gamma_v(t_*, x_*, \rho_*), \quad (t_*, x_*, \rho_*) \in K_0.$$

Стратегии U_0^{e} *и* V_0^{e} *являются оптимальными.*

Доказательство. В силу леммы 11 по определению (1.12) величины гарантированного результата для стратегии U_0^{e} имеем $\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \geqslant \Gamma(U_0^{\mathrm{e}}; t_*, x_*, \rho_*)$. В силу леммы 12 по определению (1.14) величины гарантированного результата для стратегии V_0^{e} получаем $\mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma(V_0^{\mathrm{e}}; t_*, x_*, \rho_*)$. Учитывая эти неравенства и определения (1.13) и (1.15) оптимальных гарантированных результатов, выводим цепочку неравенств:

$$\Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma(U_0^{\mathrm{e}}; t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \mathrm{e}^-(t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma(V_0^{\mathrm{e}}; t_*, x_*, \rho_*) \leqslant \Gamma_v(t_*, x_*, \rho_*),$$

которая, если принять во внимание неравенство (1.16), обращается в цепочку равенств. □

Из теоремы и леммы 8 заключаем, что величина $e_1^-(t_*, x_*, \rho_*; \Delta_\delta)$ из системы величин (3.3) с измельчением разбиения Δ_δ приближает величину $\Gamma_u(t_*, x_*, \rho_*)$ оптимального гарантированного результата управления, причем равномерно относительно $(t_*, x_*, \rho_*) \in K_0$. Кроме того, по лемме 5 закон $\mathcal{U}^{\mathrm{e}} = (U_{\Delta_\delta}^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ управления, построенный по этой системе величин в согласии с соотношениями (4.1) и (4.2), будет ζ-оптимальным.

5. Пример

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + c(t)v(t),\ \dot{x}_2(t) = -0.5x_1(t) - 0.05x_2(t) + b(t)u(t), \quad 0 \leqslant t < 2$$

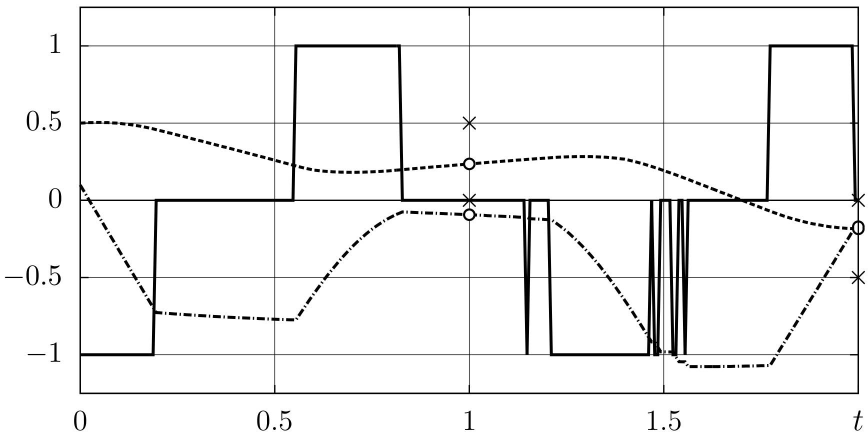
$$x_1(0) = 0.5,\ x_2(0) = 0.1, \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad \int_0^2 |u(t)|dt \leqslant 1, \quad |v(t)| \leqslant 1, \tag{5.1}$$

$$b(t) = \begin{cases} 2 + 2\cos 2\pi(t - 0.5), & \text{если } t \in [0.5, 1.5], \\ 4 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad c(t) = \begin{cases} 0.3, & \text{если } t \in [0.6, 1.4], \\ 0.1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть качество движения этой системы оценивается показателем

$$\gamma = \sqrt{|x_1(1)|^2 + |x_2(1) - 0.5|^2 + |x_1(2) + 0.5|^2 + |x_2(2)|^2}. \tag{5.2}$$

Задача (5.1), (5.2) решалась при помощи программной реализации описанных выше конструкций. Детали схожей реализации приведены, например, в [20]. Использовались равномерное разбиение Δ_δ отрезка времени управления $[0, 2]$ с диаметром $\delta = 0.01$ и значение $\varepsilon = 0.05$.



Реализации движения ($x_1(t)$ — пунктирная линия, $x_2(t)$ — штрихпунктирная линия) и управления ($u(t)$ — жирная линия) в случае совместного действия законов $\mathcal{U}^{\mathrm{e}}$ и $\mathcal{V}^{\mathrm{e}}$. Целевые точки обозначены крестиками. Кругляшками отмечены положения системы в моменты времени оценки движения.

Априорно посчитанное значение $e_1^- = e_1^-\big(0,(0.5,0.1),1\big)$, приближающее оптимальный гарантированный результат управления, составило 0.702.

В случае совместного действия закона $\mathcal{U}^{\mathrm{e}} = (U^{\mathrm{e}}_{\Delta_\delta}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ управления, построенного в согласии с соотношениями (4.1), (4.2), и закона $\mathcal{V}^{\mathrm{e}} = (V^{\mathrm{e}}_{\Delta_\delta}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ формирования помехи, определенного согласно (4.17), реализовалось следующее значение показателя качества (5.2):

$$\gamma = \sqrt{|0.235|^2 + |-0.093-0.5|^2 + |-0.184+0.5|^2 + |-0.170|^2} \approx 0.731 \approx e_1^- = 0.702.$$

Соответствующие реализации движения и управления изображены на рисунке.

В случае “жадного” закона управления, осуществляющего экстремальный сдвиг на очередную цель, пока есть ресурс, в паре с законом $\mathcal{V}^{\mathrm{e}}$ реализовалось значение

$$\gamma = \sqrt{|1.153|^2 + |-0.446-0.5|^2 + |1.440+0.5|^2 + |-0.248|^2} \approx 2.459 > e_1^- = 0.702.$$

В случае, когда воздействия помехи формировалась случайным образом, закон $\mathcal{U}^{\mathrm{e}}$ управления дал следующий результат:

$$\gamma = \sqrt{|0.055|^2 + |-0.025-0.5|^2 + |-0.445+0.5|^2 + |-0.110|^2} \approx 0.542 < e_1^- = 0.702.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М: Наука, 1985. 520 с.
3. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 587–599.
5. **Никольский М.С.** Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 6. С. 964–971.
6. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
7. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, №1. С. 24–27.

8. **Красовский А.Н.** Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 186–192.
9. **Красовский Н.Н., Решетова Т.Н.** О программном синтезе гарантированного управления // Проблемы управления и теория информации. 1988. Т. 17, № 6. С. 333–343.
10. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 885–900.
11. **Лукоянов Н.Ю.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 188–198.
12. **Лукоянов Н.Ю.** О построении цены позиционной дифференциальной игры // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 18–26.
13. **Локшин М.Д.** О дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1952–1961.
14. **Лукоянов Н.Ю.** О задаче конфликтного управления при смешанных ограничениях на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1473–1482.
15. **Лукоянов Н.Ю.** К задаче конфликтного управления при смешанных ограничениях // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 6. С. 955–964.
16. **Корнев Д.В.** Об оптимизации гарантии при интегральных ограничениях на управляющие воздействия и нетерминальном показателе качества [Электрон. ресурс] // XII Всерос. совещание по проблемам управления — ВСПУ-2014 (Москва, 16–19 июня, 2014 г.): сб. докл. С. 2059–2070.
17. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Об устойчивости одной процедуры решения задачи управления на минимакс позиционного функционала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 68–82.
18. **Балашов М.В.** О P-свойстве выпуклых компактов // Мат. заметки. 2002. Т. 71, вып. 3. С. 323–333.
19. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
20. **Корнев Д.В.** О численном решении позиционных дифференциальных игр с нетерминальной платой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 11. С. 60–75.

Корнев Дмитрий Васильевич
гл. программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: d.v.kornev@gmail.com

Поступила 01.02.2015

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: nyul@imm.uran.ru