ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977.5

ПОЗИЦИОННЫЕ УСИЛЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ[1]

В. А. Дыхта

Получены нелокальные необходимые условия оптимальности, эффективно усиливающие классический принцип максимума Понтрягина, его модифицированную версию Кашкоч — Лоясиевича, а также позиционный принцип минимума, сформулированный ранее автором. Усиление позиционного принципа минимума (а значит, и понтрягинского) достигается путем использования двух типов позиционных управлений, совместимых с исследуемой траекторией, т. е. генерирующих ее в качестве решения типа Каратеодори. В каждом из вариантов усиленный позиционный принцип минимума утверждает, что для оптимальности исследуемого процесса необходимо, чтобы его траектория была оптимальной в некотором семействе вариационных задач, порожденных котраекториями исходного и совместимых управлений.

С использованием основной конструкции позиционного принципа минимума — возмущения решения сопряженной системы — доказана точная формула приращения функционала; из нее получены варианты достаточных условий сильного и глобального минимума для экстремалей Понтрягина. Эти условия гораздо мягче известных аналогов, требующих выпуклости функционала и нижнего гамильтониана задачи по фазовой переменной.

Все рассмотрения относятся к нелинейной, гладкой задаче Майера со свободным правым концом траекторий, утверждения иллюстрированы примерами.

Ключевые слова: принцип максимума, экстремаль, котраектория, необходимые и достаточные условия, позиционные управления.

V. A. Dykhta. Positional strengthenings of the maximum principle and sufficient optimality conditions.

We derive nonlocal necessary optimality conditions, which efficiently strengthen the classical Pontryagin maximum principle and its modification obtained by B. Kaśkosz and S. Łojasiewicz as well as our previous result of a similar kind named the “feedback minimum principle.” The strengthening of the feedback minimum principle (and, hence, of the Pontryagin principle) is owing to the employment of two types of feedback controls “compatible” with a reference trajectory (i.e., producing this trajectory as a Carathéodory solution). In each of the versions, the strengthened feedback minimum principle states that the optimality of a reference process implies the optimality of its trajectory in a certain family of variational problems generated by adjoint trajectories of the original and compatible controls.

The basic construction of the feedback minimum principle — a perturbation of a solution to the adjoint system — is employed to prove an exact formula for the increment of the cost functional. We use this formula to obtain sufficient conditions for the strong and global minimum of Pontryagin’s extremals. These conditions are much milder than their known analogs, which require the convexity in the state variable of the functional and of the lower Hamiltonian.

Our study is focused on a nonlinear smooth Mayer problem with free terminal states. All assertions are illustrated by examples.

Keywords: maximum principle, extremal, adjoint trajectory, necessary and sufficient conditions, feedback controls.

Введение

В работе получены необходимые и достаточные условия оптимальности для следующей задачи терминального управления (задачи (P)):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{0.1}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00699), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект 17.1).

$$J[x,u] = l(x(t_1)) \to \min.$$

Задача (P) рассматривается на множестве Σ допустимых пар функций $(x(\cdot), u(\cdot))$ с липшицевыми траекториями $x(\cdot)$ и измеримыми ограниченными управлениями $u(\cdot)$, удовлетворяющих почти всюду на фиксированном отрезке времени T управляемой системе (0.1), (0.2). Далее используются краткие обозначения $\sigma := (x,u) \in \Sigma$, $\mathcal{U} := L_\infty(T,U)$; все соотношения, содержащие измеримые (по Лебегу) функции времени, считаются выполненными почти всюду по $t \in T$, через $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u})$ обозначается допустимая пара функций, исследуемая на оптимальность.

Задача (P) будет исследоваться при следующих основных предположениях:

$(H1)$ множество $U \in \mathbb{R}^m$ компактно;

$(H2)$ вектор-функция $f(t,x,u)$ непрерывна вместе с производной $f_x(t,x,u)$ на $T \times \mathbb{R}^n \times U$;

$(H3)$ выполняется условие сублинейного роста

$$|f(t,x,u)| \le c(1+|x|) \quad \text{на} \quad T \times \mathbb{R}^n \times U \quad (c > 0);$$

$(H4)$ функция $l(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n$.

Предположения $(H1)$–$(H3)$ обеспечивают относительную компактность в $C(T,\mathbb{R}^n)$ множества всех траекторий управляемой системы и применимость классического принципа максимума Понтрягина [1] (далее ПМ).

Основной целью работы является усиление позиционного принципа минимума для гладкой задачи (P) — необходимого условия оптимальности с позиционными управлениями потенциального спуска по функционалу, усиливающего (в свою очередь) ПМ.

Этот результат доказан в [2] (см. также [3; 4]) при дополнительном предположении $l(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ с использованием идеи Н. Н. Красовского [5] об оценке сверху качества синтеза с помощью решений неравенства Гамильтона — Якоби для u-стабильных (иначе — слабо убывающих) функций; привлечены были и более поздние работы [6–9], связанные с развитием этой идеи.

В данной статье усиленные варианты позиционного ПМ (теоремы 1, 2) доказываются элементарным, прямым способом, без какой-либо апеляции к неравенству Гамильтона — Якоби и без предположения $l(x) \in C^2$. Конечно, когда доказываемый базовый результат известен, становятся возможными "прямые" доказательства, скрывающие его происхождение.

Опишем теперь, как получаются усиления позиционного, а следовательно, и классического ПМ.

Давно замечено (см., например, [10]), что в оптимальном управлении одна и та же траектория может генерироваться различными управлениями — как программными, так и позиционными. Назовем такие управления *совместимыми* с данной траекторией, а в интересующем нас случае — с $\overline{x}$. Если пара $(\overline{x}, \overline{u})$ оптимальна, то и каждое совместимое управление в паре с $\overline{x}$ тоже обладает этим свойством; поэтому оно должно удовлетворять как классическому, так и позиционному ПМ со своей котраекторией $\psi(t)$, вообще говоря, отличной от котраектории $\overline{\psi}(t)$ пары $\overline{\sigma}$. Тем самым образуется некоторое множество $\Psi(\overline{x})$ таких котраекторий, с каждой из которых должно выполняться экстремальное условие позиционного ПМ — траектория $\overline{x}$ должна быть оптимальной в так называемой ψ-присоединенной вариационной задаче. Этот довольно естественный путь "размножения" котраекторий приводит к теореме 1. Отметим, что в описанной ситуации на паре $\overline{\sigma}$ не может достигаться строгий сильный минимум; это ведет к определенным затруднениям в достаточных условиях оптимальности.

В разд. 2 рассмотрено другое усиление позиционного ПМ, связанное с серией работ [11–16] по так называемому принципу максимума Кашкоч — Лоясиевича. Здесь также используются совместимые с $\overline{x}$ позиционные управления, но другого типа — измеримо-липшицевые; они названы нами L-совместимыми. Их уже не может быть "много" в силу ограничения по аналитическим свойствам, но зато каждое L-совместимое управление дает "размножение" котраекторий как решений сопряженного дифференциального включения Кларка [17]. Вариационное использование таких котраекторий по образцу позиционного ПМ приводит к теореме 2, усиливающей необходимые условия из [11–16] для рассматриваемой задачи (P) даже при ослаблении предположения гладкости функции f по x до локального условия Липшица. (В цитируемых статьях исследовались и негладкие задачи с терминальными ограничениями.)

Помимо совместимых позиционных управлений, которые обозначаются далее через $w(t,x)$ и точно определяются в ходе изложения, в статье используются позиционные управления $v(t,x)$, которые выступают в роли управлений потенциального спуска или позиционно проварьированных исследуемых программных управлений (не только $\overline{u}$, но и совместимых с $\overline{x}$). Для такого управления $v(t,x)$, т. е. однозначной функции на $T \times \mathbb{R}^n$ со значениями в U, через $\mathcal{X}^0(v)$ обозначается пучок решений Каратеодори системы (0.1) при $u = v(t,x)$, а через $\mathcal{X}^k(v)$ — пучок конструктивных движений Красовского — Субботина [5;6] (предел соответствующих ломаных Эйлера). Объединение указанных пучков обозначается через $\mathcal{X}(v)$.

В разд. 4 получены достаточные условия оптимальности, основанные на точной формуле приращения функционала с использованием ключевой конструкции позиционного ПМ — возмущения котраектории градиентом целевой функции $l(x)$. Характеристика этим условиям дана в аннотации; не менее важно, что результаты этого раздела указывают способ доказательства новых достаточных условий оптимальности в рамках конструкций ПМ для задач с терминальными ограничениями.

1. Позиционный принцип минимума с совместимыми управлениями

Рассмотрим усиление классического и позиционного ПМ путем "размножения" котраекторий позиционными управлениями, генерирующими исследуемую траекторию в качестве решения Каратеодори. В конце раздела будет пояснено, почему мы ограничиваемся этим случаем.

Определение 1. Позиционное управление $w : T \times \mathbb{R}^n \to U$ назовем *совместимым с траекторией* $\overline{x}$, если:

а) $f(t,\overline{x}(t),w(t,\overline{x}(t))) = f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))$ на T;

б) суперпозиция $u^c(t) := w(t,\overline{x}(t))$ является допустимым программным управлением.

Множество всех управлений, совместимых с $\overline{x}$, обозначим через $\mathcal{W}(\overline{x})$ (эпитет "позиционный" для краткости часто опускается).

В этом определении важно, что управление u^c не обязано совпадать с $\overline{u}$; поэтому совместимые с $\overline{x}$ позиционные управления порождают множество $\Sigma(\overline{x})$ допустимых пар вида $(\overline{x},u^c)$, равнозначных по функционалу с $(\overline{x},\overline{u})$ в силу условия а). Конечно, может оказаться, что $\Sigma(\overline{x}) = \{\overline{\sigma}\}$, а в противном случае $\overline{\sigma}$ не может быть точкой строгого, сильного и глобального минимума. Отметим также, что программные управления трактуются как частный случай позиционных.

Введем функцию Понтрягина $H(t,x,\psi,u) = \psi \cdot f(t,x,u)$ и сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -H_x(t,x,\psi,u), \quad \psi(t_1) = l_x(x(t_1)). \tag{1.1}$$

Отметим, что граничное условие в ней соответствует условию минимума функции H по управлению в ПМ. Для любой пары $\sigma = (\overline{x},u^c) \in \Sigma(\overline{x})$ можно найти ее котраекторию $\psi = \psi(\cdot)$ как соответствующее решение системы (1.1) и сформировать множество всех таких котраекторий $\Psi(\overline{x})$. Заметим, что формально $\overline{\sigma} \in \Sigma(\overline{x})$, и соответствующую $\overline{\sigma}$ котраекторию обозначим через $\overline{\psi}$ (тогда $\overline{\psi} \in \Psi(\overline{x})$).

Теперь для любой $\psi \in \Psi(\overline{x})$ определим вектор-функцию

$$p^{\psi}(t,x) = \psi(t) + l_x(x) - l_x(\overline{x}(t)) \tag{1.2}$$

и компактнозначное, полунепрерывное сверху многозначное отображение

$$U_{\psi}(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in U} p^{\psi}(t,x) \cdot f(t,x,u). \tag{1.3}$$

Пусть $\mathcal{V}_\psi$ — множество всех его селекторов, трактуемых как позиционные управления сравнения с $\overline{u}$. Таким образом, если $v(t,x) \in \mathcal{V}_\psi$, то выполняется *условие позиционного минимума функции* H
$$H(t,x,p(t,x),v(t,x)) = \min_{u \in U} H(t,x,p(t,x),u) \quad \text{на} \quad T \times \mathbb{R}^n .$$

Напомним, что дифференциальное включение
$$\dot{x} \in cof(t,x,U), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.4}$$
называется овыпуклением исходной системы (0.1), (0.2) и при условиях $(H1)$–$(H3)$ равномерно сходящиеся последовательности $\{x^i(\cdot)\}$ траекторий системы (0.1), (0.2) имеют пределом решение включения (1.4).

Теорема 1. *Для оптимальности* $\overline{\sigma} = (\overline{x},\overline{u})$ *и любой пары* $\sigma \in \Sigma(\overline{x})$ *в задаче* (P) *необходимо, чтобы при любом выборе* $\psi \in \Psi(\overline{x})$ *траектория* $\overline{x}$ *была оптимальной в следующей задаче*:
$$l(x(t_1)) \to \min\,, \quad x(\cdot) \in \bigcup_{v \in \mathcal{V}_\psi} \mathcal{X}(v)\,. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\psi \in \Psi(\overline{x})$, а вместе с ней и соответствующую пару $\sigma = (\overline{x}, u^c) \in \Sigma(\overline{x})$. Покажем сначала, что траектория $\overline{x}$ допустима в задаче (1.5). Поскольку пара $(\overline{x}, u^c)$ оптимальна в задаче (P), то она удовлетворяет ПМ с выбранной котраекторией ψ. Поэтому выполняется включение $u^c(t) \in U_\psi(t,\overline{x}(t))$ на T, причем $p^\psi(t,\overline{x}(t)) = \psi(t) \;\; \forall t \in T$. Положим теперь
$$\overline{v}(t,x) = \begin{cases} u^c(t), \;\; (t,x) \in \operatorname{graph} \overline{x}(\cdot), \\ u(t,x) \in U_\psi(t,x) \;\; \text{произвольно вне} \operatorname{graph} \overline{x}(\cdot). \end{cases}$$
Легко видеть, что $\overline{v}(t,x)$ — селектор отображения (1.3), для которого траектория $\overline{x}$ является решением Каратеодори. Тем самым допустимость $\overline{x}$ в задаче (1.5) установлена.

Далее допустим противное: для выбранной ψ существуют селектор $v(t,x)$ отображения (1.3) и решение $x \in \mathcal{X}(v)$ такое, что утверждение теоремы нарушено, т. е. $l(x(t_1)) < l(\overline{x}(t_1))$. Если $x(\cdot)$ — решение Каратеодори для v, то это сразу ведет к противоречию с оптимальностью процессов из $\Sigma(\overline{x})$. Если же $x(\cdot)$ — конструктивное движение, то из предположений $(H1){-}(H3)$ следует, что $x(\cdot)$ — решение овыпукленной системы (1.4), так как $x(\cdot)$ является равномерным пределом некоторой последовательности ломаных Эйлера $\{x^i(\cdot)\}$. Но тогда в силу непрерывности функции $l(x)$ при достаточно больших i также будут выполняться строгие неравенства $l(x^i(t_1)) < l(\overline{x}(t_1))$. Это вновь противоречит условию теоремы. □

При $\psi \in \Psi(\overline{x})$ экстремальную задачу (1.5) будем называть ψ-присоединенной (к паре $\overline{\sigma}$ или множеству $\Sigma(\overline{x})$). Усиление позиционного принципа минимума, которое дается теоремой 1, состоит в том, что вместо одной $\overline{\psi}$-присоединенной задачи возникает семейство (по $\psi \in \Psi(\overline{x})$) присоединенных задач. В приложениях естественно начинать с основной $\overline{\psi}$-присоединенной задачи, переходя к другим в случае затруднений. При этом теорему 1 (как и собственно позиционный ПМ) следует трактовать не традиционно — как проверочный тест, а как метод решения рассматриваемой задачи путем итерационного спуска по функционалу. (Примеры на уровне базового результата см. в [2–4].)

П р и м е р 1 [10]. $\dot{x}_1 = u_1 - x_2,\; \dot{x}_2 = x_1(u_1 + u_2),\; x_1(0) = x_2(0) = 0,\; |u_1| \le 1,\; u_2 \in [0,1],\; J = x_2(1) \to \min\,.$

Здесь $\overline{\sigma} = (\overline{x},\overline{u}) \equiv 0$ — особая экстремаль Понтрягина с котраекторией $\overline{\psi} \equiv (0,1)$ и соответствующим отображением
$$U_{\overline{\psi}}(x_1) = \begin{cases} \{(u_1 = 1,\; u_2 = 0)\}, & x_1 > 0, \\ \qquad\quad U, & x_1 = 0, \\ \{(u_1 = 1,\; u_2 = 1)\}, & x_1 < 0\,. \end{cases}$$

Испытания ряда элементарных селекторов этого отображения не привели к спуску по функционалу, а чрезмерная неопределенность в их выборе на прямой многозначности $x_1 = 0$ делала дальнейшие испытания малоперспективными. Следовательно, позиционный ПМ оказался не эффективным или, точнее, недостаточно алгоритмичным.

Теперь заметим, что все допустимые управления вида $u(t) = (0, u_2(t))$ тоже имеют траекторию $\overline{x} \equiv 0$ и, значит, образуют некоторое множество $\mathcal{W}(\overline{x})$ совместимых управлений. Для применения теоремы 1 ограничимся совместимыми управлениями $u^\alpha = (0, \alpha^2)$, где $\alpha \in [0,1]$ (т. е. мы полагаем $u^c = u^\alpha$). Тогда котраектории пар $(\overline{x}, u^\alpha)$ будут таковы (индекс α опускаем):

$$\psi_1(t) = -\alpha \sin \alpha(t-1)\,, \quad \psi_2(t) = \cos \alpha(t-1)\,.$$

Поскольку функции переключения управлений u_1, u_2, необходимые для формирования отображения $U_\psi(t,x)$, оказались довольно сложными для анализа движения, мы еще раз огрубим поиск управлений спуска, положив $\alpha = 1$. После этого упрощения качественный анализ удается провести до конца и получить управление

$$u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t)) = \begin{cases} (-1,1), & t \in [0,\tau), \\ (1,1), & t \in (\tau, 0], \end{cases}$$

с оценкой момента переключения $\tau \approx \pi/6$. Как показали расчеты (проведенные А.И. Бениковым), оказалось, что $\tau \approx 0.66$, а $J[x^*, u^*] \approx -0.32825$, что существенно меньше $J[\overline{\sigma}] = 0$.

Тем самым усиленный позиционный ПМ не только “забраковал” экстремаль $\overline{\sigma}$ и все совместимые с $\overline{x}$ управления, но и позволил получить качественно лучшее управление.

В [10] неоптимальность $\overline{\sigma}$ установлена с помощью весьма тонких квадратичных условий оптимальности для особых и скользящих режимов (даже в задаче с терминальным ограничением $x_1(1) = 0$). Но эти условия, как и ряд других локальных критериев, которые могут “забраковать” $\overline{\sigma}$, не генерируют в процессе применения управлений спуска (конечно, без обращения к специальным итерационным методам). Именно свойство алгоритмичности выгодно отличает позиционный ПМ от известных необходимых условий.

Объясним теперь, почему в определении 1 мы ограничились случаем решений Каратеодори.

Если расширить определение 1, допустив и конструктивные движения, то суперпозиции $u(t) = w(\overline{x}(t))$ могут давать управления, не совместимые с $\overline{x}$. Тем самым возникает некоторое множество допустимых пар, которые с необходимостью должны быть “хуже” $\overline{\sigma}$ по значению функционала. Это наблюдение (которое не формулируется особым утверждением) иллюстрирует следующий пример.

П р и м е р 2. $\dot{x}_1 = u^3,\ \dot{x}_2 = -x_1 u,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ |u| \le 1,\ J = x_2(1) \to \min\,.$

Пусть $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u}) \equiv 0$; тогда $\overline{\sigma}$ — особая экстремаль с котраекторией $\overline{\psi} \equiv (0,1)$. Применим позиционный ПМ, т. е. утверждение теоремы 1 при $\psi = \overline{\psi}$. Тогда $U_{\overline{\psi}}(x) \in -\operatorname{sign} x_1$ (при многозначной трактовке функции сигнум) и это отображение имеет, в частности, селекторы

$$v^1(x_1) = \begin{cases} -1, & x_1 > 0, \\ +1, & x_1 \le 0, \end{cases} \qquad v^2(x_1) = \begin{cases} -1, & x_1 \ge 0, \\ +1, & x_1 < 0\,. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\overline{x} = 0$ — соответствующее им конструктивное движение, причем других траекторий отображение $U_{\overline{\psi}}$ не генерирует. Следовательно, позиционный ПМ не бракует $\overline{\sigma}$.

Заметим теперь, что $v^1(\overline{x}_1(t)) \equiv +1\,,\ v^2(\overline{x}_1(t)) \equiv -1$ — допустимые управления с $x_1^{1,2}(t) = \pm\, t$. Если положить $w^1 = v^1,\ w^2 = v^2$ в расширенной версии определения 1, то мы получаем допустимые пары σ^1, σ^2, для которых $J[\sigma^1] = J[\sigma^2] = -1/2 < 0 = J[\overline{\sigma}]$. Легко показать, что эти пары оптимальны.

Таким образом, обсуждаемое наблюдение бракует процесс $\overline{\sigma}$, но способом, совершенно отличным от теоремы 1. Его формализация требует введения обобщенных управлений с обратной связью, что выходит за рамки данной статьи.

2. Вариационный вариант принципа максимума Кашкоч — Лоясиевича

Усиление необходимых условий оптимальности (классического и позиционного ПМ) путем “размножения” котраекторий совместимыми управлениями в смысле определения 1 не является единственно возможным. Сейчас мы рассмотрим другой метод, который использует идею С. Лоясиевича (по утверждению из [14]) о совместимых управлениях и соответствующих котраекториях другого типа. Но реализация этой идеи будет отлична от работ по так называемому принципу максимума Кашкоч — Лоясиевича [11–16].

Для рассматриваемой задачи (P) нам достаточно будет следующего определения [16].

О п р е д е л е н и е 2. Позиционное управление $w : T \times \mathbb{R}^n \to U$ назовем *L-совместимым с траекторией* $\overline{x}$, если выполняется условие a) определения 1 и следующее условие:

б$'$) функция $\widehat{f}(t, x) = f(t, x, w(t, x))$ измерима по t, липшицева по x и ограничена на ограниченных множествах.

Для L-совместимого управления тоже может оказаться, что $w(t, \overline{x}(t)) \neq \overline{u}(t)$ на множестве положительной меры; однако теперь это не будет иметь значения, поскольку основным окажется условие б$'$). Оно позволяет рассматривать сопряженное включение Кларка [17]

$$\dot{\psi}(t) \in -\partial_{(x)} H(t, \overline{x}(t), \psi(t), w(t, \overline{x}(t))), \quad \psi(t_1) = l_x(\overline{x}(t_1)), \tag{2.1}$$

в котором символ “$\partial_{(x)}$” означает, что градиент Кларка находится с учетом зависимости w от x.

Принцип максимума Кашкоч — Лоясиевича для задачи (P) состоит в следующем утверждении.

У с л о в и е $M(\psi)$. *Если пара $(\overline{x}, \overline{u})$ оптимальна, то для любого L-совместимого с $\overline{x}$ позиционного управления $w(t, x)$ существует решение ψ дифференциального включения* (2.1) *такое, что почти всюду на T*

$$H(t, \overline{x}(t), \psi(t), \overline{u}(t)) = \min_{u \in U} H(t, \overline{x}(t), \psi(t), u) .$$

Перейдем к формулировке вариационного аналога этого условия.

Обозначим через $\Psi_w(\overline{x})$ множество всех решений дифференциального включения (2.1), соответствующего L-совместимому управлению w. Для $\psi \in \Psi_w(\overline{x})$ сохраним введенные ранее обозначения $p^{\psi}, U_{\psi}, \mathcal{V}_{\psi}$ (см. (1.2), (1.3)).

Теорема 2. *Если пара $(\overline{x}, \overline{u})$ оптимальна, то при любом выборе L-совместимого с $\overline{x}$ позиционного управления $\overline{w}(t, x)$ и любом $\psi \in \Psi_w(\overline{x})$ выполняется неравенство*

$$l(\overline{x}(t_1)) \leq \min \left\{ l(x(t_1)) \mid x(\cdot) \in \bigcup_{v \in \mathcal{V}_{\psi}} \mathcal{X}(v) \right\}.$$

Более того, существует $\psi \in \Psi_w(\overline{x})$ такая, что траектория $\overline{x}$ оптимальна в ψ-присоединенной задаче.

Эта теорема не требует специального доказательства, так как оно дословно совпадает с доказательством теоремы 1, даже если заменить предположение гладкости функции f по x на условие Липшица. Это естественно, поскольку в условии $M(\psi)$ уже фигурирует негладкое сопряженное включение, а другие котраектории вообще не рассматриваются. Следовательно, теорема 2 усиливает ПМ Кашкоч — Лоясиевича, а значит и негладкий ПМ Кларка, для задач с негладкой динамикой.

С учетом этого замечания рассмотрим негладкий пример.

П р и м е р 3. $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = |x_1| u_1 - u_2, x(0) = (0, 0), |u_1| \leq 1, u_2 \in [-1, 0], J = x_2(1) \to \min .$

Процесс $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u}) \equiv 0$ удовлетворяет ПМ Кларка с котраекторией $\overline{\psi} \equiv (0,1)$. Заметим, что гладкое управление $w(x) = (0, \alpha x_1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, L-совместимо с $\overline{x}$ и включение (2.1) дает котраекторию $\psi^\alpha(t) = (1 - \exp\alpha(1-t), 1)$. Условие $M(\psi^\alpha)$ бракует процесс $\overline{\sigma}$ при всех $\alpha \neq 0$, но и только. Если же применить вариационное условие теоремы 2 с $\psi = \psi^\alpha$, то отображение U_{ψ^α} определится из задач $(\psi_1(t) + |x_1|)u_1 \to \min\limits_{|u_1| \le 1}$, $-u_2 \to \min\limits_{u_2 \in [-1,0]}$. При $\alpha < 0$ оно не генерирует управлений спуска, но при $\alpha > 0$ получим управление $u^*(t) \equiv (-1, 0)$, для которого $J[\sigma^*] = -0.5 < 0 = J[\overline{\sigma}]$. Легко показать, что σ^* — оптимальный процесс. Значит, теорема 2 не просто бракует $\overline{\sigma}$, но позволяет решить задачу.

Отметим различие теорем 1, 2.

В теореме 1 семейство присоединенных задач фактически порождается множеством совместимых управлений (их может быть "достаточно много"); для каждого из них дополнительная (к $\overline{\psi}$) котраектория единственна. Напротив, в теореме 2 семейство присоединенных задач порождается множеством решений сопряженного включения (2.1) даже при одном L-совместимом управлении (трудно ожидать, что их может быть "много" — существование хотя бы одного в случае выпуклости множества $f(t,x,U)$ гарантируется специальной теоремой о селекторе С. Лоясиевича, которая цитируется в указанных выше работах).

3. Точная формула приращения функционала и общая схема позиционного спуска

Введем в рассмотрение расширенную функцию Понтрягина

$$H^e(t,x,\psi,u) = H(t,x,\psi,u) + \dot{\psi}\cdot x\,, \quad \dot{\psi} = -H_x(t,x,\psi,u)\,.$$

Если $\psi : T \to \mathbb{R}^n$ —любая липшицевая функция и вектор-функция $p(t,x) = p^\psi(t,x)$ определена равенством (1.2), то положим

$$H^e(t,x,p(t,x),u) = H(t,x,p(t,x),u) + p_t(t)\,, \tag{3.1}$$

$$p_t(t) := \frac{\partial}{\partial t} p(t,x) = \dot{\psi}(t) - \dot{l}_x(\overline{x}(t))\,, \tag{3.2}$$

в предположении, что полная производная $\dot{l}_x(\overline{x}(t))$ существует, измерима и ограничена на T.

Следующая лемма представляет самостоятельный интерес: она дает точную формулу приращения функционала в нелинейной задаче (P) с "почти произвольной" липшицевой функцией $\psi(\cdot)$ при весьма мягких предположениях на динамику системы (и без введения полей экстремалей).

Лемма. *Предположим, что в задаче (P) функция $f(t,x,u)$ непрерывна, множество U произвольно, а функция $l(x) \in C^{1+}$, т. е. дифференцируема и $l_x(x)$ удовлетворяет условию Липшица (локальному, если множество допустимых траекторий равномерно ограничено в $C(T,\mathbb{R}^n)$). Пусть $\psi : T \to \mathbb{R}^n$ — любая липшицевая функция, удовлетворяющая условию трансверсальности $\psi(t_1) = l_x(\overline{x}(t_1))$. Тогда справедлива точная формула приращения*

$$l(x(t_1)) - l(\overline{x}(t_1)) = \int\limits_T \left[H^e(t,x(t),p(t,x(t)),u(t)) - \overline{H}^e(t)\right] dt\,, \tag{3.3}$$

где $x(\cdot)$ — траектория любой допустимой пары (x,u), а $\overline{H}^e(t)$ означает результат вычисления функции (3.1) вдоль пары $(\overline{x},\overline{u})$, который зависит только от $\psi(t), x(t)$ (не зависит явно от значений программного управления, генерирующего траекторию $\overline{x}(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что из липшицевости функции $l_x(x)$ следует, что существует полная производная $\dot{l}_x(\overline{x}(t)) \in L_\infty(T,\mathbb{R}^n)$, так что функции $p_t(t)$ и H^e корректно определены. При этом интегрант в формуле (3.3) есть измеримая ограниченная функция при любой паре $(x,u) \in \Sigma$, поскольку непрерывна функция $f(t,x,u)$.

Последнее утверждение леммы вытекает из равенства

$$\overline{H}^e(t) = \psi(t)\,\dot{\overline{x}}(t) + \big[\dot{\psi}(t) - \dot{l}_x(\overline{x}(t))\big]\,\overline{x}(t)\,.$$

Далее, посредством перегруппировки слагаемых нетрудно убедиться, что справедливо представление

$$H^e(t,x,p(t,x),u) - \overline{H}^e(t) = \frac{d}{dt}\,[\psi(t)\,(x-\overline{x}(t))]$$
$$+ \frac{d}{dt}\,[l(x) - l(\overline{x}(t))] - \frac{d}{dt}\,[l_x(\overline{x}(t))\,(x-\overline{x}(t))]\;. \tag{3.4}$$

Здесь операция d/dt (применительно к функциям от x) понимается как дифференцирование в силу управляемой системы. Если это выражение подставить в правую часть формулы (3.3), то интегрирование приведет к выражению слева в этой формуле. □

Доказательство этой леммы, как и теоремы 1, из разряда "прямых" — оно не раскрывает происхождения формулы (3.3). В действительности она была получена с помощью функции

$$\varphi^{\psi}(t,x) = l(x) - l(\overline{x}(t)) + (\psi(t) - l_x(\overline{x}(t)))\,(x-\overline{x}(t))\,, \tag{3.5}$$

которая использовалась для обоснования позиционного ПМ в случае $l(x)\in C^2$ [2]. Выражение (3.4) есть не что другое, как производная в силу системы $\dot{\varphi}^{\psi}(t,x)$, а поскольку $\varphi^{\psi}(t_0,x_0)=0$, $\varphi^{\psi}(t_1,x) = l(x) - l(\overline{x}(t_1))$, то (3.3) получается просто по формуле Ньютона — Лейбница. При этом φ-экстремальные позиционные управления описываются отображением $U_{\psi}(t,x)$ из (1.3).

Рассмотрим формулу приращения (3.3) под углом построения методов спуска по функционалу из базовой пары $\overline{\sigma}$. В соответствии с общей методикой при выбранной функции ψ с указанным в лемме граничным условием управление спуска естественно находить путем минимизации правой части равенства (3.3). Возможный вариант — это формирование множества позиционных управлений потенциального спуска $U_{\psi}(t,x)$ по формуле (1.3) с последующим испытанием его селекторов, т. е. фактически обращением к ψ-задаче. (Эпитет "присоединенной" здесь неуместен, так как $\overline{x}$ может не генерироваться управлениями из множества U_{ψ}.) На современной технике эта схема с испытаниями вполне реализуема, но возникает вопрос о произволе в выборе функций ψ: в сравнении с разд. 1, 2 он здесь беспределен — для тестирования $\overline{\sigma}$ можно брать любую ψ, но для методов нужен регулярный выбор.

Вариант такого регулярного выбора существует и основан на нестандартной двойственности [4]. Ее идея — это минимизация приращения функционала на тройках функций $(x(t),\psi(t), u(t))$, $t\in T$, связанных исходной и сопряженной системами. В [4] этот подход подробно разобран для задач, линейных по состоянию.

В следующем примере подходящая функция ψ предъявляется, на первый взгляд, " с потолка", а в действительности находится указанным способом, регулярным для задач, квадратичных по траекториям (система линейна по x, а функционал линейно-квадратичен).

П р и м е р 4. $\dot{x}_1 = u_2 + a x_1 u_1$, $\dot{x}_2 = 2x_1u_2 + x_1^2$, $x_1(0)=x_2(0)=0$, $|u_i|\le 1$, $i=1,2$, $J = x_2(1)\to\min$, где $a>0$ — параметр.

Здесь $\overline{\sigma} = (\overline{x},\overline{u})\equiv 0$ — особая экстремаль Понтрягина с котраекторией $\overline{\psi}=0$. Гладкое позиционное управление $w(x) = (\alpha, cx_1)$ совместимо с $\overline{x}$ в смысле определений 1, 2 при всех $\alpha\in[-1,1]$ и $c\in\mathbb{R}$. Однако w не генерирует новых котраекторий и теоремы 1, 2 оказываются неэффективными для анализа $\overline{\sigma}$.

Но рассмотрим функцию

$$\psi_1(t) = \frac{2c}{A}(e^{-A(t-1)} - 1)\,, \quad \psi_2(t)\equiv 1\,,$$

где $A := \alpha a + c \ne 0$. Она удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим соответствующую ψ-задачу; для нее отображение U_{ψ} определяется из решений задач

$$\psi_1(t)x_1u_1\to\min\,,\quad |u_1|\le 1\,;\quad (\psi_1(t)+2x_1)u_2\to\min\,,\quad |u_2|\le 1\,.$$

Для определенности рассмотрим случай $A = \alpha a + c > 0$, $c < 0$ (тогда $\alpha > 0$). Поскольку $\psi_1(0) < 0, x_1(0) = 0$, то в правой полуокрестности точки $t_0 = 0$ выбираем $v_2(t,x) = u_2 = +1$ и как следствие (в силу первого уравнения динамики и экстремального выбора u_1) полагаем $v_1(t,x) = u_1 = 1$. Тогда на начальном интервале времени получаем траекторию

$$x_1(t) = \frac{1}{a}\,(e^{at} - 1) > 0\,.$$

Это движение происходит до обращения в нуль функции переключения $s(t) = \psi_1(t) + 2x_1(t)$. Поскольку $s(0) < 0$, $s(1) > 0$, то имеется единственный момент переключения $\tau \in (0,1)$ компоненты управления u_2 на значение -1; поскольку произведение $\psi_1(t)x_1(t)$ остается < 0, то u_1 не переключается. При $t > \tau$ смены управлений уже не происходит, и в результате мы получаем управление вида

$$u_1^* \equiv 1\,, \quad u_2^* = \begin{cases} +1, & t \in [0,\tau), \\ -1, & t \in [\tau,1]\,, \end{cases}$$

определенного с точностью до выбора τ.

Элементарные численные расчеты с варьированием параметра a и момента τ показали, что начиная с $a = 0.6$ и $\tau \approx 0.45$ на управлении u^* функционал принимает отрицательные значения (порядка -0.03), меньшие, чем $J[\overline{\sigma}] = 0$. Поэтому улучшение управления на базе формулы приращения устанавливает неоптимальность экстремали $\overline{\sigma}$ по крайней мере при $a \geq 0.6$. Покажем, что эта оценка существенна и достаточно точна.

Действительно, если записать функционал J в интегральном виде и преобразовать с использованием равенства $u_2 = \dot{x}_1 - ax_1u_1$, то получим, что

$$J[x,u] = x_1^2(1) + \int\limits_{[0,1]} (1 - 2au_1(t))x_1^2(t)dt\,.$$

Отсюда ясно, что $\overline{\sigma}$ и вообще все процессы с $\overline{x}_1(t) \equiv 0$ оптимальны при $a \in [0, 1/2]$. Поэтому полученное условие спуска $a \geq 0.6$ близко к “порогу оптимальности” $\overline{\sigma}$ и, вероятно, может быть улучшено более тонкими расчетами.

4. Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим вопрос о близости полученных выше необходимых условий оптимальности к достаточным. Поскольку теоремы 1, 2 формулируются в рамках конструкций принципа максимума Понтрягина (пусть и в несколько расширенной версии), то нас будут интересовать достаточные условия в форме классического ПМ и одновременно — достаточность позиционного ПМ. Эти условия будут получены для понтрягинских экстремалей на основе формулы приращения (3.3).

Заметим, что вопрос о достаточных условиях для экстремалей позиционного ПМ не ставится (они даже не определены и термин “экстремаль” понимается только в смысле Понтрягина). Причина состоит в том, что теория пока не располагает эффективными методами решения присоединенных задач из-за отсутствия условий Липшица и выпуклозначности отображений $U_\psi(t,x)$ из (1.3). Практически утверждения теорем 1, 2 используются в очень усеченном варианте — испытывается лишь некоторое множество “элементарных” селекторов этих отображений. В результате, если удается установить неоптимальность исследуемой пары $\overline{\sigma}$, то на выходе мы получаем допустимую пару $\sigma^* = (x^*, u^*)$ с меньшим значением функционала. И важно установить, является ли она оптимальной (еще до ее тестирования позиционным ПМ на следующей итерации решения задачи). Эта специфика позиционного ПМ заставляет получать достаточные условия не только для базовой пары $\overline{\sigma}$, но и для улучшенной пары σ^* в рамках одних и тех же конструкций. Это обстоятельство будет далее учтено.

Обратимся к достаточным условиям оптимальности. Будем пользоваться обозначениями разд. 1, связанными с совместимыми управлениями в смысле определения 1.

Обозначим через $\triangle^{\psi}[\sigma]$ функционал, равный правой части равенства (3.3), с уточненными обозначениями $p = p^{\psi}(t,x)$, $\quad \overline{H}^e(t) = \overline{H}^e(t,\psi(t))$. Кроме того, сузим произвол в выборе функций ψ и будем рассматривать $\triangle^{\psi}[\sigma]$ только при $\psi \in \Psi(\overline{x})$. Более того, не будем предполагать, что нам известно все множество $\mathcal{W}(\overline{x})$ совместимых управлений (что очень жестко), и выделим некоторое его подмножество $\mathcal{W}^0(\overline{x})$. Соответственно сузим множества рассматриваемых пар $\Sigma(\overline{x})$ и котраекторий $\Psi(\overline{x})$ до подмножеств $\Sigma^0(\overline{x})$ и $\Psi^0(\overline{x})$. Будем предполагать, что $\overline{\sigma}$ и все пары из $\Sigma^0(\overline{x})$ являются экстремалями Понтрягина, ибо в противном случае вопрос об оптимальности отпадает.

В качестве исходного пункта вывода достаточных условий принимается естественное условие

$$\exists\, \psi \in \Psi^0(\overline{x}) : \ \triangle^{\psi}[\sigma] \geq 0 \quad \forall\, \sigma \in \Sigma\,.$$

Но оно имеет характер вариационной задачи и обычно считается непроверяемым. Мы гарантируем его некоторыми конечномерными (поточечными) условиями, но ценой довольно существенного огрубления.

Чтобы несколько смягчить этот эффект, введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $E(t) : T \to \mathbb{R}^n$ — некоторое многозначное отображение, имеющее селектором $\overline{x}(t)$, т. е. $\overline{x}(t) \in E(t)\ \forall\, t \in T$. Будем говорить, что пара $\overline{\sigma}$ E-оптимальна в задаче (P), если она оптимальна на множестве всех допустимых пар Σ_E, траектории которых удовлетворяют включению $x(t) \in E(t)$ на T. Это понятие относится также ко всем парам $\sigma^e = (\overline{x}, u^e) \in \Sigma^0(\overline{x})$.

Поясним, что если $E(t)$ — некоторая трубка вдоль траектории $\overline{x}$, то E-оптимальность $\overline{\sigma}$ равносильна понятию сильного минимума на паре $\overline{\sigma}$. Если же $E(t)$ при всех t является внешней оценкой множества достижимости $\mathcal{R}(t)$ системы (0.1), (0.2), то E-оптимальность $\overline{\sigma}$ совпадает с глобальной оптимальностью этой пары в задаче (P), а $E(t)$ может трактоваться как априорная оценка фазовых состояний управляемой системы.

Далее предполагается, что отображение $E(t)$ априорно зафиксировано. (Как показывают примеры, на самом деле в приложениях $E(t)$ подбирается так, чтобы удовлетворить, если возможно, достаточным условиям.)

Определим нижний гамильтониан задачи (P), положив $h(t,x,\psi) = \min\limits_{u \in U} H(t,x,\psi,u)$, и по аналогии с равенствами (3.1), (3.2) введем его расширение $h^e(t,x,p^{\psi}(t,x))$. Тогда из формулы приращения (3.3) и определения функционала $\triangle^{\psi}[\sigma]$ получаем оценку

$$J[\sigma] - J[\overline{\sigma}] \;=\; \triangle^{\psi}[\sigma] \;\geq\; \int\limits_T \Big[h^e(t,x(t),p^{\psi}(t,x(t))) - \overline{H}^e(t,\psi(t))\Big]\,dt\,,$$

которая имеет место при любой $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$ и всех $\sigma \in \Sigma$. Поэтому следующее условие достаточно для E-оптимальности $\overline{\sigma}$:

$$\begin{gathered}\exists\, \psi \in \Psi^0(\overline{x}) : \ \textit{для всех } (x,u) \in \Sigma_E \\ \overline{H}^e(t,\psi(t)) \leq h^e(t,x(t),p^{\psi}(t,x(t))) \ \textit{почти всюду на } T\,.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Поскольку в силу ПМ $H = h$ вдоль $\overline{\sigma}$ при любой $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$, то $\overline{H}^e(t,\psi(t)) = \overline{h}^e(t,\psi(t))$. Поэтому достаточное условие (4.1) требует, чтобы при некоторой $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$ расширенный гамильтониан имел поточечный минимум вдоль траектории $\overline{x}$ на множестве всех допустимых траекторий, проходящих по $E(t)$. Но это достаточное условие тоже имеет вариационный оттенок, и мы огрубим его до следующего условия.

У с л о в и е $Mh^e(\psi,\overline{x},E)$. Существуют котраектория $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$ и отображение $E(t)$ из T в $\mathbb{R}^n$ такие, что почти всюду на T

$$h^e(t,\overline{x}(t),p^{\psi}(t,\overline{x}(t))) = \min_{x \in E(t)} h^e(t,x,p^{\psi}(t,x))\,. \tag{4.2}$$

Из приведенных рассуждений вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* $(H1)$–$(H4)$ *и, кроме того,* $l(x) \in C^{1+}$. *Предположим, что* $\overline{\sigma}$ *и все допустимые пары* $\sigma \in \Sigma^0(\overline{x})$ *удовлетворяют принципу максимума и выполнено условие* $Mh^e(\psi, \overline{x}, E)$. *Тогда* $\overline{\sigma}$ *и пары из* $\Sigma^0(\overline{x})$ E*-оптимальны.*

Эти достаточные условия оптимальности для понтрягинских экстремалей с "чужими" котраекториями не имеют аналогов. Но даже в основном случае, когда в условии минимума (4.2) $\psi = \overline{\psi}$, они являются более гибкими, нежели альтернативные варианты.

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения* $(H1)$–$(H4)$ *и, кроме того,* $l(x)$ *выпукла на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда следующее условие достаточно для* E*-оптимальности всех пар* $\sigma \in \Sigma^0(\overline{x})$, *удовлетворяющих* ПМ:

$$\begin{cases} \text{существуют } \psi \in \Psi^0(\overline{x}) \text{ и отображение } E(t) \text{ такие, что} \\ h^e(t, \overline{x}(t), \psi(t)) = \min\limits_{x \in E(t)} h^e(t, x, \psi(t)) \ \text{ почти всюду на } T\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу (P'), которая получается из (P) заменой функционала J на $I[\sigma] = \psi(t_1)\cdot(x(t_1) - \overline{x}(t_1))$. Из выпуклости $l(x)$ следует, что E-оптимальность пар $\sigma \in \Sigma^0(\overline{x})$ в задаче (P') влечет их оптимальность в задаче (P). Но в задаче (P') $p^\psi(t,x) = \psi(t)$ при любом $\psi \in \Psi^0(\overline{x})$, и поэтому достаточное условие минимума (4.2) сводится к (4.3). □

Если условие (4.3) выполняется при $\psi = \overline{\psi}$, а $E(t)$ — трубка вдоль траектории $\overline{x}$, то получим теорему 24.1 из [17], которая дает достаточные условия сильного минимума. Часто встречается вариант более жестких требований к достаточным условиям (см. [18] и обзор в [19]), которые предполагают вместо (4.3) условия: $\psi = \overline{\psi}$, $E(t)$ выпуклозначно и функция $x \longrightarrow h(t, x, \overline{\psi}(t))$ выпукла на $E(t)$ при всех $t \in T$. Все упомянутые варианты с одной котраекторией $\overline{\psi}$ легко выводятся из теоремы В.Ф. Кротова с линейной вспомогательной функцией [20], но теорему 3 и следствие 1 таким путем получить невозможно. Если же взять нелинейную функцию φ^ψ вида (3.5) при $\psi = \overline{\psi}$, то с ней теорема Кротова даст менее гибкие достаточные условия.

Обратимся к достаточным условиям оптимальности любого процесса $\sigma^* = (x^*, u^*)$, например наиболее глубокого спуска с $\overline{\sigma}$ в ходе применения теоремы 1.

Обозначим через $Mh^e(\psi, x^*, E^*)$ условие, которое получается из $Mh^e(\psi, \overline{x}, E)$ заменой $(\overline{x}, E)$ на (x^*, E^*), где $E^* : T \to \mathbb{R}^n$ — многозначное отображение, селектором которого является $x^*(t)$.

Следствие 2. *Условие* $Mh^e(\psi, x^*, E^*)$ *достаточно для* E^**-оптимальности пары* σ^*.

Для д о к а з а т е л ь с т в а достаточно заметить, что это условие гарантирует поточечный минимум интегранта в формуле приращения (3.3) вдоль траектории $x^*(t)$ на множестве $E^*(t)$. □

Это достаточное условие с "чужой" котраекторией использовано ниже в примерах 5, 6.

При сравнительном анализе теоремы 3 с альтернативными аналогами вне обзора остались достаточные условия в форме ПМ из [19] — самые гибкие из известных, причем для задач с концевыми ограничениями. Их содержательный смысл очень прост и для задачи (P_M) с терминальным ограничением $x(t_1) \in M$ $\quad (x(t_0) = x_0$ фиксировано) состоит в следующем.

Фиксируем некоторое множество $\Psi^*(\overline{\sigma})$ котраекторий процесса $\overline{\sigma}$ без обычного условия трансверсальности, но таких, что линейные функционалы $\psi(t_1)\cdot x(t_1)$, $\psi \in \Psi^*(\overline{\sigma})$ имеют минимум (для ясности — глобальный) в точке $\overline{\sigma}$ на допустимом множестве Σ задачи (P). Тогда очевидно, что система линейных неравенств $\psi(t_1)\cdot x \geq \psi(t_1)\cdot\overline{x}(t_1)$, $\psi \in \Psi^*(\overline{\sigma})$ задает множество $Q[\Psi^*]$, аппроксимирующее сверху множество достижимости $\mathcal{R}(t_1)$ системы (0.1), (0.2) ($Q[\Psi^*]$ есть пересечение опорных полупространств к $\mathcal{R}(t_1)$ в точке $\overline{x}(t_1)$). Отсюда получается следующее достаточное условие оптимальности $\overline{\sigma}$ в задаче (P_M):

$$\begin{gathered} \text{существует множество } \ \Psi^*(\overline{\sigma}) : \overline{x}(t_1) \ \text{ — точка глобального минимума в задаче} \\ l(x) \to \min\,, \quad x \in M \bigcap Q[\Psi^*]\,. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Несмотря на почти очевидность, это условие (и другие, основанные на оценках фазового состояния системы) предпочтительнее достаточных условий, использующих модифицированные лагранжианы [21].

Применительно к задаче (P) теорема 3 и условие (4.4) независимы между собой (ни одно из них не выводится из другого). Но важно, что располагая достаточными условиями теоремы 3, можно существенно улучшить анонсированные условия из [19] для задачи (P_M), включив в формирование оценочного множества $Q[\Psi^*]$ нелинейные неравенства. Эти неравенства вида $\varphi(x) \geq \varphi(x(t_1))$ должны состоять из функций, гарантированно имеющих минимум на множестве Σ в точке $\overline{\sigma}$; для их отбора и расширения множества $\Psi^*(\overline{\sigma})$ и важна теорема 3.

5. Примеры

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие полученные результаты, и снабдим их короткими комментариями.

Пример 5 [16]. $\dot{x}_1 = x_2 u_1$, $\dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)u_1 + x_2 + (t - \pi/2)u_2$, $x(0) = (0,0)$, $U = [0,1] \times [0,1]$, $J = x_2(\pi) \to \min$.

Возьмем экстремаль $\overline{\sigma}$, для которой $\overline{x} \equiv 0$, $\overline{u} \equiv (1,0)$, $\overline{\psi}(t) = -(\sin t, \cos t)$. Она является особой по компоненте управления u_1, ибо $H_{u_1} \equiv 0$. Применять к ней позиционный ПМ, т. е. теорему 1 при $\psi = \overline{\psi}$, бесперспективно: по явно неоптимальной компоненте $\overline{u}_2$ условие минимума функции H выполняется строго, а выбор управления спуска по компоненте u_1 слишком неопределен из-за особости.

Заметим, что все управления вида $u(t) = (u_1(t), 0) \in U$ совместимы с траекторией $\overline{x}$ в смысле любого определения. Применим теорему 1, ограничившись выбором совместимого управления $u^c \equiv (0,0)$ с котраекторией $\psi^c(t) = (0, \exp(t_1 - t))$ (так, чтобы $\overline{u}_2$ “забраковать”). Тогда очевидно, что u^c не удовлетворяет ПМ и, следовательно, $\overline{\sigma}$ и все процессы из $\Sigma(\overline{x})$ неоптимальны. (Такое заключение в отношении $\overline{\sigma}$ получено в [16], исходя из условия $M(\psi^c)$, но этим анализ примера и завершился.) Спуск по присоединенной ψ^c-задаче дал управление $u^*(t) = (0, \chi_{[0,\pi/2]})$, где χ_A — характеристическая функция множества A. Тогда

$$x_1^* \equiv 0\,, \quad x_2^*(t) = \begin{cases} (1 - \pi/2)(e^t - 1) - t\,, & t \in [0, \pi/2], \\ (1 - \pi/2)(e^{\pi/2} - 1)\,, & t \in [\pi/2, \pi], \end{cases}$$

$$J[x^*, u^*] = (1 - \pi/2) - e^{\pi/2} \approx -18.02 < 0 = J[\overline{\sigma}]\,,$$

т. е. спуск действительно реализовался.

Последующее тестирование пары σ^* позиционным ПМ (и двойственным [4]) не привело к “отсеву” σ^* как неоптимального процесса; при этом в ходе проверки использовалась котраектория ψ^c, совпавшая с ψ^* (все котраектории с $u_1 \equiv 0$ совпадают). Поскольку необходимые условия выполнены, то проверим достаточные условия. Так как целевая функция линейна, то применим следствие 1 с естественной заменой $\overline{\sigma}$ на σ^* с фиксированной котраекторией $\psi = \psi^*$ (ибо совместимых с x^* управлений нет). Тогда получим

$$H^e(t, x, \psi^*, u) = \psi_2^*(t)[-(x_1 + x_2)u_1 + (t - \pi/2)u_2]\,,$$

и теперь необходимо выбрать отображение $E^*(t)$, учитывая, что $\psi_2^*(t) > 0$, а $x_2^*(t) < 0$ на $(0, \pi)$. Очевидно, что выбор $E^* = \{x_1 + x_2 \leq 0\}$ согласуется с управлением u^* и подходит, так как тогда на E^*

$$h^e(t, x, \psi^*(t)) = \psi_2^*(t)(t - \pi/2)\chi_{[0,\pi/2]} = H^e|_{\sigma^*} \text{ на } T$$

не зависит от x и имеет формальный минимум вдоль $x^*(t)$. Следовательно, пара σ^* оптимальна при ограничении $x(t) \in E^*(t)$ и, в частности, на ней достигается сильный минимум функционала.

Этот пример демонстрирует не только эффект использования совместимых управлений в необходимых условиях и процедурах улучшения управления, но и естественность “вплетения” достаточных условий для наилучших процессов спуска (σ^*) в общую схему решения задач позиционными условиями оптимальности. Кроме того, в этом примере “не сработают” достаточные условия с требованием выпуклости нижнего гамильтониана по x, поскольку он, напротив, оказывается вогнутым, как и во всех билинейных задачах.

П р и м е р 6. $\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = \dfrac{\pi}{2} u \cos\dfrac{\pi x_1}{2},\ x(0) = (0,0),\ |u| \le 1,\ J = x_2^3(1) \to \min$.

Это модификация известного примера [22], в котором функционал был линеен ($x_2(1)$). Здесь имеется бесчисленное множество экстремалей и, если начать решение с экстремали $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u}) \equiv 0$ с $\overline{\psi} \equiv 0$, то позиционный ПМ элементарно приводит к управлению спуска $u^* \equiv -1$. Тестируем пару σ^* достаточным условием $Mh^e(\overline{\psi}, x^*, E^*)$ с “чужой” котраекторией $\overline{\psi}$ при очевидном выборе $E^*(t) = \{|x_1| \le t\}$. Так как $p(t,x) = (0, 3x_2^3)$ при $\psi = \overline{\psi}$, то на $E^*(t)$

$$h^e(x, p(x)) = -3\frac{\pi}{2} x_1^2 \cos\frac{\pi x_1}{2} = H^e(x, p(x), u^*)$$

и имеет минимум вдоль траектории $x_1^*(t) = -t$. Следовательно, пара σ^* глобально оптимальна, так как все траектории системы проходят по $E^*(t)$.

В этом примере примечателен не только эффект “чужой” котраектории — к процессу σ^* неприменимы достаточные условия следствия 1, поскольку целевая функция l не выпукла. Более того, если взять линейный функционал $I = x_2(1)$, то вновь “не сработают” достаточные условия, требующие выпуклости гамильтониана по x, но следствие 1 окажется применимым даже с “чужой” котраекторией.

Следующий пример иллюстрирует ограниченную эффективность “конечномерных” достаточных условий в форме ПМ (с одной $\overline{\psi}$) в задачах с плохими свойствами управляемости системы. Сказывается огрубление, которое допускается при их выводе из-за отказа от условий вариационного типа (например (4.1)); часто оказывается эффективным использовать их неформально.

П р и м е р 7. $\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = x_2 u_2 - x_1^2,\ x(0) = (0,0),\ |u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1,\ J = x_1^2(1) - x_2(1) \to \min$.

Нетрудно видеть, что на всех траекториях системы $x_2(t) \le 0$; поэтому все процессы с траекторией $\overline{x} \equiv 0$ оптимальны.

Но возьмем экстремальную пару $\overline{\sigma} = (\overline{x}, \overline{u})$ с котраекторией $\overline{\psi} \equiv (0, -1)$. Так как $l(x)$ выпукла, то достаточные условия теоремы 3 и следствия 1 с $\psi = \overline{\psi}$ совпадают, но “не срабатывают”: расширенный гамильтониан $h^e(x, \overline{\psi}) = -|x_2| + x_1^2$ не имеет минимума вдоль $\overline{x}(t) = 0$ даже при учете априорной оценки $E = \{x_2 \le 0\}$.

Теперь заметим, что все допустимые управления вида $u(t) = (0, u_2(t))$ совместимы с $\overline{x}$, и для простоты возьмем $u^\alpha \equiv (0, \alpha)$, где $\alpha \in [-1, 1]$. Тогда $\psi_1^\alpha \equiv 0$, $\psi_2^\alpha(t) = -\exp\alpha(1-t)$ и

$$H^e(t, x, \psi^\alpha, u) = e^{\alpha(t-1)}[x_2(u_2 - \alpha) + x_1^2]\,.$$

Отсюда ясно, что надо выбрать $\alpha = 1$, ибо тогда на множестве $E = \{x_2 \le 0\}$ $h(t, x, \psi^1)$ будет иметь минимум вдоль $\overline{x}$.

Тем самым вывод о глобальной оптимальности $\overline{\sigma}$ (неформально очевидной) получен, но отнюдь не элементарно — с привлечением идеи совместимых управлений и “размножения” котраекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 388 с.
2. **Дыхта В.А.** Вариационные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска, усиливающие принцип максимума // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 8. С. 86–103.

3. **Дыхта В.А.** Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона — Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 31–49.
4. **Дыхта В.А.** Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2014. № 11. С. 19–37.
5. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных исследований. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
7. **Кларк Ф., Ледяев Ю.С., Субботин А.И.** Универсальное позиционное управление и проксимальное прицеливание в задачах управления в условиях возмущения и дифференциальных играх // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 165–186.
8. Nonsmooth analysis and control theory / F.H. Clarke, Yu.S Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. N.Y.: Springer-Verlag, 1998. 276 p.
9. Qualitative properties of trajectories of control systems: a survey / F.H. Clarke, Yu.S Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski // J. Dynam. Control Systems. 1995. Vol. 1, no. 1. P. 1–48.
10. **Warga J.** A second order condition that strengthens Pontryagin's maximum principle // J. Differential Equations. 1978. Vol. 28, no. 2. P. 284–307.
11. **Kaśkosz B., Łojasiewicz S.** A maximum principle for generalized control // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. 1985. Vol. 9, no. 2. P. 109–130.
12. **Kaśkosz B.** Extremality, controllability, and abundant subsets of generalized control systems // J. Optimization Theory Appl. 1999. Vol. 101, no. 1. P. 73–108.
13. **Frankowska H., Kaśkosz B.** Linearization and boundary trajectories of nonsmooth control systems // Can. J. Math. 1988. Vol. XI, no. 3. P. 589–609.
14. **Sussmann H.J.** A strong version of the Lojasiewicz maximum principle // Optimal Control of Differential Equations / ed. N.H. Pavel. N.Y.: M. Dekker Inc., 1994. P. 293–309. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics.)
15. **Loewen P.D., Vinter R.B.** Pontryagin-type necessary conditions for differential inclusion problems // Systems & Control Lett. 1987. Vol. 9, no. 3. P. 263–265.
16. **Artstein Z.** Pontryagin maximum principle revisited with feedbacks // Eur. J. Control. 2011. Vol. 17, no. 1. P. 46–54.
17. **Clarke F.** Functional analysis, calculus of variations and optimal control. London: Springer-Verlag, 2013. 591 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 264.)
18. **Никольский М.С.** О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. математика и кибернетика. 2005. № 1. С. 35–43.
19. **Антипина Н.В., Дыхта В.А.** Линейные функции Ляпунова — Кротова и достаточные оптимальности в форме принципа максимума // Изв. вузов. Математика. 2002. № 12. С. 11–22.
20. **Krotov V.F.** Global methods in optimal control theory. N.Y.: Marcel Dekker, 1996. 384 p. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics; vol. 195.)
21. **Дыхта В.А.** Анализ достаточных условий оптимальности с множеством функций типа Ляпунова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, no. 5. С. 66–75.
22. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Едиториал УРСС, 2011. 272 с.

Дыхта Владимир Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделением
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН
e-mail: dykhta@gmail.com

Поступила 16.02.15