ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977.1

О ЗАДАЧЕ ДОСТИЖИМОСТИ ПРИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

М. И. Гусев

Рассматривается задача приближенного построения множеств достижимости нелинейной управляемой системы с фазовыми ограничениями, которые представимы в виде множества решений конечной системы нелинейных неравенств. Каждое из неравенств задано гладкой функцией, но пересечение их множеств решений имеет, вообще говоря, негладкую границу. Исследуется процедура снятия фазовых ограничений, основанная на введении вспомогательной управляемой системы без ограничений, правая часть которой зависит от малого параметра. Ранее были получены результаты о сходимости множеств достижимости вспомогательной управляемой системы в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы при стремлении малого параметра к нулю для фазовых ограничений, имеющих гладкую границу. В данной статье эти результаты обобщены на рассматриваемый класс систем с кусочно-гладкой границей фазовых ограничений.

Ключевые слова: множество достижимости, фазовые ограничения, функция штрафа, аппроксимация, метрика Хаусдорфа.

M. I. Gusev. On the attainability problem under state constraints with piecewise smooth boundary.

The paper is devoted to the problem of approximating reachable sets for a nonlinear control system with state constraints given as a solution set of a finite system of nonlinear inequalities. Each of these inequalities is given as a level set of a smooth function, but their intersection may have nonsmooth boundary. We study a procedure of eliminating the state constraints based on the introduction of an auxiliary system without constraints such that the right-hand sides of its equations depend on a small parameter. For state constraints with smooth boundary, it was shown earlier that the reachable set of the original system can be approximated in the Hausdorff metric by the reachable sets of the auxiliary control system as the small parameter tends to zero. In the present paper, these results are extended to the considered class of systems with piecewise smooth boundary of the state constraints.

Keywords: reachable set, state constraints, penalty function, approximation, Hausdorff metric.

1. Введение

Множества достижимости и разрешимости, трубки траекторий и их аналоги используются при решении различных задач управления в условиях неопределенности и дифференциальных играх (см. [1–5]). В данной работе рассматривается способ описания множеств достижимости и трубок траекторий управляемой системы с фазовыми ограничениями. Вопросам приближенного построения множеств достижимости, в том числе для систем с фазовыми ограничениями, посвящены многие работы [5–12]. Метод снятия фазовых ограничений при построении множеств достижимости для дифференциальных включений был предложен в работах [13; 14]. В данных работах трубки траекторий и множества достижимости дифференциального включения с выпуклым фазовым ограничением аппроксимировались решениями семейства дифференциальных включений без фазовых ограничений, правая часть которых линейно зависит от матричного параметра. В работах [15; 16] было предложено сужать множество скоростей исходной системы вблизи границы ограничений. Правая часть аппроксимирующей вспомогательной системы при этом зависит от скалярного параметра штрафа, ее траектории не пересекают границу ограничений и множество достижимости аппроксимирующей системы приближает множество достижимости системы с фазовыми ограничениями изнутри. Предложенный

[1]Работа выполнена при поддержке программы президиума УрО РАН (проект 15-16-1-8) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2692.2014.1).

метод можно рассматривать в качестве аналога метода барьерных функций в задачах оптимизации. Его применение ограничено требованием выполнения условия внутренней точки (inward pointing condition)(см., например, [17–19]): в любой граничной точке фазовых ограничений, достижимой из начального состояния, должен существовать вектор скорости управляемой системы, направленный строго внутрь ограничений. Обоснование сходимости множеств достижимости опирается на теоремы об аппроксимации траекторий управляемой системы траекториями, удовлетворяющими фазовым ограничениям [17–21]. Указанные теоремы используются при исследовании свойств функции цены и в приложениях теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби [22; 23] в задачах оптимального управления.

В работе [24] вспомогательная аппроксимирующая система получена путем иной модификации множества скоростей исходной системы. В правую часть уравнений системы здесь добавляется корректирующее слагаемое, направляющее вектор скорости внутрь множества ограничений при пересечении его границы. Правая часть вспомогательной системы зависит от малого параметра, определяющего область действия корректирующей добавки. Область достижимости этой системы, построенная без учета фазовых ограничений, содержит множество достижимости исходной системы с фазовыми ограничениями. При стремлении малого параметра к нулю имеет место сходимость множеств достижимости в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы. Данная работа продолжает статью [24], где рассматривались фазовые ограничения с гладкой границей. Здесь мы рассматриваем кусочно-гладкие выпуклые ограничения. В отличие от фазовых ограничений с гладкой границей в кусочно-гладком случае для получения оценок точности аппроксимации приходится накладывать более жесткие ограничения на правую часть управляемой системы. Условие внутренней точки по сравнению с [24] здесь несколько ослаблено за счет овыпуклания множества скоростей системы.

2. Определения и постановка задачи

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le \theta, \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in U$ п.в. $t \in [t_0, \theta]$ — управление. Множество U — компакт в $\mathbb{R}^r$, в качестве управлений рассматриваются измеримые по Лебегу функции $u : [t_0, \theta] \to U$.

Далее используются следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через $A^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, 0 — нулевой вектор подходящей размерности либо число ноль. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма, $B_r(\bar{x})$: $B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x - \bar{x}\| \le r\}$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $\bar{x}$. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символами ∂S, $\mathrm{int} S$, $\mathrm{cl} S$, $\mathrm{co} S$ обозначаются соответственно граница, внутренность замыкание и выпуклая оболочка S, $\nabla g(x)$ — градиент функции $g(x)$ в точке x, $h(A, B)$ — хаусдорфово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\mathtt{conv}(\mathbb{R}^n)$ — семейство выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Для множества управлений мы используем обозначение $\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in L_\infty[t_0, \theta] : u(t) \in U \text{ п.в. } t \in [t_0, \theta]\}$.

Далее считаем, что правая часть системы (2.1) удовлетворяет условиям предположения 1.

Предположение 1. *Отображение $f(x, u) : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) $f(x, u)$ *непрерывно по* (x, u) *и локально липшицево по* x *равномерно по* $u \in U$;

2) *условие подлинейного роста*: *существует* $C > 0$ *такое, что*

$$\|f(x, u)\| \le C(1 + \|x\|), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U.$$

При указанных условиях множество траекторий системы (2.1), отвечающих заданному начальному условию $x(t_0) = x^0$, ограничено. Обозначим через B_R шар $B_R(\bar{x})$, который содержит все траектории системы. Система (2.1) представима в виде эквивалентного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(t_0) = x^0,$$

где $F(x) := f(x, U)$ — множество скоростей системы (2.1) для данного $x \in \mathbb{R}^n$. Многозначное отображение $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ компактнозначно и локально липшицево в метрике Хаусдорфа. Решениями дифференциального включения являются абсолютно непрерывные функции $x : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ для почти всех t.

Фазовые ограничения имеют вид

$$x(t) \in S, \quad t \in [t_0, \theta], \tag{2.2}$$

где S — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее вектор x^0. Далее мы рассматриваем в качестве S множество, заданное в следующем виде:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots k\},$$

где $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции, градиенты которых локально липшицевы.

Обозначим через $x(t, u(\cdot), x^0)$ решение системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$. Множеством (областью) достижимости системы (2.1) с фазовым ограничением (2.2) в момент времени θ называется множество

$$G_0(\theta) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(\cdot) \in \mathcal{U},\ x = x(\theta, u(\cdot), x^0),\ x(t, u(\cdot), x^0) \in S,\ t_0 \le t \le \theta\bigr\},$$

$G_0(\theta)$ — множество всех точек, в которые можно перевести систему (2.1) в момент времени θ из начального состояния x^0 при ограничениях (2.2). В данной работе рассматривается задача приближенного построения $G_0(\theta)$. Исходная управляемая система заменяется семейством управляемых систем без фазовых ограничений, зависящих от параметра штрафа ε,

$$\dot{x}(t) = f_\varepsilon(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.3}$$

множества достижимости которых, построенные без учета фазовых ограничений, аппроксимируют $G_0(\theta)$ при $\varepsilon \to 0$.

3. Аппроксимация множеств достижимости

В дальнейших построениях используется следующее условие внутренней точки (inward-pointing condition) (см. [17–20]).

Предположение 2. *Для каждого* $x \in \partial S \cap B_R$

$$\mathrm{co}F(x) \cap \mathrm{int}T_S(x) \ne \varnothing. \tag{3.1}$$

Здесь $T_S(x)$ — касательный конус к множеству S в точке x, который определяется следующим образом:

$$T_S(x) = \bigl\{d \in \mathbb{R}^n : \lim_{\xi \to +0} \xi^{-1} d(x + \xi d, S) = 0\bigr\},$$

$d(x, S)$ — расстояние от x до множества S:

$$d(x, S) = \min_{y \in S} \|x - y\|.$$

Данное условие обеспечивают непустоту множества достижимости $G_0(\theta)$.

Определим функцию $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$$g(x)=\max_{1\le i\le k} g_i(x), \tag{3.2}$$

функция $g(x)$ выпукла и, очевидно, $S=\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)\le 0\}$.

Для $x\in\mathbb{R}^n$ положим

$$I(x)=\{i\in\{1,\dots k\}\colon g_i(x)=g(x)\},$$

$I(x)$ — это множество тех номеров i, на которых достигается максимум в (3.2). Далее будем считать выполненным следующее условие.

Предположение 3. *В точках $x\in\partial S\cap B_R$ градиенты $\nabla g_i(x),\ i\in I(x)$, положительно линейно независимы.* [2]

При выполнении данного предположения условие (3.1) можно записать в эквивалентной форме (см. [24]):

$$\max_{\lambda\in\Lambda(x)}\min_{f\in\mathrm{co}F(x)}\Big(\sum_{i=1}^k\lambda_i\nabla g_i(x),f\Big)<0\ \ \forall x\in\{x\in\mathbb{R}^n\colon g(x)=0\}\cap B_R, \tag{3.3}$$

где

$$\Lambda(x)=\Big\{\lambda\in\mathbb{R}^k\colon \lambda_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^k\lambda_i=1;\ \lambda_i=0 \text{ при } i\notin I(x)\Big\}.$$

Применяя теорему о минимаксе и меняя в (3.3) местами минимум и максимум, получим

$$\min_{f\in\mathrm{co}F(x)}\max_{\lambda\in\Lambda(x)}\Big(\sum_{i=1}^k\lambda_i\nabla g_i(x),f\Big)<0.$$

Учитывая, что

$$\max_{\lambda\in\Lambda(x)}\Big(\sum_{i=1}^k\lambda_i\nabla g_i(x),f\Big)=\max_{i\in I(x)}(\nabla g_i(x),f),$$

получаем, что неравенство (3.3) эквивалентно условию

$$\min_{f\in\mathrm{co}F(x)}\max_{i\in I(x)}\big(\nabla g_i(x),f\big)<0\ \ \forall x\in\{x\in\mathbb{R}^n\colon g(x)=0\}\cap B_R.$$

Утверждение. *Если выполнено условие* (3.3)*, то существуют $\sigma>0,\ \rho>0$ такие, что неравенство*

$$\min_{f\in\mathrm{co}F(x)}\max_{i\in I(x)}(\nabla g_i(x),f)<-\rho, \tag{3.4}$$

справедливо для всех точек множества

$$S_R^\sigma=\{x\colon 0\le g(x)\le\sigma\}\cap B_R.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, от противного, что для любых $\sigma>0,\rho>0$ найдется вектор $x^{\sigma,\rho}\in B_R$ такой, что

$$\min_{f\in\mathrm{co}F(x^{\sigma,\rho})}\max_{i\in I(x^{\sigma,\rho})}(\nabla g_i(x^{\sigma,\rho}),f)\ge-\rho,\quad 0\le g(x^{\sigma,\rho})\le\sigma. \tag{3.5}$$

[2] Векторы $a^i\in\mathbb{R}^n,\ i=1,\dots,m$, называются положительно линейно независимыми, если для любых $\alpha_i\ge 0,\ i=1,\dots,m$, из равенства $\sum_{i=1}^m\alpha_i a^i=0$ следует, что $\alpha_i=0,\ i=1,\dots,m$.

Выберем последовательности положительных чисел σ_m, ρ_m, $\sigma_m \to 0, \rho_m \to 0$ при $m \to \infty$, и обозначим $x^m = x^{\sigma_m,\rho_m}$. Последовательность $x^m \in B_R$ содержит сходящуюся подпоследовательность; не ограничивая общности можно считать, что $x^m \to \bar{x} \in B_R$. Из непрерывности $g(x)$ следует, что $g(\bar{x}) = 0$. Выберем $f^m \in \mathrm{co}F(x^m)$, доставляющее минимум в левой части неравенства (3.5) при $\sigma = \sigma_m, \rho = \rho_m, x^{\sigma,\rho} = x^m$. Последовательность f^m ограничена и удовлетворяет неравенству

$$\max_{i\in I(x^m)}(\nabla g_i(x^m), f^m) \geq -\rho^m;$$

не ограничивая общности будем считать, что $f^m \to \bar{f} \in \mathrm{co}F(\bar{x})$. Пусть $i \notin I(\bar{x})$, тогда $g_i(\bar{x}) < g(\bar{x})$. В силу непрерывности функций $g_i(x), g(x)$ для достаточно больших m имеем $g_i(x^m) < g(x^m)$, что эквивалентно условию $i \notin I(x^m)$. Следовательно, $I(x^m) \subset I(\bar{x})$ и значит

$$\max_{i\in I(\bar{x})}(\nabla g_i(x^m), f^m) \geq \max_{i\in I(x^m)}(\nabla g_i(x^m), f^m) \geq -\rho^m.$$

Функция $\Psi(x, f) = \max_{i\in I(\bar{x})}(\nabla g_i(x), f)$ непрерывна. Поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\max_{i\in I(\bar{x})}(\nabla g_i(\bar{x}), \bar{f}) \geq 0, \quad \bar{x} \in \mathrm{co}F(\bar{x}), \quad g(\bar{x}) = 0,$$

что противоречит условию (3.5). □

Далее мы будем использовать следующее усиление условия (3.4).

Предположение 4. *Существуют $\sigma > 0, \rho > 0$ и липшицева функция $\bar{f}(x)$, определенная на множестве S_R^σ, такие, что*

$$\max_{i\in I(x)}(\nabla g_i(x), \bar{f}(x)) < -\rho, \quad \bar{f}(x) \in \mathrm{co}F(x) \;\; \forall x \in S_R^\sigma.$$

Считая последнее предположение выполненным, правую часть $f_\varepsilon(x, u)$ управляемой системы (2.3) определим на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \leq \sigma\} \cap B_R$ следующим образом. Выберем $0 < \varepsilon < \sigma$. Пусть $h_\varepsilon(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $0 \leq h_\varepsilon(\tau) \leq 1$, $h_\varepsilon(\tau) = 1$ при $\tau < 0$, $h_\varepsilon(\tau) = 0$ при $\tau > \varepsilon$. Положим

$$f_\varepsilon(x, u) = \begin{cases} h_\varepsilon(g(x))f(x, u) + (1 - h_\varepsilon(g(x)))\bar{f}(x) & \text{при} \quad g(x) > 0, \\ f(x, u) & \text{при} \quad g(x) \leq 0. \end{cases}$$

В качестве $h_\varepsilon(\tau)$ можно взять линейно-квадратичную функцию, определяемую следующими соотношениями:

$$h_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \tau < 0, \\ 1 - \dfrac{2\tau^2}{\varepsilon^2} & \text{при} \quad 0 \leq \tau \leq \varepsilon/2, \\ \dfrac{2(\tau - \varepsilon)^2}{\varepsilon^2} & \text{при} \quad \varepsilon/2 \leq \tau \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad \tau > \varepsilon. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $f(x, u)$ и ограничения задачи удовлетворяют предположениям 1, 3, 4. Тогда*

1) *при $0 < \varepsilon < \sigma$ отображение $f_\varepsilon(x, u)$ непрерывно на $\{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \leq \sigma\} \cap B_R \times U$ и липшицево по x равномерно по $u \in U$;*

2) *для любого $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ решение $x_\varepsilon(t)$ системы (2.3) с начальным условием $x_\varepsilon(t_0) = x^0$ продолжимо на $[t_0, \theta]$ и удовлетворяет неравенству*

$$g(x_\varepsilon(t)) \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \theta].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть доказательства почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [24]. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На множестве $S_1 \times U$, где $S_1 = \{x : g(x) \le 0\} \cap B_R$, функция $f_\varepsilon(x,u)$ совпадает с $f(x,u)$, поэтому непрерывна. При $(x,u) \in S_2 \times U$, $S_2 = \{x : 0 \le g(x) \le \sigma\} \cap B_R$, $f_\varepsilon(x,u)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций. Те x, где $g(x) = 0$, принадлежат каждому из множеств S_1, S_2, поэтому непрерывность $f_\varepsilon(x,u)$ в них вытекает из непрерывности на этих множествах. Для доказательства условия Липшица для $f_\varepsilon(x,u)$, заметим, что существуют константы $L_1, L_2 > 0$, не зависящие от u, такие, что $\forall i = 1,2$

$$|f_\varepsilon(x,u) - f_\varepsilon(y,u)| \le L_i \|x - y\| \quad \forall x, y \in S_i, \ \forall u \in U.$$

Для $x, y \in S_1$ неравенство следует из предположения 1. На $S_2 \times U$ $f_\varepsilon(x,u)$ есть суперпозиция липшицевых по x функций (выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция является липшицевой на любом ограниченном множестве). Возьмем $x \in S_1$, $y \in S_2$, соединим x, y отрезком прямой. В концах отрезка функция g принимает значения разных знаков, поэтому на отрезке найдется точка z, в которой $g(x) = 0$. Учитывая, что $z \in S_i, i = 1,2$, получим

$$|f_\varepsilon(x,u) - f_\varepsilon(y,u)| \le |f_\varepsilon(x,u) - f_\varepsilon(z,u)| + |f_\varepsilon(z,u) - f_\varepsilon(y,u)|$$

$$\le L_1\|x - z\| + L_2\|y - z\| \le \max\{L_1, L_2\}(\|x - z\| + \|y - z\|) = \max\{L_1, L_2\}\|x - y\| \quad \forall u \in U.$$

Рассмотрим решение $x_\varepsilon(t)$ системы (2.3), отвечающее управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Так как $f_\varepsilon(x,u)$ является выпуклой комбинацией векторов $f(x,u)$ и $f(x,\bar{u}(x))$, принадлежащих выпуклому множеству $\mathrm{co}F(x)$, то для почти всех t имеет место включение $\dot{x}_\varepsilon(t) \in \mathrm{co}F(x_\varepsilon(t))$. Докажем, что эта траектория не покидает множества $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le \sigma\} \cap B_R$, на котором определена правая часть системы (2.3) — $f_\varepsilon(x,u)$. Поскольку решение $x_\varepsilon(t)$ дифференциального включения $\dot{x}_\varepsilon(t) \in \mathrm{co}F(x_\varepsilon(t))$ может сколь угодно точно в равномерной метрике быть аппроксимировано решениями включения $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ [25], то $x_\varepsilon(t) \in B_R$ для всех значений t, для которых определено решение. Пусть γ^* — максимальное из чисел γ, не превосходящих θ таких, что решение $x_\varepsilon(t)$ определено на отрезке $[t_0, \gamma]$. Докажем выполнение неравенства $g(x_\varepsilon(t)) \le \varepsilon$ во всех точках $[t_0, \gamma^*]$. Допустим от противного, что $g(x_\varepsilon(t^*)) > \varepsilon$ для некоторого $t^* \in [t_0, \gamma^*]$. Пусть

$$t_* = \max\{t \colon t \in [t_0, t^*], g(x_\varepsilon(t)) = \varepsilon\}.$$

Функция $g(x_\varepsilon(t))$ липшицева, и значит дифференцируема почти всюду. Оценим величину $\dfrac{d}{dt} g(x_\varepsilon(t))$ в тех точках $t \in [t_*, t^*]$, где существуют данная производная и производная $\dot{x}_\varepsilon(t)$. Обозначим $\Delta x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t + \delta t) - x_\varepsilon(t)$, тогда

$$g_i(x_\varepsilon(t + \delta t)) - g_i(x_\varepsilon(t)) = (\nabla g_i(x_\varepsilon(t)), \Delta x_\varepsilon(t)) + o_i(\Delta x_\varepsilon(t)), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{3.6}$$

где $o_i(\eta)/\eta \to 0$ при $\eta \to 0$. Подставляя в равенство (3.6) $\Delta x_\varepsilon(t) = \dot{x}_\varepsilon(t)\Delta t + o(\Delta t)$ $(o(\Delta t)/\Delta t \to 0, \ \Delta t \to 0)$, получим

$$g_i(x_\varepsilon(t + \Delta t)) - g_i(x_\varepsilon(t)) = (\nabla g_i(x_\varepsilon(t)), \dot{x}_\varepsilon(t))\Delta t + \alpha_i(\Delta t), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{3.7}$$

где

$$\alpha_i(\Delta t) = \nabla g_i(x_\varepsilon(t), o(\Delta t)) + o_i(\dot{x}_\varepsilon(t)\Delta t + o(\Delta t)).$$

Очевидно, $\alpha_i(\Delta t)/\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

При $i \in I(x_\varepsilon(t))$ имеем $g_i(x_\varepsilon(t)) = g(x_\varepsilon(t))$. Если $i \notin I(x_\varepsilon(t))$, то $g_i(x_\varepsilon(t)) < g(x_\varepsilon(t))$, следовательно, в силу непрерывности $g(x), g_i(x), x_\varepsilon(t)$ для достаточно малых Δt будем иметь $g_i(x_\varepsilon(t + \Delta t)) < g(x_\varepsilon(t + \Delta t))$. Таким образом, $g(x_\varepsilon(t + \Delta t)) = \max_{i \in I(x_\varepsilon(t))} g_i(x_\varepsilon(t + \Delta t))$. С учетом сказанного, переходя в обеих частях равенства (3.7) к максимуму по $i \in I(x_\varepsilon(t))$, получим

$$g(x_\varepsilon(t + \Delta t)) - g(x_\varepsilon(t)) \le \Delta t \max_{i \in I(x_\varepsilon(t))} (\nabla g_i(x_\varepsilon(t)), \dot{x}_\varepsilon(t)) + \max_{i \in I(x_\varepsilon(t))} \alpha_i(\Delta t).$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ из последнего неравенства получим

$$\frac{d}{dt} g(x_\varepsilon(t)) \leq \max_{i \in I(x_\varepsilon(t))} (\nabla g_i(x_\varepsilon(t)), \dot{x}_\varepsilon(t)).$$

Так как на промежутке $[t_*, t^*]$ $g(x_\varepsilon(t)) \geq \varepsilon$, то $h_\varepsilon g(x_\varepsilon(t)) = 0$ и, следовательно,

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(x_\varepsilon(t), u(t)) = \bar{f}(x_\varepsilon(t)).$$

Из определения $\bar{f}(x)$ получаем, что $\dfrac{d}{dt} g(x_\varepsilon(t)) \leq -\rho < 0$ для почти всех $t \in [t_*, t^*]$, откуда имеем $g(x_\varepsilon(t_*)) > g(x_\varepsilon(t^*))$ в противоречие с предположением. Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть S — множество в $\mathbb{R}^n$, заданное системой неравенств $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, функции $g_i(x),\ i = 1, \ldots, m$, выпуклы и удовлетворяют условию Слейтера*:

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad g_i(\bar{x}) < 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Пусть D — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Существует константа $M > 0$ такая, что

$$d(x^*, S) \leq M \max\Big\{ \max_{i=1,\ldots,m} g_i(x^*), 0 \Big\}\ \forall x^* \in D. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $g(x) = \max_{i=1,\ldots,m} g_i(x)$, функция $g(x)$ выпукла и $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$. Обозначим $h = -g(\bar{x}) > 0$. Возьмем произвольную точку $x^* \notin S$, соединим $\bar{x}$ отрезком прямой с x^*. Точки отрезка, соединяющего $\bar{x}$ и x^*, имеют вид $x(\lambda) = x^* + \lambda(\bar{x} - x^*)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Так как $g(x(0)) > 0$ и $g(x(1)) < 0$, на отрезке $[0, 1]$ найдется λ такое, что $g(x(\lambda)) = 0$. Из выпуклости $g(x)$ следует, что

$$0 = g(x(\lambda)) \leq \lambda g(\bar{x}) + (1 - \lambda) g(x^*) = -\lambda h + (1 - \lambda) g(x^*),$$

откуда получим

$$\lambda \leq \frac{g(x^*)}{h + g(x^*)} \leq \frac{g(x^*)}{h}.$$

Из равенства $x(\lambda) - x^* = \lambda(\bar{x} - x^*)$ имеем $\lambda = \|x(\lambda) - x^*\| / \|\bar{x} - x^*\|$.

В итоге, учитывая включение $x(\lambda) \in S$, приходим к неравенству

$$d(x^*, S) \leq \|x(\lambda) - x^*\| \leq \frac{g(x^*)}{h} \|\bar{x} - x^*\| \leq M g(x^*)$$

при $M = \max_{x^* \in D} \|\bar{x} - x^*\| / h$, которое завершает доказательство для $x^* \notin S$. Для $x^* \in S$ неравенство очевидно. □

Лемма 2. *Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, где функции $g_i(x),\ i = 1, \ldots, m$, — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию предположения* 3. *Тогда существуют $M > 0$ такое, что неравенство* (3.8) *справедливо для всех $x \in B_R$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, выбираем любую точку $x \in \partial S$. По условию градиенты $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$, положительно линейно независимы. Тогда найдется $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что $(\nabla g_i(x), h) < 0$, $i \in I(x)$ (см. [26]). Положим $\bar{x} = x + \xi h$, при малых положительных ξ будем иметь $g_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \ldots, k$, т. е. будет выполнено условие Слейтера. Далее применяем лемму 1. □

Теорема 2. *Пусть $f(x, u)$ и ограничения задачи удовлетворяют предположениям* 1, 3, 4. *Тогда для каждого $0 < \varepsilon < \sigma$ имеет место включение $G_0(\theta) \subset G_\varepsilon(\theta)$. Существует константа $L > 0$ такая, что*

$$h(G_0(\theta), G_\varepsilon(\theta)) \leq L\varepsilon. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Траектории вспомогательной системы (2.3) суть траектории дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathtt{co}F(x(t)), \quad x(t_0) = x^0,$$

где $F(x) = f(x, U)$ — компактнозначное, локально липшицево многозначное отображение. Фиксируем $\varepsilon_0 = \sigma/2$ и будем далее рассматривать $\varepsilon < \varepsilon_0$. Для любого $\delta > 0$ и для любой траектории $x_\varepsilon(t)$ системы (2.3) найдется траектория $\bar{x}_\varepsilon(t)$ дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \tag{3.10}$$

(управляемой системы (2.1)) такая, что (см. [25])

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} \|\bar{x}_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)\| \leq \delta.$$

Можно выбрать δ настолько малым, чтобы

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} g(\bar{x}_\varepsilon(t)) < 3\frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу [21, теорема 1] существует константа $K > 0$ такая, что для любой траектории $\bar{x}_\varepsilon(t)$ включения (3.10) существует траектория $\hat{x}(t)$ включения (3.10), удовлетворяющая фазовым ограничениям $\hat{x}(t) \in S$ и неравенству

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} \|\bar{x}_\varepsilon(t) - \hat{x}(t)\| \leq K \max_{t\in[t_0,t_1]} (d(\bar{x}_\varepsilon(t)), S). \tag{3.11}$$

По леммам 1, 2 существует $M > 0$ такое, что

$$d(\bar{x}_\varepsilon(t), S) \leq M \max\big\{ \max_{i=1,\dots,m} g_i(\bar{x}_\varepsilon(t)), 0\big\} \leq \frac{3M\varepsilon}{2},$$

следовательно, неравенство (3.11) можно записать в виде

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} \|\bar{x}_\varepsilon(t)) - \hat{x}(t))\| \leq \frac{3KM\varepsilon}{2}.$$

Так как при $g(x) \leq 0$ имеет место равенство $f_\varepsilon(x, u) = f(x, u)$ $\forall u \in U$, то $G_0(\theta) \subset G_\varepsilon(\theta)$. Для $\hat{x}(\theta) \in G_0(\theta)$, $x_\varepsilon(\theta) \in G_\varepsilon(\theta)$ имеем

$$\|\hat{x}(\theta) - x_\varepsilon(\theta)\| \leq \delta + \frac{3KM\varepsilon}{2}.$$

Поскольку δ можно выбрать сколь угодно малым, то отсюда получаем (3.9) при $L = \dfrac{3KM}{2}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.

6. **Лотов А. В.** Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 67–78.
7. **Матвийчук А.Р., Ушаков В.Н.** О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5–20.
8. **Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P.** Optimization techniques for state-constrained control and obstacle problems // J. Optim. Theory Appl. 2006. Vol. 128, no. 3. P. 499–521.
9. **Baier R., Chahma I. A., Lempio F.** Stability and convergence of Euler's method for state-constrained differential inclusions // SIAM J. Optim. 2007. Vol. 18, no. 3. P. 1004–1026.
10. **Bonneuil N.** Computing reachable sets as capture-viability kernels in reverse time // Appl. Math. 2012. Vol. 3, no. 11. P. 1593–1597. DOI: 10.4236/am.2012.311219.
11. **Костоусова Е.К.** Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
12. **Гусев М.И.** Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
13. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.
14. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
15. **Гусев М.И.** О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 81–86.
16. **Гусев М.И.** Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.
17. **Forcellini F., Rampazzo F.** On non-convex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set // J. Differential Integral Equations. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 471–497.
18. **Frankowska H., Vinter R.B.** Existence of neighboring feasible trajectories: Applications to dynamic programming for state-constrained optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 2000. Vol. 104, no. 1. P. 21–40.
19. **Stern R.J.** Characterization of the state constrained minimal time function // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 2. P. 697–707.
20. **Bettiol P., Frankowska H., Vinter R.B.** L^∞ estimates on trajectories confined to a closed subset // J. Differential Equations. 2012. Vol. 252, no. 2. P. 1912–1933.
21. **Bressan A., Facchi G.** Trajectories of differential inclusions with State Constraints // J. Differential Equations. 2011. Vol. 250, no. 2. P. 2267–2281.
22. **Субботин А.И.**Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
23. **Lions P. L., Souganidis P. E.** Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs's equations // SIAM J. Control Optim. 1985. Vol. 23, no. 4. С. 566–583.
24. **Гусев М.И.** О снятии фазовых ограничений при построении множеств достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 106–115.
25. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М: Наука, 1974. 480 с.
26. Линейные неравенства и смежные вопросы / ред. Г.У. Кун, А.У. Таккер. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 469 с.

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: gmi@imm.uran.ru.

Поступила 09.03.2015