ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ГАРАНТИРУЮЩЕГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ[1]

Н. Л. Григоренко, Ю. А. Кондратьева, Л. Н. Лукьянова

Для линейной управляемой системы с ограничением на управление рассматривается задача терминального управления в целевую точку при принадлежности начальной точки процесса известному множеству и отсутствии информации о том, какая точка из множества является начальной. Приведены достаточные условия существования решения задачи в классе гарантирующих пакетов программ Ю.С. Осипова и А.В. Кряжимского. Приведены результаты расчета модельного примера.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы, гарантирующие пакеты программ, программное управление.

N. L. Grigorenko, Yu. A. Kondrat'eva, L. N. Luk'yanova. The problem of finding a guaranteeing program control for a linear system with incomplete information.

For a linear control system with constrained control, the problem of terminal control to a target point is considered. The starting point of the process belongs to a known set, but there is no information on which point of the set is the starting point. Sufficient conditions are given for the existence of a solution of the problem in the class of Yu.S. Osipov and A.V. Kryazhimskii's guaranteeing program packages. Calculation results are presented for a model example.

Keywords: control, incomplete information, linear systems, guaranteeing program packages, program control.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача терминального управления линейной управляемой системой с ограничением на управление при принадлежности начальной точки процесса известному множеству и отсутствии информации о том, какая точка из множества является начальной. Функция наблюдения задачи зависит от фазовых координат. Ее значение отлично от нулевого только в окрестности целевой точки. Приведены достаточные условия существования решения такой задачи в классе гарантирующих пакетов программ Ю. С. Осипова и А. В. Кряжимского [1–3]. Метод пакетов программ восходит к технике неупреждающих стратегий (квазистратегий) из теории диффенциальных игр [4–6], в его основе — утверждение об эквивалентности задач гарантирующего управления, поставленных в классе позиционных стратегий и в классе пакетов программ, интерпретируемых как идеализированные процедуры управления. Пакет программ — это семейство программных управлений, параметризованное допустимыми начальными состояниями и обладающее свойством неупреждаемости по отношению к реализациям неполного сигнала о наблюдаемых состояниях [1].

Предлагаемые в работе конструкции пакетов программ предполагают выполнение теоремы существования решения задачи управляемости линейных управляемых систем с ограниченным управлением [7–9].

Способы построения таких управлений для конкретных классов моделей, при общих условиях на начальные и конечные значения траекторий, опираются на методы теории оптимального управления, теории обратных задач динамики управляемых систем [6–11], параметрические методы построения ограниченных по норме управлений [12–17], методы нахождения гарантированного времени окончания процесса управления [12; 18–23].

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00539).

Построенные в работе пакеты программ не обладают свойством единственности. Предлагаемые экстремальные задачи на конечном числе таких пакетов позволяют определить экстремальный пакет программ для заданного критерия качества.

1. Постановка задачи построения гарантирующего программного управления при неполной информации

Пусть движение вектора $x \in \mathbb{R}^n$ подчиняется системе уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in [0, \theta], \tag{1.1}$$

где X_0 — компактное множество, P — выпуклое компактное множество, $u(t)$ — параметр управления, A — $(n \times n)$-матрица, B — $(n \times r)$-матрица, θ — заданный момент времени, $\theta > 0$. Уравнение наблюдения имеет вид

$$y = C(x)x, \quad C(x) = \begin{cases} 0, & x \notin m + S_\ell(0), \\ E, & x \in m + S_\ell(0), \end{cases} \tag{1.2}$$

где $0, E$ — постоянные $(n \times n)$-матрицы, 0 — матрица с нулевыми элементами, E — единичная матрица, $S_\ell(0)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса ℓ, ℓ — положительная константа, $m \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Целью процесса управления является приведение вектора $x(t)$ в множество $(m + S_\ell(0))$. Управления $u(t, y(t))$ — измеримые по Лебегу функции t со значением в множестве P.

При выборе управляющего параметра $u(t)$ доступна информация об управляемой системе (1.1), множествах X_0 и P, векторах m, $y(t) = C(x(t))x(t)$, константе ℓ.

З а д а ч а построения гарантирующего программного управления при неполной информации, оканчивающего процесс управления к моменту $T \leq \theta$: Найти допустимое управление, для которого при неизвестной начальной позиции $x_0 \in X_0$ фазовый вектор системы (1.1) посещает множество $m + S_\ell(0)$ не позже момента времени $T \leq \theta$.

2. Построение гарантирующего программного управления при неполной информации о начальной позиции

Решение задачи построения гарантирующего управления при неполной информации будем конструировать в классе пакетов программ [1; 2].

Обозначим $Y(t, t_1) = e^{(t-t_1)A}m + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A}[-BP]ds$ — множество управляемости системы (1.1) на отрезке времени $[t, t_1]$ для конечного состояния m; (h_1, h_2) — скалярное произведение векторов h_1, h_2; $c(P, \psi)$ — опорную функцию множества P [7].

Пусть τ — длина отрезка времени $[t, t_1]$, т. е. $\tau = t_1 - t$. Тогда множество управляемости $Y(t, t_1)$ зависит только от длины отрезка τ и имеет вид

$$Y(t, t_1) = e^{-\tau A}m + \int_0^\tau e^{-sA}[-BP]ds,$$

а его опорная функция задается формулой

$$c(Y(t, t_1), \psi) = (m, e^{-\tau A^*}\psi) + \int_0^\tau c(P, -B^* e^{-sA^*}\psi)ds.$$

Определим функцию $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ соотношением [7]:

$$\varphi(\psi, \tau; z_0, m) = (m, e^{-\tau A^*}\psi) + (z_0, -\psi) + \int\limits_0^\tau c(P, -B^* e^{-sA^*}\psi) ds.$$

Предположение 1. *Для любого $z_0 \in E^n$ существует момент времени $\tau(z_0) \geq 0$ такой, что справедливо условие*

$$\varphi_0(\tau(z_0), z_0, m) = \min_{\psi \in S} \varphi(\psi, \tau(z_0); z_0, m) \geq 0, \tag{2.3}$$

где S — сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса единица с центром в начале координат.

Неравенство (2.3) является необходимым и достаточным условием управляемости системы (1) с ограничением на управление в виде компакта P из точки z_0 в целевую точку m (см. [7]). При его выполнении для любой начальной точки z_0 существует допустимое программное управление $u(t, y(t),\ z_0,\ m,\ \tau(z_0)) = \bar{u}$, переводящее траекторию $x(t, \bar{u}, z_0, m, \tau(z_0)) = \bar{x}(t)$ системы (1) из начальной точки z_0 в конечную точку m за время $\tau(z_0)$.

2.1. Алгоритм построения гарантирующего программного управления. Случай конечного множества начальных позиций

Предположение 2. *Множество $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ состоит из конечного числа точек $x_{01}, \ldots, x_{0N}$, N — натуральное число.*

Обозначим $i_1, i_2, \ldots, i_N$ — перестановку из N натуральных чисел $1, \ldots, N$.

О п р е д е л е н и е 1. Для задачи управления с неопределенностью по N начальным условиям (1.1), (1.2) задан пакет программ $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$, если определены:

1) N положительных чисел $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_N = T$;

2) правило формирования начальной позиции $x_{k-1 i_k}(T_{k-1})$ системы (1.1) и управляющей функции для k-го отрезка $[T_{k-1}, T_k], k = 1, \ldots, N$:

$$u_{1i_1}(t) = u_{1i_1}(t, y(t)), \quad t \in [0, T_1], \quad u_{ki_k}(t) = u_{ki_k}\big(t, u_{1i_1}(\cdot), \ldots, u_{(k-1)i_{k-1}}(\cdot), y(t)\big),$$

$$t \in [T_{k-1}, T_k], \quad k = 2, \ldots, N,$$

где $u_{ji_j}(\cdot)$ — измеримые по Лебегу функции, определенные на отрезке $[T_{j-1}, T_j], j = 1, \ldots, N$, $u_{ji_j}(t) \in P$.

О п р е д е л е н и е 2. Пакет $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ называется гарантирующим в задаче управления (1.1), (1.2) на множество $m + S_\ell(0)$ с неизвестной начальной позицией из множества X_0 к моменту времени T, если при таком управлении для траектории системы выполнено условие $x(t^*) \in m + S_\ell(0),\ t^* \leq T$.

Перейдем к описанию пакета программ $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ для задачи (1.1), (1.2). На каждом из N отрезков определения пакет $\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ содержит информацию о временном отрезке, начальной позиции системы (1.1) и управляющей функции на этом временном отрезке. Начальная позиция системы (1.1) на k-м отрезке рассчитывается по начальным позициям и управлениям предыдущих $k-1$ отрезков.

На первом отрезке пакета (активный индекс пакета i_1) для начального значения x_{0i_1} и конечного значения x_1 согласно предположению 1 существуют гарантированное время T_{1i_1} и управление $u(t, y(t), x_{0i_1}, x_1, T_{1i_1}) = \bar{u}_{1i_1}(t)$, при котором траектория системы (1.1)

$$x(t, \bar{u}_{1i_1}, x_{0i_1}, T_{1i_1}) = \bar{x}_{1i_1}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\bar{x}_{1i_1}(T_{1i_1}) = m.$$

Положим в качестве первого отрезка пакета отрезок $[0, T_{1i_1}]$ начальной позиции первого отрезка x_{0i_1} управляющей функции $\bar{u}_{1i_1}(t)$.

На втором отрезке пакета (активный индекс пакета i_2) начальная позиция отрезка: решение системы (1.1) с начальным условием x_{0i_2} при управлении $u_{1i_1}(t),\ t \in [0, T_{i_1}]$ в момент $T_{i_1} : x_{i2}(T_{i_1})$. Для этой точки как для начальной в силу предположения 1 существуют момент времени T_{2i_2} и управление $u(t, y(t), \bar{x}_{1i_2}, m, T_{2i_2}) = \bar{u}_{2i_2}(t)$, определенное на интервале $[T_{1i_1}, T_{2i_2}]$, при котором траектория системы (1.1)

$$x(t, \bar{u}_{2i_2}, \bar{x}_{1i_2}, T_{2i_2}) = \bar{x}_{2i_2}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\bar{x}_{2i_2}(T_{2i_2}) = m.$$

Положим в качестве второго отрезка пакета интервал $[T_{1i_1}, T_{2i_2}]$ начальной позиции $\bar{x}_{1i_2}(T_{1i_1})$ управляющей функции $\bar{u}_{2i_2}(t)$.

На третьем интервале пакета (активный индекс пакета i_3) начальная позиция отрезка: решение системы (1.1) с начальным условием x_{0i_3} при управлениях $u_{1i_1}(t),\ t \in [0, T_{1i_1}],\ u_{2i_2}(t),$ $t \in [T_{1i_1}, T_{2i_2}]$, в момент $T_{2i_2} : x_{2i_3}(T_{2i_2})$. Для этой точки как для начальной в силу предположения 1 существуют отрезок $[T_{2i_2}, T_{3i_3}]$ и управление $u(t, y(t), \bar{x}_{2i_3}, m, T_{3i_3}) = \bar{u}_{3i_3}(t)$, при котором траектория системы (1.1)

$$x(t, \bar{u}_{3i_3}, \bar{x}_{2i_2}, T_{3i_2}) = \bar{x}_{3i_3}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\bar{x}_{3i_3}(T_{3i_3}) = m.$$

Положим в качестве третьего отрезка пакета интервал $[T_{2i_2}, T_{3i_3}]$ начальной позиции $\bar{x}_{2i_3}(T_{2i_2})$ управляющей функции $\bar{u}_{3i_3}(t)$.

На k-м интервале $4 \le k \le N$ (активный индекс пакета i_k), начальная позиция отрезка: решение системы (1.1) с начальным условием x_{0i_k} при управлениях $u_{1i_1}(t),\ t \in [0, T_{1i_1}],\ u_{2i_2}(t),$ $t \in [T_{1i_1}, T_{2i_2}], \ldots, u_{k-1i_{k-1}}(t),\ t \in [T_{k-2i_{k-2}}, T_{k-1i_{k-1}}]$, в момент $T_{k-1i_{k-1}} : x_{k-1i_k}(T_{k-1i_{k-1}})$. Для этого вектора как начальной позиции в силу предположения 1 существуют отрезок $[T_{k-1i_{k-1}}, T_{ki_k}]$ и управление $u(t, y(t), \bar{x}_{k-1i_k}, T_{ki_k}) = \bar{u}_{ki_k}(t)$, при котором траектория системы (1.1)

$$x(t, \bar{u}_{k-1i_k}, \bar{x}_{k-1i_k}, T_{ki_k}) = \bar{x}_{ki_k}(t)$$

удовлетворяет условию

$$\bar{x}_{ki_k}(T_{ki_k}) = m.$$

Положим в качестве k–го отрезка интервал $[T_{k-1i_{k-1}}, T_{ki_k}]$ начальной позиции $\bar{x}_{ki_k}(T_{k-1i_{k-1}})$ управляющей функции $\bar{u}_{ki_k}(t)$.

Таким образом, пакет $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ сформирован. Таких пакетов $N!$. В обозначениях определения 1 для пакета $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ имеем: $T_1 = T_{1i_1},\ T_2 = T_{2i_2},\ \ldots, T = T_{Ni_N}$. Управляющими функциями пакета на интервалах являются

$$u_{1i_1}(t),\quad t \in [0, T_{1i_1}],\quad u_{2i_2}(t),\quad t \in [T_{1i_1}, T_{2i_2}],\quad \ldots,\quad u_{Ni_N}(t),\quad t \in [T_{N-1i_{N-1}}, T_{Ni_N}].$$

Утверждение 1. *Если для системы* (1.1) *выполнены предположения* 1 *и* 2, *то в задаче управления с неполной информацией и функцией наблюдения* (1.2) *существует управление в форме гарантирующего пакета программ* $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ *при* $l = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применение управления в виде пакета $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ гарантирует, что траектория системы (1.1) с начальным условием x_{0i_1} попадает в x_1 не позже чем в конце первого отрезка времени. Применение управления в виде пакета $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ гарантирует, что траектория системы (1.1) с начальным условием x_{0i_2} попадает в x_1 не позже чем в конце второго отрезка времени. Применение управления в виде пакета $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ гарантирует, что траектория системы (1.1) с начальным условием x_{0i_k} попадает в m не позже чем в конце k-го отрезка времени, $k \le N$. Таким образом, пакет $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ является гарантирующим. □

Среди $N!$ гарантирующих пакетов отметим пакеты с экстремальными свойствами:

а) пакет с минимальным гарантированным временем окончания процесса управления:

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_N\} = \operatorname{argmin}_{\{i_1,i_2,\ldots,i_N\}} T_{\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}}, \tag{2.1}$$

где $T_{\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}}$ — суммарное время интервалов пакета;

б) пакет соответствующий экстремальной задаче на минимум квадратичного функционала:

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_N\} = \operatorname{argmin}_{\{i_1,i_2,\ldots,i_N\}} \sum_{k=1}^{N} \int_{T_{k-1}}^{T_k} \|\bar{u}_{ki_k}(t)\|^2 dt;$$

в) пакет соответствующий экстремальной задаче с интегральным функционалом общего вида:

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_N\} = \operatorname{argmin}_{\{i_1,i_2,\ldots,i_N\}} \sum_{k=1}^{N} \int_{T_{k-1}}^{T_k} G(x(t), \bar{u}_{ki_k}(t)) dt,$$

где $G(x, u)$ — скалярная функция, непрерывная по x, u, Пример расчета гарантированного пакета с экстремальным свойством (2.1) приведен в разд. 3.

2.2. Построение гарантирующего программного управления при неполной информации о начальной позиции. Случай компактного множества начальных позиций

Пусть X_0 — компактное множество, $x_1, \ldots, x_N$ — центры n-мерных кубов со стороной ε, объединение которых содержит множество X_0, M_0 — множество векторов $x_1, \ldots, x_N$.

Пусть $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ — пакет программ, построенный по N точкам множества M_0, и T_i — границы отрезков пакета. Для решений уравнения (1.1) имеет место оценка (см. [18, с. 57])

$$\|x(t,\ x_{00}) - x(t,\ x_{01})\| \le \|x_{00} - x_{01}\| e^{Lt}, \tag{2.2}$$

где L — положительная константа, вычисляемая по параметрам процесса (1.1). Константа L далее используется в изложении.

Утверждение 2. *Если для системы* (1.1) *выполнено предположение* 1 *и* X_0 — *компактное множество, то в задаче управления с неполной информацией и функцией наблюдения* (1.2) *пакет программ* $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$, *построенный для системы (1.1) и конечного множества начальных векторов* M_0, *обеспечивает условие* $x(t^*) \in m + S_\ell(0),\ t^* \le T$, *при*

$$\ell \ge \varepsilon/\sqrt{2}\ e^{LT}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество X_0 является компактным и $x_1, \ldots,\ x_N$ — центры n-мерных кубов со стороной ε, объединение которых содержит множество X_0.

Применяя к конечному числу узлов сетки итерационный процесс построения управления из подразд. 2.1 и учитывая (2.2), получаем, что пакет $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ является гарантирующим на первом отрезке для точек $\|x_{00} - x_{01}\| \le \varepsilon/\sqrt{2}$, если $l(T_1) \ge \varepsilon/\sqrt{2}\ e^{LT_1}$. Аналогично можно показать, что пакет $\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ является гарантирующим на k — ом интервале $1 \le k \le N$, если $l \ge l(T_k) = \varepsilon/\sqrt{2}\ e^{LT_k}$. □

З а м е ч а н и е. Зависимость между параметрами ε и N определяется геометрией множества X_0.

3. Построение гарантирующего программного управления при неполной информации о начальной позиции для системы второго порядка

Пусть движение вектора $x \in \mathbb{R}^2$ подчиняется следующему уравнению:

$$\ddot{x} = u, \quad \|u(t)\| \le \rho, \tag{3.1}$$

ρ — положительный параметр. Множество начальных значений и конечная позиция имеет вид

$$\begin{gathered} X_0 = \{x(0) = x_{0i},\ \dot{x}(0) = \dot{x}_{0i},\ i = 1, \ldots, 3\}, \\ x(T) = m_1 = (m_{11}, m_{12}), \quad \dot{x}(T) = m_2 = (m_{21}, m_{22}). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Для системы (3.1) выполнение предположения 1 может быть доказано непосредственной проверкой соотношения (2.3) [7]. Приведем другое доказательство выполнения предположения 1 для системы (3.1), содержащее явный вид управления, решающего задачу управляемости для краевых условий и способ вычисления гарантированного времени окончания процесса.

Зададим эталонную траекторию и выпишем ее производные по времени t (см. [14]):

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3, \quad \dot{x} = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2, \quad \ddot{x} = 2C_2 + 6C_3 t, \tag{3.3}$$

где $C_i \in \mathbb{R}^2,\ i = 0, 1, 2, 3$. Из условий на начальное и конечное положение (3.2) находим $C_0 = x(0),\ C_1 = \dot{x}(0)$. Векторы C_2, C_3 являются решением системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_2 T^2 + C_3 T^3 & = & x(T) - x(0) - \dot{x}(0)T = B_1, \\ 2C_2 T + 3C_3 T^2 & = & \dot{x}(T) - \dot{x}(0) = A_1, \end{array} \right.$$

откуда получаем

$$\begin{array}{rcl} C_2(T) = \dfrac{3B_1 - A_1 T}{T^2} & = & \dfrac{1}{T^2}\big(3x(T) - 3x(0) - 2T\dot{x}(0) - T\dot{x}(T)\big), \\ C_3(T) = \dfrac{A_1 T - 2B_1}{T^3} & = & \dfrac{1}{T^3}\big(T\dot{x}(T) + T\dot{x}(0) - 2x(T) + 2x(0)\big). \end{array} \tag{3.4}$$

Таким образом, векторы $C_i,\ i = 0, \ldots, 3$, в соотношении (3.3) выражены через граничные условия (3.2) и параметр T. Управление u может быть выражено из системы (1.1) через фазовые переменные и имеет вид

$$u = \ddot{x}. \tag{3.5}$$

Подставив в выражение (3.5) соотношения (3.3), получаем программное управление, переводящее систему (1.1) из начального положения $(x_{0i}, \dot{x}_{0i})$ в конечное положение $(x(T),\ \dot{x}(T))$:

$$u(t, T) = 2C_2(T) + 6C_3(T)t. \tag{3.6}$$

Перейдем к нахождению параметра T, при котором управление (3.6) допустимо.

Утверждение 3. *Справедливо соотношение* $\max_{t\in[0,T]} \|u(t, T)\| \to_{T\to\infty} 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из соотношений (3.6) и (3.4). □

Утверждение 4. *Для управляющей функции* (3.6) *условие* $\|u(t)\| \le \rho$, $t \in [0, T_1]$, *выполнено при величине* $T_1 \ge T$, *где* T — *наименьшее положительное* T, *удовлетворяющее условиям*

$$4\|C_2(T)\|^2 - \rho^2 \le 0, \quad 4\|C_2(T)\|^2 + 24(C_2(T), C_3(T))T + 36\|C_3(T)\|^2 T^2 - \rho^2 \le 0.$$

Доказательство. Согласно (3.6)

$$\|u(t)\|^2 - \rho^2 = 4\|C_2(T)\|^2 + 24(C_2(T), C_3(T))t + 36\|C_3(T)\|^2 t^2 - \rho^2 = \Phi(t, T).$$

Из свойств квадратичной функции при положительном коэффициенте при старшей степени имеем: при выполнении неравенств $\Phi(0, T) \le 0$, $\Phi(T, T) \le 0$ для $t \in [0, T]$ функция $\Phi(t, T) \le 0$. Утверждение 4 доказано. □

Утверждение 4 используется далее при расчете временных отрезков гарантированного пакета программ.

Приведем результаты численных расчетов управления, траектории и гарантированного времени окончания процесса управления для следующих параметров управляемого процесса (3.1):

$$\rho = 15, x(T) = (50, 70), \ \dot{x}(T) = (-1, 2),$$

$$x_{01} = (-10, -20), \quad x_{02} = (-20, -10), \ x_{03} = (-30, 10), \tag{3.7}$$

$$\dot{x}_{01} = (4, -6), \quad \dot{x}_{02} = (-10, -7), \quad \dot{x}_{03} = (-14, 9). \tag{3.8}$$

Пакет программ $\prod_{123}$ имеет три временных отрезка $[0, T_1] = [0, 6.97]$, $[T_1, T_2] = [6.97, 15.94]$, $[T_2, T_3] = [15.94, 29.58]$. При его применении гарантированное время посещения фазовым вектором системы (3.1) целевой точки не более 29.58. Программные управления на интервале $[0, T_1]$:

$$u_1(t) = 2\begin{pmatrix} 2.7 \\ 6.99 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -0.29 \\ -0.614 \end{pmatrix} t,$$

на интервале $[T_1, T_2]$:

$$u_2(t) = 2\begin{pmatrix} 7.46 \\ -0.56 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -0.497 \\ 0.046 \end{pmatrix} t,$$

на интервале $[T_2, T_3]$:

$$u_3(t) = 2\begin{pmatrix} 1.996 \\ -7.22 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -0.09 \\ 0.324 \end{pmatrix} t.$$

Графики двумерных, параметрически заданных функций $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, приведены на рис. 1–3. Пунктиром выделен круг радиуса $\rho = 15$ — граница области управления. Направление движения двумерного вектора $u(t)$ при $t \in [T_{i-1}, T_i]$, $i = 1, 2, 3$, можно восстановить из приведенного выше явного вида параметрических функций $u_1(t), \ldots, u_3(t)$.

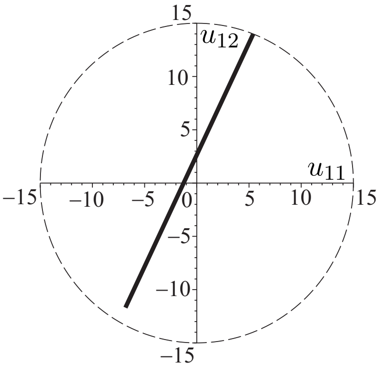

Рис. 1.

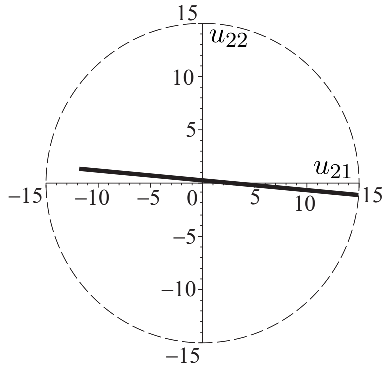

Рис. 2.

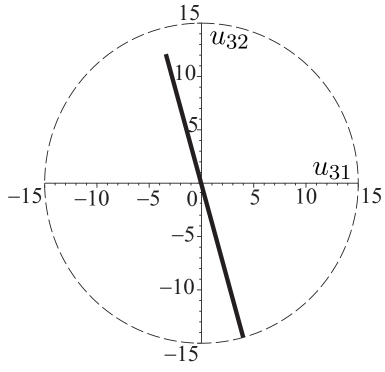

Рис. 3.

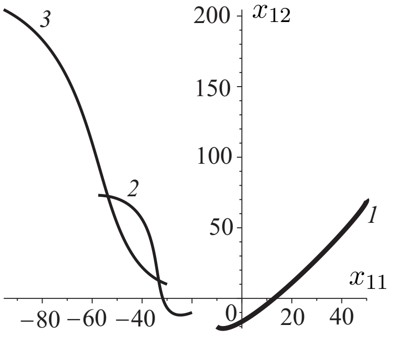

Рис. 4.

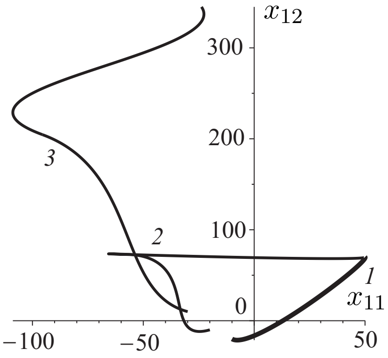

Рис. 5.

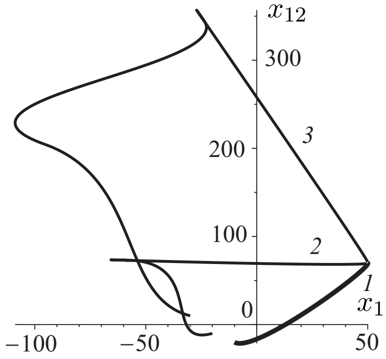

Рис. 6.

Графики траекторий, реализуемых при применении пакета $\prod_{123}$ на интервале $[0,T_1]$, приведены на рис. 4, на интервале $[0,T_2]$ — на рис. 5, на интервале $[0,T_3]$ — на рис. 6. На рис. 4–6 оси координат x_{11},x_{12} — компоненты двумерного вектора x (3.1).

Гарантированное время окончания процесса управления для других пакетов $\prod_{i_1,i_2,i_3}$:

$$T_{1,2,3}=29.58,\quad T_{1,3,2}=33.87,\quad T_{2,1,3}=34.51,\quad T_{2,3,1}=36.24,\quad T_{3,1,2}=33.55,\quad T_{3,2,1}=29.69.$$

Таким образом, для краевых условий (3.7), (3.8) наименьшее гарантированное время окончания процесса управления соответствует пакету $\prod_{1,2,3}$.

Заключение

Построенное в подразд. 2.1 управление в форме пакета программ обладает свойствами универсальной стратегии (в терминологии работ [4;5;15;16]) по отношению к неопределенности в выборе ε сети множества X_0, фигурирующей в п.2.2.

Авторы благодарны А. В. Кряжимскому за постановку задачи, обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4 (370). С. 25–76.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
3. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 168–177.
4. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1987. 517 p.
5. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимзация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 285 с.
6. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 291 с.
7. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.
8. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
9. **Никольский М.С.** Об одной задаче осуществления заданного движения. Гибкие системы // Докл. РАН. 1996. Т. 350, № 6. С. 739–741.
10. **Понтрягин Л.С.** Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004. 552 с.

11. **Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Об аппроксимации нелинейных конфликтно управляемых систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 204–217.
12. **Гусев М.И.** Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.
13. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме управления линейной системой при измерении части координат фазового вектора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 218–230.
14. **Батенко А.П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 161 с.
15. **Субботина Н.Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 11. С. 1890–1896.
16. **Субботина Н.Н.** Некоторые достаточные условия существования универсальных стратегий // Исследование задач минимаксного управления: сб. науч. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. С. 72–81.
17. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1305–1315.
18. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
19. **Крутько П.Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.
20. **Ушаков В.Н., Лавров Н.Г., Ушаков А.В.** Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 277–286.
21. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмурт. ун-т, 2009. 266 с.
22. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
23. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 373 с.

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: grigor@cs.msu.su

Поступила 01.03.2015

Кондратьева Юлия Андреевна
аспирант
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: kond.yulia@gmail.com

Лукьянова Лиля Николаевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: lln@cs.msu.su