ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.9

АБСТРАКТНАЯ ЗАДАЧА О ДОСТИЖИМОСТИ: "ЧИСТО АСИМПТОТИЧЕСКАЯ" ВЕРСИЯ[1]

А. Г. Ченцов

Рассматривается задача о достижимости в топологическом пространстве при ограничениях асимптотического характера. Исследуются конструкция расширения, использующая элементы компактификаций, и более общие процедуры с применением обобщенных элементов. Основное внимание уделяется случаю отсутствия точных решений, для которого изучаются условия реализации множества допустимых обобщенных элементов в наросте, возникающем при погружении пространства обычных решений. В частности, указаны условия, обеспечивающие упомянутую реализацию в наросте при использовании (в качестве обобщенных элементов) ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств.

Ключевые слова: множество притяжения, топологическое пространство, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. An abstract reachability problem: "purely asymptotic" version.

A reachability problem in a topological space under constraints of asymptotic nature is considered. An extension construction using elements of compactification, as well as more general procedures employing generalized elements, is studied. The primary focus is on the case where exact solutions are absent. For this case, we study conditions for the realization of the set of admissible generalized elements in a remainder appearing under the immersion of the space of ordinary solutions. In particular, we specify conditions that provide such a realization in a remainder in the case of using (as generalized elements) ultrafilters of broadly understood measurable spaces.

Keywords: attraction set, topological space, ultrafilter.

1. Введение

Настоящий выпуск журнала посвящен Андрею Измайловичу Субботину, выдающемуся ученому-математику, одному из создателей теории дифференциальных игр и целого ряда других направлений современной математики. Автору довелось обсуждать с Андреем Измайловичем вопросы, излагаемые в настоящей работе. Эти обсуждения всякий раз способствовали лучшему пониманию проблемы; они были своеобразными импульсами, помогавшими в исследовании абстрактных постановок и поиску смысла в проведении таких исследований. Автор благодарен судьбе за возможность столь плодотворного общения с А. И. Субботиным.

В работе используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, ОАХ — ограничения асимптотического характера, ОД — область достижимости, ОЭ — обобщенный элемент, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр, ЭП — элемент притяжения.

Статья посвящена исследованию вопросов, связанных с решением абстрактных задач о достижимости при ОАХ. Упомянутые ОАХ могут возникать изначально, непосредственно определяя асимптотику выбора элементов исходного пространства обычных решений, а могут соответствовать процедурам возмущения, и в частности ослабления стандартных ограничений (таковыми являются в задачах управления краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения). Так или иначе, можно полагать, что ОАХ определяются посредством задания непустого семейства п/м пространства обычных решений (управлений). Один из вариантов

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления" и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 15-01-07909, 13-01-00304а).

введения ОАХ рассматривался в [1, гл. III] в свете классификации Дж. Варги: точные, обобщенные и приближенные решения в задачах оптимизации, и прежде всего в задачах оптимального управления. Определяемые в [1, гл. III] приближенные решения-последовательности по своему смыслу являются асимптотическими (здесь же напомним работы [2; 3], где подобные конструкции использовались в задачах математического программирования).

Следует отметить, что наряду с излагаемыми в [1, гл. III] конструкциями, реализующими ОАХ посредством последовательного ослабления стандартных ограничений, рассматривались [4;5] естественные постановки, в которых ОАХ (возникающие изначально) непосредственно задаются в виде непустого семейства множеств.

В настоящей работе, продолжающей серию публикаций автора, обсуждаются вопросы, связанные с достижимостью в ТП при наличии ОАХ. В этой связи имеет смысл выделить два варианта задачи о достижимости и на этой основе указать важную функцию расширений исходной задачи, а именно: сведение более сложной и, по сути, асимптотической версии этой задачи к более простой — стандартной. Не вдаваясь в подробности, укажем гипотетическую возможность упомянутого сведения, для чего вначале обсудим и соответствующие варианты задачи о достижимости.

Итак, пусть имеются непустые множества X и Y, (целевое) отображение $f\colon X \to Y$ и множество M, содержащееся в X. Рассматривая точки $x \in X$ как решения, подлежащие выбору, а точки Y — как желаемые результаты, множество-образ $f^1(M) = \{f(x)\colon x \in M\}$ можно (при $M \subset X$) интерпретировать как некоторый аналог ОД в задачах управления, отвечающий ограничению $x \in M$ (выбирая такие x, получаем в виде результата $f(x) \in f^1(M)$). Достижимость элементов Y в упомянутом смысле будем называть *стандартной* (ОД в теории управления есть важный частный случай данной конструкции).

Другой вариант реализуется в условиях, когда вместо одного множества M задано непустое семейство $\mathcal{M}$ п/м X (в этом случае $\mathcal{M}$ порождает ОАХ), а Y оснащено отделимой топологией t (последняя может быть метризуемой, что соответствует рассмотрению метрического пространства с “единицей” Y). В этом случае семейству $\mathcal{M}$ можно сопоставить МП $(\mathrm{AS})[\mathcal{M}]$ в (Y, t), реализуемое на значениях f. Точное определение этого МП в общем случае сейчас не рассматриваем, но в наиболее интересном для практики случае, когда $\mathcal{M}$ есть БФ (см. [6, с. 101]), упомянутое МП есть пересечение замыканий (в (Y, t)) множеств-образов $f^1(B)$, $B \in \mathcal{M}$. Второй вариант задачи о достижимости (первый мы назвали стандартным) будем связывать как раз с построением МП, что объективно представляет собой, конечно, более сложную проблему. Вполне естественным представляется желание свести данный второй вариант к (более простому в логическом отношении) первому. Реализовать упомянутое сведение удается во многих практически интересных случаях на основе идеи расширения пространства обычных решений. При этом X погружается (см. [7, предложение 5.2.1]) в то или иное компактное ТП $(K, \tilde{t})$, а f “заменяется” непрерывным (в смысле $(K, \tilde{t})$ и (Y, t)) отображением $\tilde{f}$ с соблюдением условия $f = \tilde{f} \circ m$, где m есть оператор на X, осуществляющий погружение последнего в K. В этом случае удается указать множество K_o, $K_o \subset K$, образ $\tilde{f}^1(K_o)$ которого как раз и определяет искомое МП.

Конкретный выбор набора $(K, \tilde{t}, m, \tilde{f})$ может осуществляться различными способами, что соответствует объективно различным вариантам расширения исходной задачи. В теории управления широко используется схема расширения, реализуемая в классе мерозначных функций (см. [1; 8; 9] и др.), т. е. в классе управлений-мер. В работах Н. Н. Красовского и его учеников упомянутая схема использовалась как при исследовании разрешимости дифференциальной игры (при определении стабильных мостов Н. Н. Красовский и А. И. Субботин использовали обобщенные реакции на управления игрока-противника, что сыграло важную роль в установлении ими фундаментальной теоремы об альтернативе; см. [10; 11]), так и при построении вспомогательных программных конструкций для позиционного управления. Вопросы, связанные с взаимодействием обобщенных и приближенных решений, подробно рассматривались в [1, гл. III, IV].

Отметим, что в общей топологии интенсивно развивается направление, связанное с расширением ТП (см., например, [12; 13]). При целом ряде существенных различий расширения в задачах прикладной математики (в частности, в теории управления) и в топологии имеют много общего. Возникает, в частности, естественный вопрос о возможности и целесообразности применения “топологических” расширений при исследовании абстрактных задач о достижимости. Этот вопрос касается вышеупомянутой возможности сведения асимптотической версии задачи о достижимости к стандартной. Представляется, что “топологические” расширения могут дополнять подходы на основе традиционных (для соответствующей области прикладной математики) конструкций.

Одна из таких возможностей обсуждается в статье и связывается с реализацией ОЭ в наросте, возникающем при погружении пространства обычных решений в соответствующее компактное ТП. Наиболее понятной данная ситуация становится при отсутствии точных решений, понимаемых в смысле, подобном [1, гл. III]. Полезно отметить, однако, что в случае исследования задачи с ОАХ множество допустимых ОЭ есть вариант МП.

Чтобы уточнить данное высказывание, вернемся к рассмотрению асимптотического варианта задачи о достижимости, следуя вышеупомянутому толкованию $X, (Y, t), f$ и сопоставляя непустому семейству $\mathcal{M}$ п/м X соответствующее МП (AS)[$\mathcal{M}$]. Кроме того, пусть $(K, \tilde{t}, m, \tilde{f})$ есть вышеупомянутый набор со свойствами компактности $(K, \tilde{t})$, непрерывности $\tilde{f}$ и равенства $f = \tilde{f} \circ m$ (более подробное описание было приведено выше). Тогда множество K_o (допустимых ОЭ) само является МП в $(K, \tilde{t})$, для которого $(\mathrm{AS})[\mathcal{M}] = \tilde{f}^1(K_o)$; построение K_o подобно аналогичному построению (AS)[$\mathcal{M}$] при очевидных заменах $(Y, t) \longrightarrow (K, \tilde{t}),\ f \longrightarrow m$. В этой связи полагаем $(\mathrm{as})[\mathcal{M}] \triangleq K_o$ с тем, чтобы подчеркнуть зависимость от $\mathcal{M}$. Получаем, что

$$(\mathrm{AS})[\mathcal{M}] = \tilde{f}^1((\mathrm{as})[\mathcal{M}]). \tag{1.1}$$

Основной операцией при построении МП (1.1) можно считать теперь построение вспомогательного МП (as)[$\mathcal{M}$]. Пересечение же всех множеств из $\mathcal{M}$ можно рассматривать в качестве аналога множества точных решений Дж. Варги (см. [1, гл. III]). Представляет интерес случай, когда упомянутое пересечение пусто, т. е. точных (обычных) решений не существует вовсе. Это, однако, не означает еще пустоты МП (as)[$\mathcal{M}$], а стало быть, и (AS)[$\mathcal{M}$].

Представляется, что в упомянутом случае отсутствия точных решений естественно ожидать свойства $(\mathrm{as})[\mathcal{M}] \subset K \setminus m^1(X)$, где $m^1(X) = \{m(x) \colon x \in X\}$. Иными словами, логично ожидать реализации ОЭ в наросте. Тем не менее, это свойство может отсутствовать (см. пример в разд. 4).

Вместе с тем в широком классе “топологических” расширений упомянутое свойство “реализации в наросте” уже имеет место; в качестве ОЭ при этом используются у/ф широко (см. [14–16]) понимаемых ИП. Обсуждению данной возможности посвящается настоящая статья. Соответствующая схема излагается при этом в более общем в сравнении с потребностями реализации (1.1) варианте, что может оказаться полезным в некоторых оценочных конструкциях, когда (1.1) не достигается и реализуется всего лишь вложение $\tilde{f}^1\big((\mathrm{as})[\mathcal{M}]\big) \subset (\mathrm{AS})[\mathcal{M}]$ (случай, когда ТП $(K, \tilde{t})$ некомпактно).

2. Обозначения и определения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, связки; $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Символ def заменяет фразу “по определению”, а $\exists!$ (как обычно) — фразу “существует и единственно”. Принимаем аксиому выбора и называем семейством множество, все элементы которого сами являются множествами. Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x. Через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых п/м множества X. Пусть $\mathrm{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Тогда для всякого множества H в виде $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big)$

имеем семейство всевозможных непустых подсемейств $\mathcal{P}(H)$. При этом $\mathbf{C}_H[\mathcal{H}] \triangleq \{H \setminus S\colon S \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big)\ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big)$ (введено семейство всевозможных дополнений множеств фиксированного семейства). Через B^A обозначаем множество всех отображений из множества A в множество B (при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a). Как обычно, при $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ в виде $g^1(C) \triangleq \{g(c)\colon c \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ реализуется образ C при действии g, $g^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$. Рассматриваем также "образы" семейств: если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — непустые множества, $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$, то $f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(A)\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{B})\big)$ интерпретируем как "образ" $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{E}$ — непустое семейство, то полагаем, что

$$\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \triangleq \Big\{\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma\colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})\Big\}. \tag{2.1}$$

Семейства множеств. Фиксируем в пределах настоящего пункта непустое множество I. Будем рассматривать те или иные специальные семейства из $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ и их совокупности: так, в виде

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\,\&\,(I \in \mathcal{I})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \ \forall B \in \mathcal{I})\}$$

имеем семейство всех π-систем [17, с. 14] п/м I с "нулём" и "единицей";

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A}\ \ \forall A \in \mathcal{A}\}, \quad (\mathrm{top})[I] \triangleq \Big\{\tau \in \pi[I] \,\Big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\} \tag{2.2}$$

— семейства всех алгебр п/м I и всех топологий на I. Условимся рассматривать пары $(I,\mathcal{I})$, где $\mathcal{I} \in \pi[I]$, как ИП, используя, конечно, здесь расширительное толкование. Среди таких ИП выделяем отделимые, полагая, что

$$\tilde{\pi}^o[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \ \forall x \in I \setminus L\ \ \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda)\,\&\,(\Lambda \cap L = \varnothing)\} \tag{2.3}$$

(из (2.2), (2.3) следует, что $(\mathrm{alg})[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$). Если $\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^o[I]$, то пару $(I,\mathcal{J})$ рассматриваем как отделимое ИП. Сами π-системы из множества (2.3) также называем *отделимыми*. Полагаем также, что

$$\pi'_o[I] \triangleq \{\mathcal{J} \in \pi[I] \mid \{x\} \in \mathcal{J}\ \ \forall x \in I\}. \tag{2.4}$$

Понятно, что $\pi'_o[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$. В (2.4) введены π-системы с синглетонами.

В дальнейшем через $\beta[I]$ (через $\beta_o[I]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(I)\big)$) таких, что

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2. \tag{2.5}$$

Семейства из $\beta[I]$ являются в силу (2.5) направленными (двойственно к вложению), а семейства из $\beta_o[I]$ суть БФ множества I и только они.

Фильтры π-систем, I. В настоящем пункте фиксируем ИП $(I,\mathcal{I})$, $I \neq \varnothing$, $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Элементы семейства

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \triangleq \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F})\\ \&\,\big(\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall J \in \mathcal{I}\ \ (F \subset J) \Rightarrow (J \in \mathcal{F})\big)\big\}\end{aligned} \tag{2.6}$$

являются фильтрами ИП $(I,\mathcal{I})$ (в широком толковании последнего), а элементы

$$\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \tag{2.7}$$

— соответственно у/ф данного ИП. Каждое из семейств (2.6), (2.7) непусто. Для построения фильтров и у/ф традиционно используются базы: если $\mathcal{B} \in \beta_o[I]$, то

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \triangleq \{J \in \mathcal{I} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I});$$

обычно бывают достаточны базы из семейства $\beta_I^o(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\widetilde{\mathcal{B}} \in \beta_o[I] \mid \widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{I}\}$, т. е. БФ, содержащиеся в $\mathcal{I}$. Заметим, что при $x \in I$

$$\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x] \overset{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{I} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}), \tag{2.8}$$

но возможен случай, когда $\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x] \notin \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})$ ((2.8) — тривиальный фильтр, соответствующий точке x). Тогда множество

$$\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \big\{\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x] \colon x \in I\big\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}^*(\mathcal{I})\big)$$

рассматриваем как результат погружения I в $\mathbb{F}^*(\mathcal{I})$ посредством оператора

$$\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot] \colon I \longrightarrow \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \tag{2.9}$$

(образ I при действии оператора (2.9));

$$\mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}) \,\Big|\, \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \varnothing\Big\} = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}) \setminus \mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}) \tag{2.10}$$

есть множество всех свободных у/ф ИП $(I,\mathcal{I})$. Если $L \in \mathcal{I}$, то

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\}. \tag{2.11}$$

В этих терминах определяем множества

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}|\,\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}) \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \Phi_{\mathcal{I}}(J) \quad \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}), \tag{2.12}$$

играющие в дальнейшем важную роль. Обобщая (2.11), введем

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{I}|\,A] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}) \mid A \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}\} \quad \forall A \in \mathcal{P}(I) \tag{2.13}$$

(действительно [16, с. 92], $\Phi_{\mathcal{I}}(L) = \mathbf{F}_o^*[\mathcal{I}|\,L]$ при $L \in \mathcal{I}$). Отметим, что (см. [15;16]) при условии $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^o[I]$ (случай отделимого ИП) $\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x] \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})\ \forall x \in I$. Следовательно, в данном случае (2.9) есть погружение I в $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})$. Данное свойство используется ниже без дополнительных пояснений.

Частный случай. Полагаем в пределах данного пункта, что $\mathcal{I} = \mathcal{P}(I)$, где I — непустое множество. Тогда пусть $\mathfrak{F}[I] \overset{\triangle}{=} \mathbb{F}^*\big(\mathcal{P}(I)\big)$, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \overset{\triangle}{=} \mathbb{F}_o^*\big(\mathcal{P}(I)\big)$ и $(I - \mathrm{fi})[\mathcal{B}] \overset{\triangle}{=} (I - \mathrm{fi})[\mathcal{B}|\,\mathcal{P}(I)]\ \forall \mathcal{B} \in \beta_o[I]$. Ясно, что $(I - \mathrm{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}[I]$ при $\mathcal{B} \in \beta_o[I]$. Кроме того,

$$(I - \mathrm{ult})[x] \overset{\triangle}{=} \big(\big(I, \mathcal{P}(I)\big) - \mathrm{ult}\big)[x] = \{J \in \mathcal{P}(I) \mid x \in J\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \quad \forall x \in I.$$

Наконец, имеем естественный вариант (2.11): если $L \in \mathcal{P}(I)$, то

$$\Phi_o(L|\,I) \overset{\triangle}{=} \Phi_{\mathcal{P}(I)}(L) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid L \in \mathcal{U}\}. \tag{2.14}$$

С (2.14) связываем процедуру, подобную (2.12): если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$, то

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^o[I|\,\mathcal{J}] \overset{\triangle}{=} \mathbb{F}_o^*\big(\mathcal{P}(I)|\,\mathcal{J}\big) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \Phi_o(J|\,I). \tag{2.15}$$

Элементы топологии, I. В настоящем пункте фиксируем $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, где I — непустое множество; итак (I,τ) есть ТП и, в частности, ИП в нашем расширительном толковании, а потому (2.6), (2.7) применимы в (нашем) случае $\mathcal{I} = \tau$. Если $x \in I$, то $N^o_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$ и, в частности, $N^o_\tau(x) \in \beta_o[I]$, а потому определен фильтр

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} (I - \mathbf{fi})[N^o_\tau(x)] \in \mathfrak{F}[I]$$

окрестностей x в ТП (I, τ), понимаемых в смысле [18, гл. I]. Множеству $H \in \mathcal{P}(I)$ сопоставляем замыкание $\mathrm{cl}(H, \tau)$ и внутренность $(\tau - \mathrm{Int})[H] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I \mid H \in N_\tau(x)\} \in \tau$. Наконец,

$$(\tau - \mathrm{isol})[I] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I \mid \{x\} \in \tau\} \tag{2.16}$$

есть множество всех изолированных в (I, τ) точек I. Легко видеть, что $(\tau - \mathrm{isol})[I] \in \tau$. Через $(\tau - \mathrm{dens})[I]$ обозначаем семейство всех всюду плотных в (I, τ) п/м I:

$$(\tau - \mathrm{dens})[I] \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(I) \mid I = \mathrm{cl}(H, \tau)\}.$$

Напомним, что $\mathbf{C}_I[\tau] = \{I \setminus G \colon G \in \tau\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ есть семейство всех замкнутых в (I, τ) п/м I. Далее через $(\tau - \mathrm{comp})[I]$ обозначаем семейство всех компактных в ТП (I, τ) п/м множества I. Следуя [18, гл. I], полагаем, что $\forall \mathcal{B} \in \beta_o[I]\ \ \forall x \in I$

$$(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(N_\tau(x) \subset (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big). \tag{2.17}$$

Разумеется, посредством (2.17) определена, в частности, сходимость фильтров и у/ф.

Фильтры $\boldsymbol{\pi}$-систем, II. В настоящем пункте вновь фиксируем ИП $(I, \mathcal{I})$, $I \neq \varnothing$, $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Используя (2.11), введем (непустое) семейство $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(J) \colon J \in \mathcal{I}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}\big(\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})\big)\big)$, которое, как легко видеть, есть база топологии

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})\big) \mid \forall \mathcal{U} \in G\ \exists U \in \mathcal{U} \colon \Phi_{\mathcal{I}}(U) \subset G\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})] \tag{2.18}$$

(см. (2.6), (2.7)). С учетом (2.18) легко проверяется, что

$$\big(\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\big) \tag{2.19}$$

есть T_2-пространство (хаусдорфово ТП), в котором все множества (2.11) открыто-замкнуты, а потому

$$(\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\big], \tag{2.20}$$

что означает справедливость следующего свойства: ТП (2.19) нульмерно. Заметим, что в силу (2.12) и (2.20) $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I} | \mathcal{J}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\big]\ \ \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$.

Предложение 2.1. *Если $A \in \mathcal{P}(I)$, то множество $\mathbf{F}^*_o[\mathcal{I} | A]$ замкнуто в* ТП (2.19):

$$\mathbf{F}^*_o[\mathcal{I} | A] \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\big].$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{P}(I)$. Введем в рассмотрение (см. (2.13)) множество

$$\Omega \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \setminus \mathbf{F}^*_o[\mathcal{I} | A] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \mid \exists U \in \mathcal{U} \colon A \cap U = \varnothing\}. \tag{2.21}$$

Тогда $\Omega \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]$. В самом деле, пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})$ и для некоторого $V \in \mathcal{V}$ имеет место равенство $A \cap V = \varnothing$. Рассмотрим множество $\Phi_{\mathcal{I}}(V) \in (\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}]$. Пусть $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{I}}(V)$, т. е. $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})$ и при этом $V \in \mathcal{W}$ (см. (2.11)). Тогда имеем, в частности, что $\exists U \in \mathcal{W} \colon A \cap U = \varnothing$. С учетом (2.21) получаем, что $\mathcal{W} \in \Omega$. Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено, что $\Phi_{\mathcal{I}}(V) \subset \Omega$. Коль скоро и $\mathcal{V}$ выбиралось произвольно, имеем из (2.18) требуемое свойство: Ω открыто в смысле (2.19), а потому (см. (2.21)) $\mathbf{F}^*_o[\mathcal{I} | A] = \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \setminus \Omega$ замкнуто в этом ТП. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[I]$, то (2.19) — компакт (компактное T_2-пространство) и при этом $(\mathbb{UF})[I;\mathcal{I}] = \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\big]$. Итак, в данном случае база $(\mathbb{UF})[I;\mathcal{I}]$ совпадает с семейством всех открыто-замкнутых множеств порождаемого ею пространства.

До конца настоящего пункта полагаем, что $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^o[I]$. Отметим тогда, что (см. [16]) имеет место следующее свойство плотности:

$$\mathbf{F}^*_o[\mathcal{I}|\, A] = \mathrm{cl}\Big(\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\Big) \quad \forall A \in \mathcal{P}(I). \tag{2.22}$$

Из (2.22) вытекает, в частности, что

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) = \mathrm{cl}\Big(\big((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(L), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\Big) \quad \forall L \in \mathcal{I}. \tag{2.23}$$

В свою очередь, из (2.23) получаем очевидное следствие

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{I}) \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I] - \mathrm{dens})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})]. \tag{2.24}$$

Итак (см. (2.24)), при $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^o[I]$ тривиальные у/ф образуют множество, всюду плотное в ТП (2.19).

Элементы топологии, II. В пределах настоящего пункта фиксируем непустые множества $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$. Отметим, что при $s \in \mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$ и $\mathcal{B} \in \beta_o[\mathbb{X}]$ непременно $s^1[\mathcal{B}] \in \beta_o[\mathbb{Y}]$ (см. [18, гл. I]). Разумеется, в качестве $\mathcal{B}$ можно использовать у/ф из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{X}]$. Наконец, может использоваться также вариант $\mathcal{B} = \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J})$, где $\mathcal{J} \in \pi[\mathbb{X}]$. Итак, “образы” БФ, фильтров и у/ф суть БФ.

Если $\tau_1 \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[\mathbb{Y}]$, то полагаем $C(\mathbb{X},\tau_1,\mathbb{Y},\tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{f \in \mathbb{Y}^{\mathbb{X}} \mid f^{-1}(G) \in \tau_1 \ \forall G \in \tau_2\}$, получая множество всех (τ_1,τ_2)-непрерывных отображений из множества $\mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$.

3. Множества притяжения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E в качестве пространства обычных решений. В настоящем разделе фиксируем также ТП (Y,τ), $Y \neq \varnothing$, и отображение $f \in Y^E$, сопоставляющее решению $e \in E$ точку $f(e) \in Y$. Последняя играет роль результата, доставляемого упомянутым решением. При $\mathcal{B} \in \beta_o[E]$ имеем $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_o[Y]$, а тогда $\forall y \in Y$

$$(f^1[\mathcal{B}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y) \Longleftrightarrow \big(N_\tau(y) \subset (Y - \mathbf{fi})\big[f^1[\mathcal{B}]\big]\big). \tag{3.1}$$

Разумеется, в (3.1) допускается случай $\mathcal{B} = \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^o_{\mathbf{u}}[E|\,\mathcal{E}]\colon f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\} \tag{3.2}$$

рассматриваем как МП при ОАХ $\mathcal{E}$. Данное МП допускает эквивалентное представление в терминах направленностей и сходимости по Мору — Смиту, а при дополнительных условиях — в терминах последовательностей (в этой связи см. [15]). Отметим также, что (см. [15])

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}\big(f^1(\Sigma),\tau\big) \quad \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{3.3}$$

Вместе с тем, как легко видеть, при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$ согласно (2.1) $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \in \beta[E]$ и

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})], \tag{3.4}$$

откуда следует (см. (3.3)), что в упомянутом общем случае семейства $\mathcal{E}$

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathrm{cl}\big(f^1(\Sigma),\tau\big). \tag{3.5}$$

По целому ряду причин представляет интерес вопрос о реализации точек МП, т. е. ЭП, в виде $f(x)$, где $x \in E$. Данный вопрос смыкается с вопросом о роли точных решений Дж. Варги [1, гл. III]. В принятой здесь редакции речь идет о множестве $f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big)$ при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$. Весьма очевидно следующее

Предложение 3.1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, *то*

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \subset f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big). \tag{3.6}$$

Доказательство. Введя $\widetilde{\mathcal{E}} \overset{\triangle}{=} \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$ и воспользовавшись (3.5), получаем, что $(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]$ есть пересечение всех множеств $\mathrm{cl}\big(f^1(\widetilde{\Sigma}),\tau\big)$, $\widetilde{\Sigma} \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Выберем произвольно точку p_o из множества в левой части (3.6). Тогда $p_o \in \widetilde{\Sigma}$ $\forall \widetilde{\Sigma} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ (учитываем (2.1)). Поэтому $f(p_o) \in f^1(\widetilde{\Sigma})$ $\forall \widetilde{\Sigma} \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Тем более, $f(p_o) \in \mathrm{cl}\big(f^1(\widetilde{\Sigma}),\tau\big)$ $\forall \widetilde{\Sigma} \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Это означает (см. (3.5)), что $f(p_o) \in (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]$ и, стало быть, $p_o \in f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big)$. □

Предложение 3.2. *Если* $\big(f(x) \in (\tau - \mathrm{isol})[Y]\ \ \forall x \in E\big)\ \&\ \Big(\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)\Big)$, *то*

$$\forall u \in f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big) \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E} \quad \exists\, v \in \Sigma\colon\ f(u) = f(v).$$

Доказательство. Пусть выполнены оба условия настоящего предложения. Выберем произвольно $x_* \in f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big)$. Тогда $x_* \in E$ и $f(x_*) \in (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]$; вместе с тем, $f(x_*) \in (\tau - \mathrm{isol})[Y]$. С учетом (2.16) получаем, что $\{f(x_*)\} \in \tau$ и, следовательно, $\{f(x_*)\} \in N_\tau^o\big(f(x_*)\big)$. В частности,

$$\{f(x_*)\} \in N_\tau\big(f(x_*)\big). \tag{3.7}$$

Вместе с тем согласно (3.2) для некоторого у/ф $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^o[E|\,\mathcal{E}]$ имеет место сходимость $f^1[\mathfrak{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} f(x_*)$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $\mathcal{E} \subset \mathfrak{U}$ (см. (2.15)). В силу (3.1)

$$N_\tau\big(f(x_*)\big) \subset (Y - \mathbf{fi})\big[f^1[\mathfrak{U}]\big],$$

откуда, в частности, следует по аксиомам фильтра, что $A \cap f^1(U) \neq \varnothing$ $\forall A \in N_\tau(x_*)$ $\forall U \in \mathfrak{U}$. Пусть $\Sigma_o \in \mathcal{E}$. Тогда последнее свойство означает, что (см. (3.7)) $\{f(x_*)\} \cap f^1(\Sigma_o) \neq \varnothing$, поскольку $\Sigma_o \in \mathfrak{U}$. Поэтому $f(x_*) \in f^1(\Sigma_o)$, а тогда для некоторого $x^* \in \Sigma_o$ имеем равенство $f(x_*) = f(x^*)$. Требуемое свойство установлено. □

Теорема 3.1. *Пусть отображение* f *инъективно, т. е.* $\forall x_1 \in E$ $\forall x_2 \in E$

$$\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Longrightarrow (x_1 = x_2), \tag{3.8}$$

и, кроме того, $f(x) \in (\tau - \mathrm{isol})[Y]$ $\forall x \in E$. *Тогда*

$$f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big). \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$. Выберем произвольно точку $u \in f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big)$. Тогда $u \in E$, согласно предложению 3.2 $\forall \Sigma \in \mathcal{E}$ $\exists\, v \in \Sigma\colon f(u) = f(v)$. С учетом (3.8) получаем, что $u \in \Sigma$ $\forall \Sigma \in \mathcal{E}$. Тем самым установлено, что

$$f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big) \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma. \tag{3.10}$$

С учетом (3.10) и предложения 3.1 получаем нужное свойство (3.9). □

Следствие 3.1. *Пусть* $f \in (\tau - \mathrm{isol})[Y]^E$ *обладает свойством инъективности* (*см.* (3.8)). *Тогда* $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$

$$\Big(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \subset Y \setminus f^1(E)\big). \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (3.11). Тогда в силу теоремы 3.1 имеем, что $f^{-1}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]\big) = \varnothing$, и, следовательно,

$$f(x) \notin (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \quad \forall x \in E.$$

Поэтому $(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \cap f^1(E) = \varnothing$. С учетом (3.2) получаем требуемое утверждение. □

4. Обобщенные элементы и вспомогательные множества притяжения

В настоящем кратком разделе коснемся вопросов представления одних МП в терминах других. Фиксируем непустое множество $\mathbf{H}$ и топологию $\tilde{\mathbf{t}} \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, превращающую $\mathbf{H}$ в T_2-пространство $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}})$, а также отображение $r \in \mathbf{H}^E$, рассматриваемое в качестве целевого. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, т. е. заданы ОАХ, то МП $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\mathbf{t}}; r; \mathcal{E}] \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ рассматриваем в качестве основного. Для построения основного МП привлекаем конструкцию $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}}, r)$-компактификатора [19, разд. 3]: мы называем здесь $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}}, r)$-компактификатором всякий кортеж $(K, \tilde{\tau}, p, q)$, для которого $(K, \tilde{\tau})$ — компактное ТП, $K \neq \varnothing$, $p \in K^E$, $q \in C(K, \tilde{\tau}, \mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}})$ и при этом $r = q \circ p$, где $\circ$ — символ композиции отображений $(r(x) = q\big(p(x)\big)$ при $x \in E)$.

Ключевое для наших построений свойство имеет следующий вид: если $(K, \tilde{\tau}, p, q)$ есть $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}}, r)$-компактификатор, то [15; 19]

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\mathbf{t}}; r; \mathcal{E}] = q^1\big((\mathbf{as})[E; K; \tilde{\tau}; p; \mathcal{E}]\big) \in (\tilde{\mathbf{t}} - \mathrm{comp})[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big). \tag{4.1}$$

С учетом (4.1) получаем, что (при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$) проблема построения основного МП "перекладывается" на построение вспомогательного МП $(\mathbf{as})[E; K; \tilde{\tau}; p; \mathcal{E}]$; последнее существенно облегчается, если $p^1(E) \in (\tilde{\tau} - \mathrm{dens})[K]$. С учетом этих обстоятельств конструкции предыдущего раздела можно адресовать тому случаю, когда $(Y, \tau) = (K, \tilde{\tau})$, $f = p$. Само вспомогательное МП является, по сути дела (см. (4.1)), множеством допустимых ОЭ, непрерывный образ которого определяет основное МП. При этом согласно (4.1) "асимптотическая" достижимость, соответствующая множеству в левой части (4.1), сводится к стандартной (см. правую часть (4.1)). Тем самым реализуется важная, упомянутая во введении, функция расширения, осуществляемого посредством $(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{t}}, r)$-компактификатора. Теорему 3.1 и следствие 3.1 можно использовать для целей исследования вспомогательного МП $(\mathbf{as})[E; K; \tilde{\tau}; p; \mathcal{E}]$ на предмет реализации ОЭ в наросте $K \setminus p^1(E)$ в случае, когда семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$ обладает свойством пустоты пересечения всех своих множеств.

Отметим, однако, что последнее положение может, вообще говоря, нарушаться (см., например, [20, с. 472]). В целях полноты изложения приведем соответствующий пример, уже не связанный с построениями [20]. Рассмотрим простейшую скалярную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u + 2, \quad x(0) = 0, \tag{4.2}$$

где $t \in [0, 1]$, $u \in [-1, 1]$. Для простоты полагаем, что в (4.2) допускаются только постоянные управления-программы; их множество полностью определяется отрезком $[-1, 1]$. Все траектории (4.2) достигают состояния $x(t) = 1$ на промежутке $[0, 1]$; полагая при $\mathbf{u} \in [-1, 1]$, что $t_{\mathbf{u}} \triangleq (\mathbf{u} + 2)^{-1}$, получаем, что $\mathbf{x_u}(t_{\mathbf{u}}) = 1$, где $\mathbf{x_u} = \mathbf{x_u}(\cdot)$ есть траектория (4.2), порожденная управлением $u(t) \equiv \mathbf{u}$: $\mathbf{x_u}(t) = (\mathbf{u} + 2)(t)$ $\forall t \in [0, 1]$. Будем стремиться к осуществлению медленнодействия: $t_u = 1$ при $u = -1$. Имеется, однако, препятствие, возникающее в момент $\theta \triangleq 2^{-1}$: требуется обеспечить неравенство

$$x(\theta) > 1/2. \tag{4.3}$$

Совместить медленнодействие с осуществлением (4.3) невозможно. Таким образом, система ограничений несовместна, и точные решения отсутствуют.

Рассмотрим асимптотический вариант постановки, полагая в данном примере, что $E \triangleq [-1, 1]$. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то

$$\Xi_\varepsilon \triangleq \big\{u \in E \mid (t_u > 1 - \varepsilon) \,\&\, \big(\mathbf{x}_u(\theta) > 1/2\big)\big\} \neq \varnothing. \tag{4.4}$$

Полагая в данном примере $\mathcal{E} \triangleq \{\Xi_\varepsilon \colon \varepsilon \in]0, \infty[\}$, получаем БФ $\mathcal{E} \in \beta_o[E]$ с пустым пересечением всех своих множеств. Пусть в настоящем примере $\mathbf{H} \triangleq \mathbb{R}$ (вещественная прямая), $\tilde{\mathbf{t}} = \tau_{\mathbb{R}}$, где

$\tau_{\mathbb{R}}$ есть обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой. Определим r посредством правила

$$u \longmapsto \mathbf{x}_u(1) \colon E \longrightarrow \mathbf{H}, \tag{4.5}$$

получая оператор системы (4.2), позволяющий конструировать ОД в виде образа соответствующего п/м E. Тогда определено МП $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\mathbf{t}};r;\mathcal{E}]$, для представления которого можно использовать (4.1) при произвольном выборе компактификатора $(K,\tilde{\tau},p,q)$. Последний можно, в частности, определить следующим образом: $K \overset{\triangle}{=} E$, $\tilde{\tau} \overset{\triangle}{=} \{K \cap G \colon G \in \tau_{\mathbb{R}}\}$ (итак, $(K,\tilde{\tau})$ — компактное подпространство $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$), $p(u) \overset{\triangle}{=} u$ при $u \in E$, $q \overset{\triangle}{=} r$ (см. (4.5)).

Тогда $(\mathbf{as})[E;K;\tilde{\tau};p;\mathcal{E}] = \{-1\}$ (см. (4.4)), хотя пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$ пусто. В самом деле, при $\varepsilon \in]0,\infty[$ имеем в силу (4.4), что $-1 \notin \Xi_\varepsilon$ и, кроме того, $u < 3\varepsilon - 1$ при $u \in \Xi_\varepsilon$ (учитываем также, что $\varphi \overset{\triangle}{=} (t_u)_{u\in E}$ — непрерывная функция и $\varphi(-1) = 1$). Вместе с тем $p^1(E) = E = K$, а потому $K \setminus p^1(E) = \varnothing$. Поскольку $(\mathbf{as})[E;K;\tilde{\tau};p;\mathcal{E}]$ играет в силу (4.1) роль множества допустимых ОЭ, получаем, что, будучи недопустимой как обычное решение, точка -1 допустима как решение обобщенное, т. е. как ОЭ. Следовательно, в данном примере вспомогательное МП "не реализуется в наросте". В силу (4.1) $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\mathbf{t}};r;\mathcal{E}] = \{q(-1)\} = \{r(-1)\} = \{1\}$, что вполне соответствует смыслу решаемой задачи: точка 1 есть ЭП, реализуемый, например, посредством секвенциального приближенного решения $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$, где $u_l \overset{\triangle}{=} l^{-1} - 1$ при $l \in \mathbb{N}$. Итак, само основное МП у нас "не пострадало". Отметим, однако, что не всякая последовательность в E, сходящаяся к -1, является секвенциальным приближенным решением, допустимым относительно $\mathcal{E}$. Так, стационарная последовательность, все члены которой совпадают с -1, не является упомянутым решением.

5. Расширение в классе ультрафильтров

В настоящем разделе рассматривается один конкретный вариант МП, для которого реализуются утверждения теоремы 3.1 и следствия 3.1. Данное МП может играть роль пространства ОЭ при некоторых дополнительных условиях (имеются в виду варианты ИП с алгебрами или полуалгебрами множеств, а также условия на отображение r предыдущего раздела, отмеченные в [15]). При этих условиях излагаемая ниже схема может встраиваться в компактификатор, подобный используемому в (4.1).

Фиксируем $\mathcal{L} \in \pi_o'[E]$ (итак, $\mathcal{L}$ есть π-система с синглетонами). Используя положения [21, разд. 5], легко устанавливаем свойство

$$\big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x]\big\} \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \quad \forall x \in E \tag{5.1}$$

(учитываем то, что при $\hat{x} \in E$ определено открыто-замкнутое множество $\Phi_{\mathcal{L}}(\{\hat{x}\})$). Из (5.1) вытекает, что

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})] \quad \forall x \in E. \tag{5.2}$$

Отметим следующее очевидное и, тем не менее, полезное

Предложение 5.1. *Справедливо равенство* $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) = (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})]$.

Доказательство. Согласно (5.2) имеем вложение

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) = \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(E) \subset (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})]. \tag{5.3}$$

Выберем произвольно $\mathfrak{U} \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})]$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ и согласно (2.16) $\{\mathfrak{U}\} \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$. Поэтому

$$\{\mathfrak{U}\} \in N^o_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\mathfrak{U}). \tag{5.4}$$

Из (2.24) и (5.4) следует, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$, чем завершается проверка вложения, противоположного (5.3), а стало быть, и требуемого равенства. □

Из предложения 5.1 следует, в частности, что $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$, а потому (см. (2.10))

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})}\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big]. \tag{5.5}$$

Таким образом, согласно (5.5) замкнутое множество $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$ образует нарост при погружении E в $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ посредством $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$. Заметим также, что, как легко видеть, $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{S}\ \forall \mathbb{S} \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]-\mathrm{dens})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})]$. Следовательно, $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$ есть наименьшее по вложению всюду плотное (в смысле ТП типа (2.19)) п/м $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$, состоящее из изолированных точек.

Отметим теперь, что в рассматриваемом случае π-системы с синглетонами отображение $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$, т.е. $x \longmapsto \big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[x]\colon E \longrightarrow \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$, инъективно (точнее, $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$ есть биекция E на $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$). С учетом этого свойства и предложения 5.1 применяем теорему 3.1, получая следующее

Предложение 5.2. *Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то*

$$\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]^{-1}\Big((\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big]\Big) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma. \tag{5.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно учесть равенство $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) = \big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(E)$, следующее из определений разд. 2. □

В свою очередь, конкретизируя следствие 3.1 с учетом предложения 5.1 и инъективности $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$, получаем $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$

$$\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \Big((\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big] \subset \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})\Big). \tag{5.7}$$

Далее учитываем (2.10). Итак, при отсутствии точных решений вспомогательное МП, имеющее смысл множества допустимых ОЭ, состоит только из свободных у/ф и, таким образом, содержится в наросте, возникающем при погружении E в $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ посредством построения тривиальных у/ф. Этот вывод справедлив (при $\mathcal{L} \in \pi'_o[E]$) для любых вариантов ОАХ со свойством пустого пересечения множеств семейства, определяющего упомянутые ОАХ. □

6. Полезные добавления

В настоящем разделе предполагается, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$; следовательно, $(E,\mathcal{L})$ есть отделимое ИП. Тогда (как и в разд. 5) $\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$ определяет погружение E в $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ со свойствами (2.22)–(2.24). В этом, формально более общем в сравнении с разд. 5, случае мы рассмотрим некоторые аналоги предложения 5.2 и свойства (5.7).

Однако сначала напомним представления вспомогательного МП, полученные в [16]. Так, согласно [16, предложение 2]

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{J}] = \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}|\,\mathcal{J}\big) \quad \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{6.1}$$

Представление (6.1) касается ОАХ со свойством измеримости соответствующих множеств. Далее, из [16, предложение 3] следует, что

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathfrak{B}\big] = \bigcap_{B\in\mathfrak{B}} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,B] \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \mid B \cap U \neq \varnothing\ \forall B \in \mathfrak{B}\ \forall U \in \mathcal{U}\} \quad \forall \mathfrak{B} \in \beta[E].\end{gathered} \tag{6.2}$$

Наконец, комбинируя (3.4) и (6.2), получаем, что

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big] = \bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma] \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\ \forall U \in \mathcal{U}\} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big).\end{gathered} \tag{6.3}$$

Из определений разд. 2 (см. (2.8), (2.9)) легко следует

Предложение 6.1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то* $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^{-1}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E})\big) = \bigcap\limits_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma.$

В свою очередь, комбинируя (6.1) и предложение 6.1, получаем, что

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^{-1}\big((\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big]\big) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

Предложение 6.2. *Если* $\mathcal{L} \in \pi_o'[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, *то*

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^{-1}\big(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing \;\; \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \;\; \forall U \in \mathcal{U}\}\big) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получается непосредственной комбинацией (6.3) и предложения 5.2. Возвращаясь к более общему случаю $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$, отметим

Следствие 6.1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$\Big(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \subset \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пересечение всех множеств семейства $\mathcal{E}$ пусто. Тогда $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \notin \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \;\; \forall x \in E$. Иными словами, $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) = \varnothing$, а потому согласно (2.10) и (2.12) $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \subset \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. □

В заключение приведем одно замечание общего характера (учитываем, что для всяких ТП (X,τ) и множества $A \in \mathcal{P}(X)$ справедливо равенство $(\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(A,\tau) \setminus A] = \varnothing$): $(\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})] = \varnothing$.

Наконец, для случая π-системы с синглетонами имеем очевидное теперь

Следствие 6.2. *Если* $\mathcal{L} \in \pi_o'[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, *то*

$$\Big(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \big(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing \;\; \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \;\; \forall U \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получается непосредственной комбинацией (5.7) и (6.3).

7. Пример применения компакта Стоуна

В пределах настоящего раздела фиксируем два числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), для которых $a < b$, и полагаем, что $\mathbf{I} \overset{\triangle}{=} [a,b]$. Полагаем также, что

$$\mathfrak{I} \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists\, c \in \mathbf{I} \;\; \exists\, d \in \mathbf{I}\colon (]c,d[\subset L)\,\&\,(L \subset [c,d])\},$$

получая полуалгебру промежутков (открытых, полуоткрытых и замкнутых), содержащихся в $\mathbf{I}$; также рассматривается $\varnothing$ как промежуток: $\varnothing = [b,a]$. Полагаем далее, что $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$ есть алгебра п/м $\mathbf{I}$, порожденная полуалгеброй $\mathfrak{I}$; тогда, в частности, $\mathfrak{I} \subset \mathcal{A}$. Итак, $(\mathbf{I},\mathcal{A})$ есть ИП с алгеброй множеств, а

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A}),\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[\mathbf{I}]\big) \tag{7.1}$$

есть соответствующий данному ИП компакт Стоуна. Отметим, что исчерпывающее описание $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{A})$ приведено в [14]; данное представление использовано в [22] для целей построения МП в регулярном ТП при “измеримых” ОАХ.

Полагаем до конца настоящего раздела, что $E = \mathbf{I}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{A}$, т. е. рассматриваем вышеупомянутое ИП в качестве пространства обычных решений. Отметим, что в данном случае имеем, в частности, свойство $\mathcal{L} \in \pi'_o[E]$, а это позволяет использовать (в духе конструкций [22]) положения разд. 5.

Так, в частности, для произвольного семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, определяющего ОАХ, справедливо (5.6) (см. предложение 5.2). Отметим здесь же, что (см. [14]) множество $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$ допускает в данном случае достаточно простое описание.

Итак, полагаем, что

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{U}_t^{(-)} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in [a,t[\colon [c,t[\subset L\} \ \ \forall t \in]a,b])\\ &\&\, (\mathfrak{U}_t^{(+)} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in]t,b]\colon]t,c] \subset L\} \ \ \forall t \in [a,b[).\end{aligned} \tag{7.2}$$

Тогда (см. [14, предложение 6.1, (6.19), (6.20)]) имеем из (7.2), что

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \big\{\mathfrak{U}_t^{(-)} \colon t \in]a,b]\big\} \cup \big\{\mathfrak{U}_t^{(+)} \colon t \in [a,b[\big\}. \tag{7.3}$$

Посредством (7.2), (7.3) реализуется в данном конкретном случае (см. [14, (6.21)]) исчерпывающее описание нульмерного компакта Стоуна (напомним, что в нашем случае $(E,\mathcal{L}) = (\mathbf{I},\mathcal{A})$). С учетом (7.3) получаем полезную конкретизацию (5.7): если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то

$$\begin{aligned}&\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \Big((\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big(E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big]\\ &= \bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma] \subset \big\{\mathfrak{U}_t^{(-)} \colon t \in]a,b]\big\} \cup \big\{\mathfrak{U}_t^{(+)} \colon t \in [a,b[\big\}\Big).\end{aligned} \tag{7.4}$$

Важной особенностью (7.4) является то, что от семейства $\mathcal{E}$, определяющего в данной импликации ОАХ, не требуется $\mathcal{L}$-измеримость множеств, составляющих это семейство (в связи с (7.4) полезно отметить, что согласно (2.20) каждое множество $\mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma]$, $\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$, замкнуто, а стало быть, и компактно в смысле $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$).

В связи с (7.4) рассмотрим вспомогательное МП для примера разд. 4, реализуемое, однако, в компакте (7.1). Итак, полагаем до конца раздела, что $a = -1$, $b = 1$. Будем при этом использовать в качестве $\mathcal{E}$ семейство всех множеств (4.4) при переборе $\varepsilon > 0$ (см. разд. 4). Для данного случая рассматриваем МП

$$(\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big] = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma] \tag{7.5}$$

(учитываем (6.2)). Покажем, что (7.5) есть синглетон $\{\mathfrak{U}_{-1}^{(+)}\}$. Для этого напомним, что в нашем случае

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma] = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Xi_\varepsilon] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \mid \Xi_\varepsilon \cap U \neq \varnothing \ \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \ \forall U \in \mathcal{U}\}. \tag{7.6}$$

Итак, пусть $\kappa \in]0,\infty[$ и $U_* \in \mathfrak{U}_{-1}^{(+)}$. Тогда Ξ_κ есть непустое п/м $E = [a,b]$, причем в силу непрерывности функции $(t_u)_{u\in E}$ в точке -1 можно указать $\zeta \in]0,1[$, для которого $]-1,\zeta-1] \subset \Xi_\kappa$. Далее, в силу (7.2) для некоторого $c \in]-1,1]$ имеем $]-1,c] \subset U_*$. Поскольку $\zeta > 0$ и $c+1 > 0$, имеем для некоторого $d \in]-1,c]$ неравенство $d \leqslant \zeta - 1$. Тогда $\varnothing \neq]-1,d] \subset \Xi_\kappa \cap U_*$. Итак, установлено, что $\Xi_\varepsilon \cap U \neq \varnothing$ $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$ $\forall U \in \mathfrak{U}_{-1}^{(+)}$. Поэтому (см. (7.3), (7.6)) $\mathfrak{U}_{-1}^{(+)}$ есть элемент множества (7.6), т. е.

$$\{\mathfrak{U}_{-1}^{(+)}\} \subset \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{F}^*_o[\mathcal{L}|\,\Sigma]. \tag{7.7}$$

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольный у/ф из множества в правой части (7.7). Тогда согласно (7.4), (7.5) получаем, что

$$(\exists\, t \in]-1,1] \colon \mathcal{V} = \mathfrak{U}_t^{(-)}) \ \vee\ (\exists\, t \in [-1,1[\colon \mathcal{V} = \mathfrak{U}_t^{(+)}) \tag{7.8}$$

(мы учитываем здесь, что согласно (4.4) семейство $\mathcal{E}$ направлено и имеет пустое пересечение всех своих множеств).

Пусть $\mathcal{V} = \mathfrak{U}_{\theta}^{(-)}$, где $\theta \in]-1,1]$. Тогда согласно (7.2) $\mathcal{V} = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in [-1,\theta[\colon [c,\theta[\subset L\}$ и, в частности, $[\tilde{d},\theta[\in \mathcal{V}$ при $\tilde{d} \in [-1,\theta[$. С другой стороны (см. разд. 4), при $\varepsilon \in]0,\infty[$ имеем, что $\Xi_\varepsilon \subset]-1, 3\varepsilon - 1[$. Поскольку $-1 < \theta$, можно подобрать $d' \in]-1,\theta[$ и $\xi \in]0,\infty[$ так, чтобы $\Xi_\xi \cap [d',\theta[= \varnothing$, что невозможно по выбору $\mathcal{V}$ (согласно (7.6) $\Xi_\varepsilon \cap U \neq \varnothing\ \forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \forall U \in \mathcal{V}$). Поэтому первая возможность в (7.8) отпадает.

Допустим теперь, что $\mathcal{V} = \mathfrak{U}_{\zeta}^{(+)}$, где $\zeta \in [-1,1[$. Тогда $\mathcal{V} = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in]\zeta,1] \colon]\zeta,c] \subset L\}$. В частности, $]\zeta,\tilde{c}] \in \mathcal{V}$ при $\tilde{c} \in]\zeta,1]$. Если $\zeta > -1$, то для некоторого $\gamma \in]0,\infty[$ имеем вложение $\Xi_\gamma \subset]-1,\zeta]$, а тогда $\Xi_\gamma \cap]\zeta,1] = \varnothing$, что снова приводит к противоречию с предположением о свойствах $\mathcal{V}$ (см. (7.6)). Остается допустить, что $\mathcal{V} = \mathfrak{U}_{-1}^{(+)}$. Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произволен, установлено, что имеет место вложение, противоположное (7.7), а это означает справедливость требуемого равенства

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid \Sigma] = \{\mathfrak{U}_{-1}^{(+)}\}. \tag{7.9}$$

Итак, согласно (7.5) и (7.9) вспомогательное МП есть синглетон, содержащий свободный у/ф. Данный у/ф "является ответственным" (см. [14, разд. 7; 22; 23]) за операцию вычисления предела справа (в точке -1) на пространстве ярусных [14; 22–24] функций, что несколько точнее характеризует нужный ЭП в сравнении с ЭП в виде самой точки -1 в разд. 4.

8. Некоторые топологические свойства

С учетом (6.3) отметим, что в конструкциях, связанных с представлением МП в пространствах у/ф, важную роль играют множества (2.13). В этой связи имеет смысл исследовать топологические свойства упомянутых множеств; некоторые свойства такого рода рассматриваются в настоящем разделе. Фиксируем $\mathcal{L} \in \pi_o'[E]$, где E — произвольное непустое множество. Напомним с учетом (2.16) и (5.2), что (в рассматриваемом случае)

$$\big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x]\big\} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \quad \forall x \in E. \tag{8.1}$$

Как следствие получаем (см. (8.1)), что

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) = \bigcup_{x \in A} \big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x]\big\} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \quad \forall A \in \mathcal{P}'(E). \tag{8.2}$$

Ясно также, что $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(\varnothing) = \varnothing \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$, а потому (см. (8.2))

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) = \big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \colon x \in A\big\} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \quad \forall A \in \mathcal{P}(E). \tag{8.3}$$

Предложение 8.1. *Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то*

$$\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A]\big]. \tag{8.4}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что согласно (2.22)

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A] = \mathrm{cl}\Big(\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\Big),$$

а потому $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) \subset \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A]$. С учетом (8.3) получаем требуемое свойство (8.4) (в виде $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)$ имеем открытое п/м $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A]$). □

Замечание 8.1. Отметим, что несмотря на (8.3) и на то, что согласно (2.22) при $A \in \mathcal{P}(E)$ $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} \mid A] = \mathrm{cl}\Big(\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\Big)$, возможен случай, когда в (8.4) равенство отсутствует (более того, данный случай может возникать и при условии $A \in \mathcal{L}$, т.е. для $\mathcal{L}$-измеримых множеств A). В самом деле, пусть ИП $(E, \mathcal{L})$ совпадает с (7.1): $E = \mathbf{I}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{A}$; $\mathbf{I}$ и $\mathcal{A}$ определены в разд. 7 (свойство $\mathcal{L} \in \pi'_o[E]$ имеет место). Пусть теперь $A = [a_*, b_*]$, где $a_* \in [a, b[$ и $b_* \in]a_*, b]$, т.е. $a \leqslant a_* < b_* \leqslant b$. Тогда $A \in \mathcal{L}$ и потому (см. разд. 2)

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A] = \Phi_{\mathcal{L}}(A), \tag{8.5}$$

что в силу (2.20) означает, в частности, справедливость свойства $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A] \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. Как следствие получаем цепочку равенств

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]\big] = (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\Phi_{\mathcal{L}}(A)] = \Phi_{\mathcal{L}}(A) = \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]. \tag{8.6}$$

Заметим, что согласно (7.2) и (8.6) $(\mathfrak{U}_t^{(-)} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A] \quad \forall t \in]a_*, b_*])\,\&\,(\mathfrak{U}_t^{(+)} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A] \quad \forall t \in [a_*, b_*[)$ (мы учитываем здесь также (2.11) и (8.5)). В частности, у нас $\mathfrak{U}_{a_*}^{(+)} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]$ и $\mathfrak{U}_{b_*}^{(-)} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]$, где согласно (7.3) $\big(\mathfrak{U}_{a_*}^{(+)} \in \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})\big)\,\&\,\big(\mathfrak{U}_{b_*}^{(-)} \in \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})\big)$; последнее означает в силу (2.10), что $\Big(\mathfrak{U}_{a_*}^{(+)} \notin \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)\Big)\,\&\,\Big(\mathfrak{U}_{b_*}^{(-)} \notin \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)\Big)$ (действительно, $\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) = \big\{\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x]\colon x \in A\big\} \subset \mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$). С учетом (8.6) получаем теперь, что

$$\Big(\mathfrak{U}_{a_*}^{(+)} \in (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]\big] \setminus \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)\Big)$$
$$\&\,\Big(\mathfrak{U}_{b_*}^{(-)} \in (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]\big] \setminus \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)\Big).$$

Попутно установлено, что $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]\big]$ может содержать свободные у/ф. □

Следствие 8.1. *Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]$ есть множество, канонически замкнутое в топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$:*

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A] = \mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*\big[\mathcal{L}|\,A\big]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big). \tag{8.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 2.1

$$\mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*\big[\mathcal{L}|\,A\big]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big) \subset \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]. \tag{8.8}$$

С другой стороны, из предложения 8.1 имеем по свойствам оператора замыкания, что

$$\mathrm{cl}\Big(\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\Big) \subset \mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big),$$

откуда с учетом (2.22) получаем вложение $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A] \subset \mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big)$. Учитывая (8.8), получаем требуемое свойство (8.7). □

З а м е ч а н и е 8.2. Заметим здесь же, что следствие 8.1 вытекает из (2.22) и (8.3) в силу [6, предложение 1.17]. □

В связи со следствием 8.1 условимся о следующих обозначениях: если (X, τ) есть ТП (X — множество, $\tau \in (\mathrm{top})[X]$), то

$$(\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \overset{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(X) \mid G = (\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(G, \tau)]\} = \{(\tau - \mathrm{Int})[F]\colon F \in \mathbf{C}_X[\tau]\}, \tag{8.9}$$

$$(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau] \overset{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(X) \mid F = \mathrm{cl}\big((\tau - \mathrm{Int})[F], \tau\big)\} = \{\mathrm{cl}(G, \tau)\colon G \in \tau\} \tag{8.10}$$

(в (8.9) и (8.10) введены соответственно семейства канонически открытых и канонически замкнутых множеств в (X, τ)); $(\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \in \pi[X]$. Из следствия 8.1 и (8.10) имеем, что

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A] \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})\big[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big] \quad \forall A \in \mathcal{P}(E). \tag{8.11}$$

С учетом (8.9)–(8.11) имеем, как легко видеть, что

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A]\big] \in (\mathrm{can} - \mathrm{op})\big[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big] \quad \forall A \in \mathcal{P}(E).$$

Предложение 8.2. *Если* $A_1 \in \mathcal{P}(E)$ *и* $A_2 \in \mathcal{P}(E)$, *то эквивалентны следующие три условия*:
(1) $A_1 \subset A_2$; (2) $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_1] \subset \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_2]$; (3) $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_1]\big]\subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_2]\big]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем A_1, A_2 в соответствии с условиями доказываемого предложения. Тогда из (2.13) следует, что (1) $\Rightarrow$ (2). Далее, из определения внутренности множества следует, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть выполнено условие (3). Тогда по свойствам оператора замыкания

$$\mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_1]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big)\subset \mathrm{cl}\big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_2]\big], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big). \tag{8.12}$$

С учетом следствия 8.1 и (8.12) получаем, что справедливо (2). Итак, (3) $\Rightarrow$ (2), а стало быть (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Пусть выполнено условие (2). Покажем, что истинно (1). Допустим противное:

$$A_1 \setminus A_2 \neq \varnothing. \tag{8.13}$$

Используя (8.13), выберем $x_* \in A_1 \setminus A_2$. Тогда с учетом (2.4) имеем, что $\{x_*\} \in \mathcal{L}$. При этом

$$\mathfrak{U} \stackrel{\triangle}{=} \big((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult}\big)[x_*] = \{L \in \mathcal{L} \mid x_* \in L\} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$$

и, кроме того, $\{x_*\} \in \mathfrak{U}$. Более того, $A_1 \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathfrak{U}$ (в самом деле, $x_* \in A_1 \cap L$ при $L \in \mathfrak{U}$). Согласно (2.13) $\mathfrak{U} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_1]$ и, коль скоро предполагалось выполненным (2), $\mathfrak{U} \in \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_2]$, а, следовательно,

$$A_2 \cap U \neq \varnothing \quad \forall\, U \in \mathfrak{U}. \tag{8.14}$$

Но $x_* \notin A_2$, а потому $A_2 \cap \{x_*\} = \varnothing$, где, как уже отмечалось, $\{x_*\} \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие с (8.14), которое показывает, что (8.13) невозможно, а стало быть истинно (1). Итак, (2) $\Rightarrow$ (1) и, следовательно, (1) $\Leftrightarrow$ (2). □

Следствие 8.2. *Если* $A_1 \in \mathcal{P}(E)$ *и* $A_2 \in \mathcal{P}(E)$, *то эквивалентны следующие три условия*:
(1′) $A_1 = A_2$; (2′) $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_1] = \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_2]$; (3′) $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_1]\big]= (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})\big[\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,A_2]\big]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вполне очевидно. □

9. Заключение

В работе установлено, что конструкции расширений, являющиеся модификациями используемых в общей топологии, оказываются в ряде случаев более чувствительными в вопросах, связанных с соблюдением ОАХ. Данные “топологические” расширения могут, как представляется, дополнять (см. также [25]) более традиционные для задач прикладной математики схемы расширения в “более широких” постановках, связанных с достижимостью при ОАХ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Даффин Р. Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.
3. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
4. **Скворцова А. В., Ченцов А. Г.** О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.

5. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** Об одной задаче, связанной с асимптотической достижимостью в среднем // Докл. РАН. 2014. Т. 459, № 6. С. 672–676.
6. **Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.** Общая топология: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1979. 336 с.
7. **Chentsov A. G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
8. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1970. 488 с.
9. **Гамкрелидзе Р. В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 230 с.
10. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
12. **Архангельский А. В.** Компактность // Итоги науки и техники. 1989. Т. 50. С. 7–128 (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).
13. **Терпе Ф., Флаксмайер Ю.** О некоторых приложениях теории расширений топологических пространств и теории меры // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 5. С. 125–162.
14. **Ченцов А. Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
15. **Ченцов А. Г.** Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
16. **Ченцов А. Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 1. С. 87–101. (Математика, механика, компьютер. науки).
17. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
18. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
19. **Ченцов А. Г.** Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 184–217.
20. **Chentsov A. G.** The nonsequential approximate solutions in problems of asymptotic analysis // Soochow Journal of Mathematics. 2006. V. 32, № 3. P. 441–475.
21. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения: задача соблюдения ограничений асимптотического характера // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1047–1064.
22. **Ченцов А. Г.** К вопросу о структуре множеств притяжения в топологическом пространстве // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 1(39). С. 147–150.
23. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 309–323.
24. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2009. 389 с.
25. **Ченцов А. Г.** К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 3. С. 90–109. (Математика, механика, компьютер. науки).

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 14.01.2015