

УДК 514.174.3

**АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ МНОЖЕСТВ  
В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ<sup>1</sup>****В. Н. Ушаков, П. Д. Лебедев**

Исследуется задача об оптимальном покрытии множеств в трехмерном евклидовом пространстве объединением фиксированного числа шаров одинакового радиуса. Критерием оптимальности считается радиус шаров. Предложены аналитические и численные алгоритмы решения задачи на базе разбиения множества на его области Дирихле и отыскания их чебышевских центров. Применены стохастические итерационные процедуры. Получены оценки асимптотики радиуса шаров при стремлении их числа к бесконечности. Проведено моделирование нескольких примеров и представлена их визуализация.

Ключевые слова: хаусдорфово отклонение, наилучшая  $n$ -сеть, покрытие шарами, чебышевский центр.

V. N. Ushakov, P. D. Lebedev. Algorithms for the construction of an optimal cover for sets in three-dimensional Euclidean space.

The problem of an optimal cover of sets in three-dimensional Euclidean space by the union of a fixed number of equal balls, where the optimality criterion is the radius of the balls, is studied. Analytical and numerical algorithms based on the division of a set into Dirichlet domains and finding their Chebyshev centers are suggested for this problem. Stochastic iterative procedures are used. Bounds for the asymptotics of the radii of the balls as their number tends to infinity are obtained. The simulation of several examples is performed and their visualization is presented.

Keywords: Hausdorff deviation, best  $n$ -net, ball cover, Chebyshev center.

**1. Постановка задачи о покрытии**

При изучении задач динамики [1] часто приходится работать с множествами сложной геометрии, имеющими нерегулярную структуру, например с множествами достижимости для нелинейных нестационарных управляемых систем [2] или стабильными мостами в дифференциальных играх [3]. Возникает потребность в их аппроксимации более удобными для вычислительных процедур множествами. Так, удобной для многих множеств в евклидовых пространствах является аппроксимация их эллипсоидами. Эффективные методы аппроксимации эллипсоидами развиваются в научных школах А. Б. Куржанского [4] и Ф. Л. Черноушко [5]. Другой подход [6; 7] состоит в аппроксимации множеств в евклидовом пространстве наборами шаров одинакового радиуса. Привлекательность этого подхода заключается в том, что элементы данных наборов — шары в евклидовом пространстве — чрезвычайно просты в описании. Авторами этой статьи предложена схема аппроксимации множеств в  $\mathbb{R}^3$  наборами из заданного числа шаров одинакового радиуса. В качестве критерия оптимальности при такой аппроксимации выбран радиус шаров подобно тому, как это делалось в [6; 7].

Эта статья продолжает начатые ранее исследования по построению оптимальных покрытий компактных множеств на плоскости — объединением кругов [8; 9] и на сфере — объединением сферических сегментов [10].

Задача о покрытии множества в пространстве шарами равного радиуса имеет большое значение в различных областях комбинаторной геометрии для построения разбиений множества [11]. В них обычно изучаются вопросы, связанные с соотношением диаметра компактного множества  $M$  в евклидовом пространстве и диаметров его подмножеств и других, связанных с

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-11-10018.

$M$  конструкций. В частности, в работе [12] показано, что любое множество  $M \subset \mathbb{R}^3$ , имеющее диаметр 1, может быть вложено в объединение 4 шаров диаметра 0.99983. Данный результат доказывает гипотезу Борсука для случая трехмерного пространства о том, что любое множество можно разбить на 4 подмножества меньшего диаметра [11, с. 153]. От покрытий шарами часто легко перейти к покрытиям телами с более сложной геометрией.

В настоящей работе разработан численный алгоритм отыскания чебышевского центра многогранника, позволяющий существенно экономить вычислительные мощности. Предложены схемы решения задачи о покрытии на базе разбиения множества на его области Дирихле за счет выделения так называемых характеристических точек. Введена возможность улучшения результатов за счет применения стохастической коррекции текущего покрытия. Доказана теорема об асимптотике радиусов шаров наилучшего покрытия при стремлении их числа к бесконечности для одного класса множеств.

Важным практическим приложением решения рассматриваемой задачи может быть построение оптимальных сетей датчиков, отслеживающих состояние некоторой области  $M$  в пространстве [13]. В случае, когда размерами датчика можно пренебречь по сравнению с размерами  $M$ , необходимо найти минимальное число шаров радиуса, равного номинальному радиусу области, контролируемой данным прибором, — шаров, объединение которых полностью покрывало бы  $M$ . Центры шаров следует интерпретировать как места расположения датчиков. Другим примером применения может служить составление схем оптимального размещения логистических центров или пунктов технического обслуживания [14].

Введем обозначения:  $\text{cl}(\mathbb{R}^d)$  — множество всех замкнутых множеств в евклидовом пространстве размерности  $d$ ,  $\text{comp}(\mathbb{R}^d)$  — множество всех компактов (т. е. замкнутых ограниченных множеств) в  $\mathbb{R}^d$ ,  $S_n$  —  $n$ -сеть в  $\mathbb{R}^d$ , непустое множество, состоящее не более чем из  $n$  точек,  $\Sigma_n$  — множество всех  $n$ -сетей,  $B(\mathbf{s}, r)$  — замкнутый шар с центром в точке  $\mathbf{s}$  радиуса  $r$  (множество, состоящее из одной точки, будем рассматривать как шар нулевого радиуса). Далее обозначим  $\Xi(S_n, r) = \bigcup_{\mathbf{s}_i \in S_n} B(\mathbf{s}_i, r)$ . Введем также многозначное отображение  $\mathbf{x} \mapsto \Omega_M(\mathbf{x})$ , где  $\Omega_M(\mathbf{x})$  — множество ближайших в евклидовой метрике к  $\mathbf{x}$  точек из  $M \in \text{cl}(\mathbb{R}^d)$ , и функции  $\rho(\mathbf{x}, M) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| : \mathbf{m} \in M\}$  — евклидово расстояние от точки  $\mathbf{x}$  до множества  $M \in \text{cl}(\mathbb{R}^d)$ ,  $h(A, B) = \max\{\rho(\mathbf{a}, B) : \mathbf{a} \in A\}$  — хаусдорфово отклонение множества  $A \in \text{comp}(\mathbb{R}^d)$  от  $B \in \text{comp}(\mathbb{R}^d)$ .

Ограничимся далее рассмотрением множеств, содержащихся в  $\mathbb{R}^3$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Наилучшим покрытием множества  $M \in \text{comp}(\mathbb{R}^3)$  шарами при фиксированном  $n \in \mathbb{N}$  назовем множество  $\Xi(S_n, r)$ , для которого выполняются условия

$$M \subseteq \Xi(S_n, r) \text{ и } \forall \lambda \in [0, r), \forall S_n^* \in \Sigma_n \ M \not\subseteq \Xi(S_n^*, \lambda).$$

Будем далее рассматривать задачу об отыскании наилучшего покрытия множества  $M$  при фиксированном  $n$ . При этом полагаем, что задача решена, если найдено хотя бы одно  $\Xi(S_n, r)$ , удовлетворяющее определению 1.

Решение задачи сводится к отысканию наилучшей  $n$ -сети  $S_n$  компакта  $M$ , т. е. такой  $n$ -сети, хаусдорфово отклонение от которой  $h(M, S_n)$  минимально по отношению ко всем  $n$ -сетям из  $\Sigma_n$ . Основные свойства наилучших  $n$ -сетей описаны в [15; 16], в частности показано, что для любого компакта  $M$  при любом  $n$  существует как минимум одна наилучшая  $n$ -сеть. В настоящее время активно изучаются наилучшие  $n$ -сети в пространствах различной размерности [17]. Точки таких  $n$ -сетей  $S_n$  выступают в роли центров шаров наилучшего покрытия, а радиус  $r$  равен  $h(M, S_n)$ .

## 2. Построение чебышевского центра множества

Рассмотрим задачу о построении наилучшего покрытия при  $n = 1$ . Данный относительно простой случай важен для разработки алгоритмов решения задачи при  $n > 1$ .

О п р е д е л е н и е 2. Чебышевским центром [18] множества  $M \in \text{comp}(\mathbb{R}^d)$  называется точка  $\mathbf{c}(M)$ , для которой

$$h(M, \{\mathbf{c}(M)\}) = \min \{h(M, \{\mathbf{x}\}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}. \quad (2.1)$$

При  $n = 1$  множество  $\{\mathbf{c}(M)\}$  есть наилучшая  $n$ -сеть. Решением задачи о наилучшем покрытии множества при  $n = 1$  является шар радиуса (2.1) (называемого также чебышевским радиусом  $r(M)$  множества  $M$ ) с центром в точке  $\mathbf{c}(M)$ . Различные методы отыскания чебышевского центра на плоскости рассмотрены ранее, например в работе [8].

Для построения чебышевского центра множества в  $\mathbb{R}^3$  можно, по существу, использовать его свойства. В связи с этим отметим следующие свойства: точка  $\mathbf{c}(M)$  принадлежит выпуклой оболочке со  $M$  множества  $M$ ; чебышевские центры множества  $M$  и со  $M$  совпадают [18; 19]. В частности, если  $M$  — многогранник (т.е. замкнутое множество, граница которого состоит из конечного числа многоугольников) с набором вершин  $V = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^v$  (общим числом  $v \in \mathbb{N}$ ), то  $\mathbf{c}(M) = \mathbf{c}(V)$  (и  $r(M) = r(V)$ ).

В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  в случае состоящего из конечного числа точек множества  $V$  чебышевский центр  $\mathbf{c}(V)$  принадлежит выпуклой оболочке со  $V^*$  множества  $V^*$  всех точек  $\mathbf{v}_i$  из  $V$ , лежащих на сфере  $\partial B(\mathbf{c}(M), r(M))$  (подробнее см. [19; 20]). Действительно, если допустить, что  $\mathbf{c}(V) \notin \text{co } V^*$ , то  $V^*$  вложено в сферический сегмент  $\Theta$  (сферы  $\partial B(\mathbf{c}(M), r(M))$ ) радиуса меньше, чем  $\pi/2$ . В свою очередь, чебышевский радиус такого сегмента меньше, чем  $r(M)$ , а его чебышевский центр не совпадает с  $\mathbf{c}(M)$ . Обозначим  $h_0 = \min\{\rho(\mathbf{v}_i, \partial B(\mathbf{c}(M), r(M))) : \mathbf{v}_i \in V \setminus V^*\} = r(M) - \max\{\|\mathbf{v}_i\| : \mathbf{v}_i \in V \setminus V^*\}$  — расстояние от сферы  $\partial B(\mathbf{c}(M), r(M))$  до ближайшей к ней точки из  $V \setminus V^*$  (в случае, если  $V = V^*$ , полагаем  $h_0 = r(M)/2$ ). Рассмотрим вектор  $\mathbf{h}$ , сонаправленный  $\mathbf{c}(V) - \mathbf{c}(\Theta)$ , равный по норме  $\min\{\|\mathbf{c}(V) - \mathbf{c}(\Theta)\|, h_0\}$ . Сдвинув на него центр шара  $B(\mathbf{c}(M), r(M))$ , мы получим шар  $B((\mathbf{c}(V) + \mathbf{h}), r(V))$  того же размера, в который вложено  $V$ , что приводит к противоречию с единственностью чебышевского центра.

Согласно теореме Каратеодори [21] найдется набор не более чем из 4 точек, принадлежащих  $V^*$ , таких, что  $\mathbf{c}(V)$  лежит в их выпуклой оболочке. Поэтому для отыскания чебышевского центра и радиуса множества  $V$  достаточно рассмотреть все 4-сети  $S_4 \subseteq V$  и выделить ту, для которой  $r(S_4)$  является наибольшим. Хотя данный путь является трудоемким и требует большого числа операций, он прост в реализации и дает точный результат.

Чебышевский центр 4-сети  $S_4 = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_4\}$ , состоящей ровно из четырех точек, не лежащих в одной плоскости, совпадает с центром  $\mathbf{c}^*$  сферы, на которой лежат точки 4-сети  $S_4$ , в случае, если  $\mathbf{c}^* \in \text{co } S_4$ . В противном случае  $\mathbf{c}(S_4)$  совпадает с чебышевским центром некоторой 3-сети  $S_3 \subset S_4$ . В свою очередь, чебышевский центр множества  $S_3$ , состоящего из трех точек, образующих треугольник, есть либо центр описанной вокруг треугольника окружности (если он остроугольный), либо середина наибольшей стороны (если он тупоугольный) (см. [22]).

Авторами разработан алгоритм построения чебышевского центра и вычисления чебышевского радиуса многогранника с множеством вершин  $V$ , а также выполнена его программная реализация. Обозначим  $\Sigma_4(V)$  — множество всех 4-сетей, вложенных в  $V$ . Полагаем, что  $V$  содержит как минимум две не совпадающие точки.

А л г о р и т м.

1. Среди множества  $V$  находится такая пара точек  $\mathbf{v}_{i^*}, \mathbf{v}_{j^*}$ , что

$$\|\mathbf{v}_{i^*} - \mathbf{v}_{j^*}\| = \max\{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\| : i = \overline{1, v}, j = \overline{1, v}\}.$$

Переменная  $k$  (счетчик циклов) устанавливается в  $k = 1$  и записывается набор точек

$$V^k = \{\mathbf{v}_{i^*}, \mathbf{v}_{j^*}\}. \quad (2.2)$$

2. Находятся все множества из  $\Sigma_4(V^k)$  и вычисляются чебышевский центр и чебышевский радиус каждого из них. Выбирается 4-сеть  $S_4^k$  с наибольшим чебышевским радиусом  $r_k = r(S_4^k)$  и выписывается точка  $\mathbf{c}_k = \mathbf{c}(S_4^k)$ .

3. Строится массив  $\{\bar{r}_i\}_{i=1}^v = \{\|\mathbf{c}_k - \mathbf{v}_i\|\}_{i=1}^v$  расстояний от точки  $\mathbf{c}_k$  до элементов множества  $V$ . Из него выбирается наибольший элемент  $\bar{r}_j = \max_{i=1, \dots, v} \bar{r}_i$ .

4. Если  $\bar{r}_j \leq r_k$ , то выполняется переход к п. 7.

5. Значение величины  $k$  увеличивается на 1 и записывается массив точек

$$V^k = V^{k-1} \cup \{\mathbf{v}_j\}. \quad (2.3)$$

6. Осуществляется переход к п. 2.

7. Записывается значение чебышевского центра  $\mathbf{c}(V) = \mathbf{c}_k$  и чебышевского радиуса  $r(V) = r_k$  множества  $V$ .

**Предложение.** Алгоритм отыскивает значения  $\mathbf{c}(V)$  и  $r(V)$  за количество циклов  $k$ , не превышающее  $(\hat{v} - 1)$ , где  $\hat{v}$  — число точек, лежащих в  $\hat{V} = V \cap \partial(\text{co } V)$ .

**Доказательство.** Покажем, что все точки из наборов (2.2) и (2.3) принадлежат  $\hat{V}$ . Точка  $\mathbf{v}_j$ , которая при построении набора  $V^k$  добавляется к набору точек  $V^{k-1}$ , есть точка максимума на  $V$  функции  $u(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_{k-1}\|$  — евклидова расстояния до чебышевского центра  $\mathbf{c}_{k-1}$  множества  $V^{k-1}$ . Поскольку функция  $u(\mathbf{x})$  является выпуклой и ее множества Лебега (шары с центром в  $\mathbf{c}_{k-1}$ ) — строго выпуклые [21], то ее максимум на любом компактном множестве может достигаться только на его крайних точках. В то же время  $\text{co } V = \text{co } \hat{V}$ , а, значит, любая точка, лежащая в  $V \setminus \hat{V}$ , по теореме Каратеодори может быть представлена в виде выпуклой комбинации не более чем 4 элементов из  $\hat{V}$ . Поэтому если  $\mathbf{v}_i \in V$  и  $\mathbf{v}_i \notin \hat{V}$ , то  $\mathbf{v}_i$  не является крайней точкой множества  $V$  и в ней функция  $u(\mathbf{x})$  не может принимать максимальное значение на множестве  $V$ . Аналогично можно показать, что точки  $\mathbf{v}_{i^*}$  и  $\mathbf{v}_{j^*}$  лежат в  $\hat{V}$  как наиболее удаленные от  $\mathbf{v}_{j^*}$  и  $\mathbf{v}_{i^*}$  соответственно в наборе  $V$ .

Очевидно, что если в п. 4 имеет место  $\bar{r}_j > r_k$ , то точка  $\mathbf{v}_j$  (номер  $j$  которой находится в п. 3) не входит в  $V^k$ . Значит, переход к п. 5 возможен не более чем  $(\hat{v} - 2)$  раз, поскольку уже при  $k = 1$  множество  $V^k$  содержит 2 точки из  $\hat{V}$ . Следовательно, максимальное значение переменной  $k$  может быть  $(\hat{v} - 1)$ .

Также найдется как минимум одна 4-сеть  $S_4^* \subseteq \hat{V}$ , для которой  $r(S_4^*) = r(V)$ . В качестве этой сети можно взять множество точек, лежащих в  $V^*$  и содержащих  $\mathbf{c}(V)$  в своей выпуклой оболочке. Выше показано, что всегда можно найти такое множество, состоящее не более чем из 4 элементов.  $\square$

**З а м е ч а н и е 1.** Согласно доказанному предложению приведенный в статье алгоритм позволяет значительно сократить время работы вычислительного комплекса по сравнению с перебором всех без исключения 4-сетей, образованных точками из  $V$ . Как видно из доказательства утверждения, алгоритм не рассматривает точки, не являющиеся крайними для  $V$ .

При практической реализации, естественно, сразу отбрасываются 4-сети, состоящие из одной точки. Кроме того, в программе хранится информация о всех множествах  $\Sigma_4(V_k)$ , что позволяет на каждом следующем шаге итерации сокращать объем вычислений.

### 3. Итерационные методы построения наилучшего покрытия

Решение задачи о покрытии при большом  $n$  возможно лишь приближенно, численными методами. Авторами использованы методы, аналогичные тем, которые ранее применялись для решения задач об оптимальном покрытии плоских множеств [9; 10], подробнее они описаны в [23; 24].

**О п р е д е л е н и е 3.** Ячейкой Вороного [25, с. 48] точки  $\mathbf{s}_i \in S_n$   $n$ -сети  $S_n$  называется множество точек

$$W_i(S_n) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3: \|\mathbf{w} - \mathbf{s}_i\| = \min\{\|\mathbf{w} - \mathbf{s}_j\|: \mathbf{s}_j \in S_n\}\}. \quad (3.1)$$

Ячейка Вороного есть геометрическое место точек, лежащих не дальше от  $\mathbf{s}_i$ , нежели от других точек  $S_n$ . Если  $\mathbf{s}_i \in \partial(\text{co } S_n)$ , то  $W_i(S_n)$  — неограниченное выпуклое множество; если  $\mathbf{s}_i \notin \partial(\text{co } S_n)$ , то  $W_i(S_n)$  — ограниченный выпуклый многогранник (подробнее см. [26]).

**О п р е д е л е н и е 4.** Диаграммой Вороного [25]  $n$ -сети  $S_n$  называется множество точек

$$W(S_n) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : \exists \mathbf{s}_i \in \Omega_{S_n}(\mathbf{w}), \exists \mathbf{s}_j \in \Omega_{S_n}(\mathbf{w}), (\mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}_j)\}. \quad (3.2)$$

В общем случае диаграмма Вороного состоит из объединения плоских двумерных многообразий, точки которых имеют ровно два ближайших элемента из  $S_n$ , одномерных многообразий (лучей или отрезков на прямых), точки которых имеют ровно три ближайших элемента из  $S_n$ , и нульмерных многообразий — точек, имеющих четыре или более ближайших элемента из  $S_n$ . Из выражений (3.1) и (3.2) видно, что  $W(S_n)$  есть объединение всех граничных точек ячеек Вороного  $W_i(S_n)$  при  $i = \overline{1, n}$ .

**О п р е д е л е н и е 5.** Пусть заданы множество  $M \in \text{comp}(\mathbb{R}^3)$  и  $n$ -сеть  $S_n$ . Областью Дирихле [24, с. 305] точки  $\mathbf{s}_i \in S_n$  в множестве  $M$  называется подмножество  $D_i(M, S_n) = M \cap W_i(S_n)$ .

По построению  $D_i(M, S_n)$  есть та часть множества  $M$ , которая лежит ближе к точке  $\mathbf{s}_i$ , нежели к остальным точкам  $S_n$ . В случае, если точка  $\mathbf{s}_i$  расположена вне  $M$  ее область Дирихле может быть пустым множеством. Если  $M$  — выпуклое множество, то и все его области Дирихле в  $M$  выпуклы. В частности, если  $M$  — выпуклый многогранник, то его области Дирихле — тоже выпуклые многогранники [26].

Авторами разработан итерационный алгоритм построения  $n$ -сети, направленный на уменьшение хаусдорфова отклонения  $h(M, S_n)$  множества  $M$  от  $n$ -сети. Первым шагом алгоритма является генерация начального массива точек  $S_n^0 \subset M$ . Затем строятся области Дирихле  $D_i(M, S_n^0)$  для каждой точки  $\mathbf{s}_i \in S_n^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Затем строится новая  $n$ -сеть  $S_n^1 = \{\mathbf{s}_i^1\}_{i=1}^n$  как набор их чебышевских центров

$$\mathbf{s}_i^1 = \mathbf{c}(D_i(M, S_n^0)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

После этого вычисляется величина  $d_0 = d(S_n^0, S_n^1) = \max\{h(S_n^0, S_n^1), h(S_n^1, S_n^0)\}$ , — хаусдорфова расстояние между множествами  $S_n^0$  и  $S_n^1$ . Если величина  $d_0$  меньше заданного параметра точности, то работа алгоритма заканчивается. Если больше, то процедура повторяется, но в качестве начальной  $n$ -сети  $S_n^0$  берется уже  $S_n^1$ .

При построении областей Дирихле для многогранника авторами реализовано разбиение на области Дирихле, основанное на выделении его так называемых характеристических точек. Данный метод описан, в частности, в работе [24] (для плоского случая) и применялся авторами в работе [10] для множеств на поверхности сферы.

**О п р е д е л е н и е 6.** Характеристической относительно  $n$ -сети  $S_n$  называется точка  $\mathbf{m}_i^*$  многогранника  $M$ , для которой выполняется одно из условий:

- $\mathbf{m}_i^*$  — вершина многогранника  $M$ ;
- $\mathbf{m}_i^*$  принадлежит ребру многогранника  $M$  и для нее найдется не менее двух, ближайших в евклидовой метрике, элементов из  $S_n$ ;
- $\mathbf{m}_i^*$  принадлежит грани многогранника  $M$  и для нее найдется не менее трех, ближайших в евклидовой метрике, элементов из  $S_n$ ;
- $\mathbf{m}_i^*$  принадлежит  $M$  и для нее найдется не менее четырех, ближайших в евклидовой метрике, элементов из  $S_n$ .

Множество характеристических точек многогранника  $M$  относительно  $n$ -сети  $S_n$  обозначим  $X(M, S_n)$ . Если  $M$  — многогранник, выполняются равенства

$$\mathbf{c}(D_i(M, S_n)) = \mathbf{c}(X_i(M, S_n)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.4)$$

где  $X_i(M, S_n) = X(M, S_n) \cap D_i(M, S_n)$ . Выпуклый многогранник  $M$  есть пересечение полупространств  $\Pi_j$ , ограниченных плоскостями  $\partial\Pi_j$ , проходящими через грани  $M$ . Ячейка Вороного  $W_i(S_n)$  есть пересечение полупространств  $\Pi_k^*$ , ограниченных плоскостями  $\partial\Pi_k^*$ , равноудаленными от точки  $\mathbf{s}_i$  и точек  $\mathbf{s}_k \in S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}$ . Значит, область Дирихле есть выпуклый многогранник, представляющий собой пересечение конечного числа полупространств  $\Pi_j$  и  $\Pi_k^*$ . Поэтому для любой точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  максимум евклидова расстояния на множестве  $D_i(M, S_n)$  достигается в его крайних точках (подробнее см. [26]). По сути, характеристические точки  $\mathbf{m}_i^* \in X_i(M, S_n)$  — это места пересечения трех (или более) полуплоскостей из числа  $\partial\Pi_j$  и  $\partial\Pi_k^*$ .

Выражение (3.4) позволяет свести отыскание чебышевского центра области Дирихле  $D_i(M, S_n)$  к нахождению его для набора точек с помощью алгоритма. При этом работу программного комплекса можно оптимизировать за счет сохранения информации о 4-сетях, образованных из точек (2.2) и (2.3). Множества  $X_i(M, S_n)$  и  $X_j(M, S_n)$  при  $i \neq j$  могут иметь общие точки (лежащие на плоскости, образованной срединным перпендикулярами к отрезку  $[\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j]$ ) в случае, если  $W_i(S_n) \cap W_j(S_n) \neq \emptyset$ . Поэтому информация о чебышевских центрах и радиусах подмножеств  $S_4 \subseteq X_i(M, S_n)$  может использоваться для отыскания  $\mathbf{c}(X_j(M, S_n))$  при  $i \neq j$ .

При программной реализации описанной схемы авторы столкнулись с ситуацией, когда хаусдорфово отклонение  $h(M, S_n)$  от полученной  $n$ -сети  $S_n$  существенно зависит от начального набора  $S_n^0$ . Часто в итоге вычислений реализуется  $n$ -сеть, которая достаточно далека от оптимальной, однако применение к этой  $n$ -сети  $S_n$  формулы (3.3) порождает итерацию, мало от нее отличающуюся. Поэтому в программном комплексе предусмотрена возможность организации “итерации из итераций” со стохастическим изменением координат точек. После того как найдено некоторое значение  $n$ -сети  $S_n$ , генерируется массив из  $n$  векторов  $\Psi = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n = \{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^n$ , координаты которых суть случайные числа, равномерно распределенные на отрезке  $[-1, 1]$ . Затем конструируется множество точек

$$\tilde{S}_n = \{\mathbf{s}_i + \lambda h(M, S_n) \mathbf{x}_i\}_{i=1}^n,$$

где  $\lambda \in (0, 1)$  — параметр, задаваемый в программе. По построению  $\tilde{S}_n$  есть  $n$ -сеть, хаусдорфово отклонение от которой множества  $M$  возможно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} h(M, \tilde{S}_n) &\leq h(M, S_n) + h(S_n, \tilde{S}_n) \leq h(M, S_n) + \lambda h(M, S_n) \max_{\mathbf{x}_i \in \Psi} \|\mathbf{x}_i\| \\ &\leq h(M, S_n) + \lambda h(M, S_n) \sqrt{3} = h(M, S_n) (1 + \lambda \sqrt{3}). \end{aligned}$$

В то же время результаты итерационного применения к  $\tilde{S}_n$  формулы (3.3) могут дать лучший результат по сравнению с  $h(M, S_n)$ , поскольку введение элемента стохастики позволяет отыскивать новые  $n$ -сети, которые не были бы получены детерминированными методами.

#### 4. Оценка радиуса шаров наилучшего покрытия

При построении наилучших покрытий компактных множеств большим числом шаров важно оценить их радиус  $r$ . Это требуется прежде всего для отыскания критерия окончания работы программного комплекса при достижении определенного значения хаусдорфова отклонения  $h(M, S_n)$  от текущей найденной  $n$ -сети  $S_n$ . Кроме того, примерное знание  $r$  позволяет более эффективно генерировать начальное значение массива центров шаров  $S_n^0$  за счет выбора минимально допустимого расстояния между точками из  $S_n^0$ .

Схожая задача впервые была исследована А. Н. Колмогоровым и В. М. Тихомировым в работах [27; 28] в несколько иной постановке — они оценивали число шаров  $n$ , которым можно покрыть множество при заданном их радиусе  $r$ . Для компактных множеств  $M$  в евклидовом пространстве размерности  $d$ , имеющих ненулевую меру, ими получена оценка  $R_M(n) = O(1/\sqrt[d]{n})$ , где  $R_M(n)$  — минимальный радиус, позволяющий построить набор из  $n$  шаров, в который

вложен компакт  $M$ . Естественно, для конкретных фигур  $M$  в трехмерном пространстве практический смысл имеют не качественные выражения, а численные неравенства относительно поведения функции  $R_M(n)$  при росте  $n$ .

**Теорема.** Пусть множество  $M$  — куб с длиной ребра  $l$ . Тогда выполняется

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (R_M(n) \sqrt[3]{n}) \leq \frac{\sqrt{3}l}{2}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  — верхний предел последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Доказательство.** Допустим, неравенство (4.1) не выполняется. Тогда найдутся монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  и число  $\gamma > 0$  такие, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad R_M(n_i) \sqrt[3]{n_i} > \frac{\sqrt{3}l}{2} + \gamma. \quad (4.2)$$

Запишем наибольший куб  $P = p^3$  целого числа  $p$ , не превосходящий  $n_i$ , и разность  $q = n_i - p^3$ . Множество  $M$  можно представить как объединение  $P$  равных кубов  $M_j, j = \overline{1, P}$ , подобных  $M$ , с длиной стороны, равной  $l^* = l/p$ . Обозначим как  $\mathbf{c}_j = \mathbf{c}(M_j)$  чебышевский центр куба  $M_j$  (который совпадает с его центром симметрии). Чебышевский радиус  $r(M_j)$  равен расстоянию от  $\mathbf{c}_j$  до любой из вершин  $M_j$ , т.е. половине длины диагонали куба  $M_j$ ; обозначим его как

$$r_p = r(M_j) = \frac{\sqrt{3}l}{2p} \quad \forall j = \overline{1, P}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим  $P$ -сеть  $S_P = \{\mathbf{c}_j\}_{j=1}^P$ . Для любой точки  $\mathbf{m} \in M$  выполняется оценка

$$\rho(\mathbf{m}, S^*) \leq \max\{r(M_j) : j = \overline{1, P}\} = r_p,$$

поскольку  $\mathbf{m}$  лежит хотя бы в одном из кубов из числа  $M_j, j = \overline{1, P}$ . Построим объединение  $\Xi(S_{n_i}, r_p)$  шаров радиуса  $r_p$ . Массив центров строим по следующему принципу: первые  $P$  элементов из набора  $S_{n_i}$  совпадают с точками из  $S_P$ , а в качестве оставшихся  $q$  элементов берутся произвольные  $q$  точек, принадлежащих  $M$ . По построению  $S_{n_i} \subseteq S_P$ , а значит  $h(S_{n_i}, M) \leq h(S_P, M) \leq r_p$ . Поэтому выполняется вложение  $M \subseteq \Xi(S_{n_i}, r_p)$ . Следовательно, выполняется оценка

$$R_M(n_i) \leq r_p. \quad (4.4)$$

Оценим величину  $q$ . Поскольку  $p$  — наибольшее целое число, куб которого не превосходит  $n_i$ , выполняется неравенство  $(p+1)^3 > n_i$ . Представив  $n_i$  в виде суммы  $P + q$ , можно записать его в виде

$$p^3 + q < (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1.$$

Перенеся все слагаемые, содержащие  $p$ , в правую часть, получаем  $q < 3p^2 + 3p + 1$ . Поскольку  $n_i = p^3 + q \geq p^3$ , то получаем оценку  $q < 3\sqrt[3]{n_i^2} + 3\sqrt[3]{n_i} + 1$ .  $n_i$  — натуральное число, то  $n_i^2 \geq n_i \geq 1$ , и можно записать неравенство  $q < 3\sqrt[3]{n_i^2} + 3\sqrt[3]{n_i^2} + \sqrt[3]{n_i^2} = 7\sqrt[3]{n_i^2}$ . Следовательно, выполняется оценка для числа  $P = p^3$ :  $P = n_i - q \geq n_i - 7\sqrt[3]{n_i^2}$ . При достаточно больших  $n_i$ , точнее, при  $n_i > 7^3 = 343$ , число  $n_i - 7\sqrt[3]{n_i^2}$  является положительным. В этом случае из (4.3) следует

$$r_p = \frac{\sqrt{3}l}{2\sqrt[3]{P}} \leq \frac{\sqrt{3}l}{2p\sqrt[3]{n_i - 7\sqrt[3]{n_i^2}}}.$$

Видно, что оценку (4.4) можно записать для  $n_i > 343$  в виде

$$R_M(n_i) \leq \frac{\sqrt{3}l}{2\sqrt[3]{n_i}} \varphi(n_i),$$

где

$$\varphi(n_i) = \frac{\sqrt[3]{n_i}}{\sqrt[3]{n_i - 7\sqrt[3]{n_i^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 7n_i^{-1/3}}}.$$

Умножив обе части неравенства на  $\sqrt[3]{n_i}$ , приходим к выражению

$$R_M(n_i)\sqrt[3]{n_i} \leq \frac{\sqrt{3l}}{2}\varphi(n_i). \quad (4.5)$$

Из условия  $n_i \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$  получаем значение предела для функции  $\varphi(n_i)$ :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(n_i) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 7n_i^{-1/3}}} = 1.$$

По условию длина ребра куба  $l > 0$ . Значит, для любого  $\gamma > 0$  можно указать натуральное число  $i_\gamma$  такое, что

$$\forall i > i_\gamma \quad |\varphi(n_i) - 1| < \frac{\gamma}{\sqrt{3l}}.$$

Подставив данную оценку в неравенство (4.5), имеем

$$\forall i > i_\gamma \quad R_M(n_i)\sqrt[3]{n_i} \leq \frac{\sqrt{3l}}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{3l}}\right) = \frac{\sqrt{3l}}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Получилось противоречие с условием (4.2) для последовательности  $\{n_i\}_{i=1}^\infty$  и числа  $\gamma > 0$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е 2.** Теорема может рассматриваться как экстраполяция на случай трехмерного пространства теоремы об асимптотике наилучшего покрытия квадрата набором кругов из работы [10]. При этом оценка (4.1) может быть улучшена, поскольку при росте числа шаров центры наилучшего покрытия стремятся не к кубической решетке, а к более сложным конструкциям, описанным в [29, с. 265].

## 5. Примеры построения покрытий

Рассмотрим несколько примеров построения наилучших покрытий множеств в трехмерном евклидовом пространстве наборами шаров минимального радиуса. Для их реализации авторами использовался программный комплекс, реализованный в пакете MATLAB [30]. В каждом из примеров проводился многократный его запуск с последующим сравнением результатов.

**П р и м е р 1.** Требуется построить наилучшее покрытие куба  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$  с длиной ребра  $l = 2$  при числе шаров  $n$ , равном 27 и 28.

Решение задачи проведено на базе вышеизложенного алгоритма и итерационного улучшения  $n$ -сети с использованием стохастической коррекции результатов.

Полученный результат при  $n = 27$ : массив  $S_{27}$  центров шаров покрытия, близкого к наилучшему, имеет вид

$$\begin{aligned} S_{27} \approx \{ & (-0.7003, -0.6922, -0.6939), (-0.7098, -0.7117, -0.005), (-0.6931, -0.6982, 0.6834), \\ & (-0.7180, 0.0093, -0.718), (-1, -0.0001, -0.0008), (-0.7161, -0.0134, 0.7191), (-0.6914, \\ & 0.7029, -0.6895), (-0.7121, 0.7123, 0.0029), (-0.6981, 0.692, 0.6909), (0.0045, -0.7202, \\ & -0.7226), (0.0034, -1, -0.0091), (0.0029, -0.7106, 0.7223), (-0.0009, 0.0009, -1), \\ & (0.0035, -0.0031, -0.0041), (0.0007, -0.0025, 1), (0.0014, 0.7121, -0.7214), (-0.0062, \\ & 1, 0.0049), (-0.007, 0.7113, 0.7243), (0.7027, -0.6901, -0.6937), (0.7117, -0.7139, -0.0029), \end{aligned}$$

$(0.6934, -0.6997, 0.6894), (0.7132, 0.0091, -0.7202), (1, 0.0014, 0.0031), (0.7197, 0.0019,$   
 $0.7248), (0.6939, 0.6985, -0.6917), (0.7159, 0.7121, -0.0003), (0.6912, 0.7026, 0.6918)\}$ .

Радиус шаров покрытия  $r \approx 0.5441$ .

Множество  $M$  представлено на рис. 1. На рис. 2 показана часть шаров  $B(\mathbf{s}_i, r)$  покрытия  $\Xi(S_{27}, r)$  (у которых ордината центра  $\mathbf{s}_i$  больше  $-0.5$ ), чтобы проиллюстрировать его структуру в окрестности начала координат. Полностью множество  $\Xi(S_{27}, r)$  представлено на рис. 3 и 4. Заметим, что, хотя число  $n = 27$  является кубом натурального числа 3, точки  $S_{27}$  не являются центрами кубической решетки, а образуют более сложную структуру.

Значение величины  $r\sqrt[3]{n} \approx 0.5441\sqrt[3]{27} \approx 1.6323$  немного меньше, чем  $\sqrt{3}l/2 = \sqrt{3} \approx 1.7321$ , что иллюстрирует результат теоремы.

Полученный результат при  $n = 28$ : массив  $S_{28}$  центров шаров покрытия, близкого к наилучшему, имеет вид

$S_{28} \approx \{(-0.6589, -0.7127, -0.7006), (-0.7127, -0.7193, -0.0538), (-0.6414, -0.8689,$   
 $0.6632), (-0.7145, -0.0276, -0.7879), (-1, 0.0094, -0.0932), (0.0516, 0.0268, 1), (-0.6777, 0.6787,$   
 $-0.7010), (-0.7150, 0.7115, -0.0686), (-0.7251, 0.3167, 0.7176), (0.0761, -0.7113, 0.7068),$   
 $(0.0303, 0.0339, -0.0036), (-0.0215, 0.7756, -0.7011), (0.0462, 0.7220, 0.6885), (0.7075,$

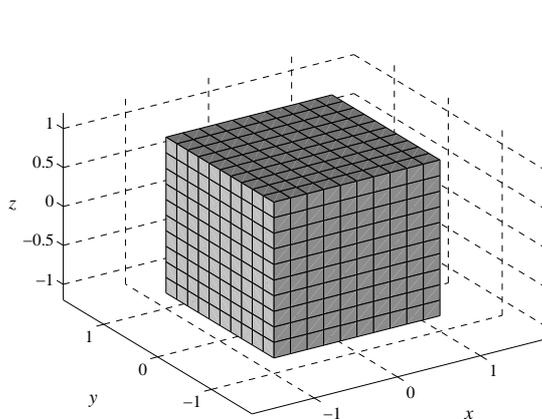


Рис. 1. Множество  $M$  в примере 1.

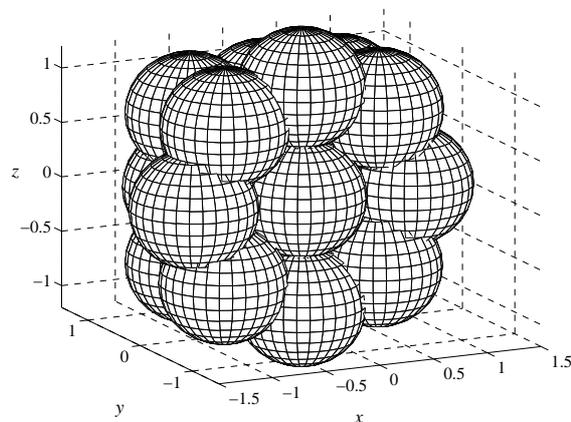


Рис. 2. Часть покрытия  $\Xi(S_{27}, r)$  куба  $M$  27 шарами.

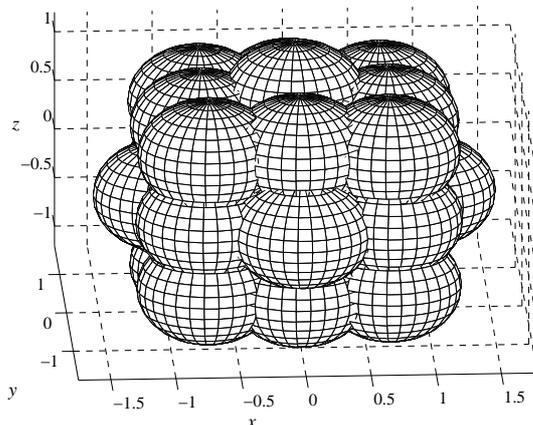


Рис. 3. Покрытие  $\Xi(S_{27}, r)$  куба  $M$ : вид 1.

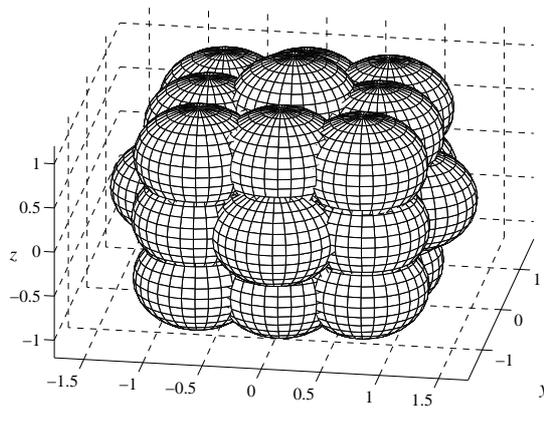


Рис. 4. Покрытие  $\Xi(S_{27}, r)$  куба  $M$ : вид 2.

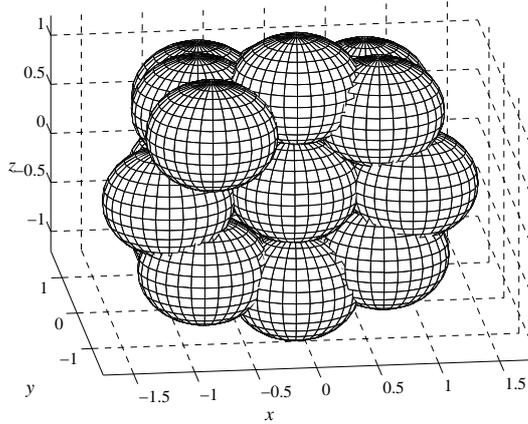


Рис. 5. Часть покрытия  $\Xi(S_{28}, r)$  куба  $M$ .

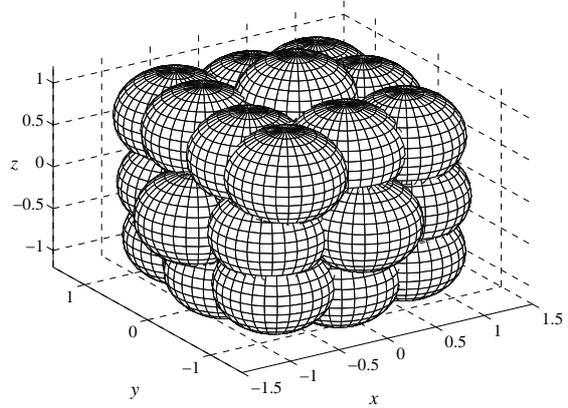


Рис. 6. Покрытие  $\Xi(S_{28}, r)$  куба  $M$ .

$(-0.6710, -0.6928), (0.7298, -0.7253, -0.0123), (0.7084, -0.6815, 0.6801), (0.7637, 0.0423,$   
 $-0.7180), (0.7236, 0.0094, 0.7478), (0.6788, 0.7132, -0.6737), (0.7090, 0.7219, 0.0022),$   
 $(0.6964, 0.7020, 0.6837), (-0.6542, 0.8634, 0.6502), (-0.6864, -0.3469, 0.6890), (0.0134,$   
 $-0.7043, -0.8058), (0.0589, -1, -0.0374), (0.0411, 0.0262, -1), (0.0094, 1, -0.0159), (1, 0.0235, 0)\}.$

Радиус шаров покрытия  $r \approx 0.5376$ .

Значение величины  $r\sqrt[3]{n} = 0.5441\sqrt[3]{28} \approx 1.6324$ , как и в предыдущем случае, немного меньше, чем  $\sqrt{3}l/2 \approx 1.7321$ , хотя  $n = 28$  не является кубом натурального числа.

На рис. 5 показана часть шаров  $B(s_i, r)$  покрытия  $\Xi(S_{28}, r)$  (у которых ордината центра  $s_i$  больше  $-0.5$ ), чтобы проиллюстрировать его структуру в окрестности начала координат. Полностью множество  $\Xi(S_{28}, r)$  представлено на рис. 6.

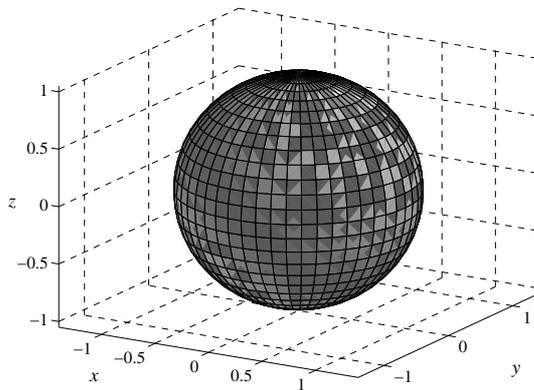
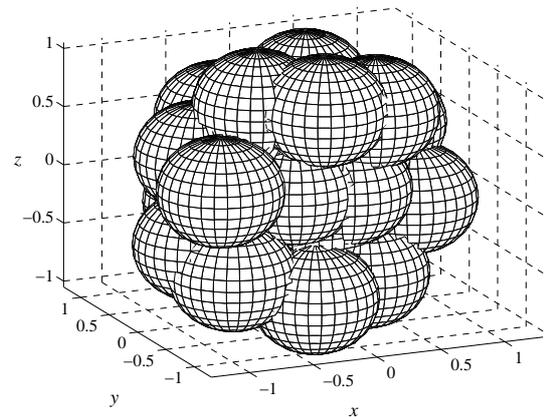
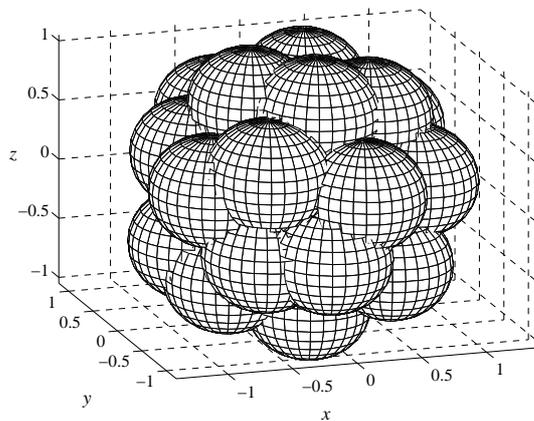
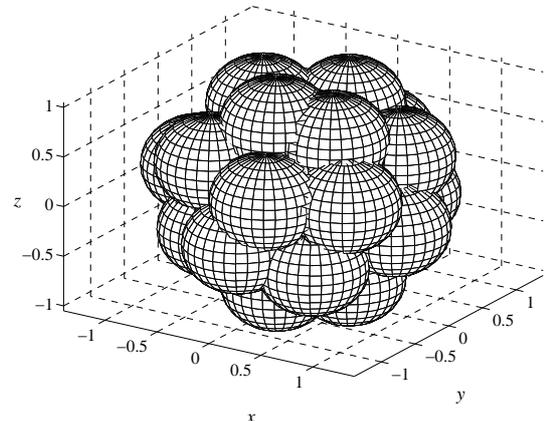
**Пример 2.** Требуется построить наилучшее покрытие шара  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  при числе шаров  $n$ , равном 29.

Шар не является многогранником, однако его граница может быть хорошо аппроксимирована многоугольниками [29, с. 189]. Поэтому для вычисления его покрытия шарами был применен программный комплекс с небольшими дополнительными процедурами, позволяющими находить области Дирихле в шаре при заданной  $n$ -сети и их чебышевские центры.

Полученный результат при  $n = 29$ : массив  $S_{29}$  центров шаров покрытия, близкого к наилучшему, имеет вид

$S_{29} \approx \{(-0.6329, -0.1855, -0.5929), (-0.4827, -0.5803, -0.3007), (0.0857, 0.0366, -0.3076),$   
 $(-0.0075, -0.3857, 0.7959), (-0.1834, 0.3923, -0.7743), (-0.0785, -0.8411, -0.2682),$   
 $(-0.3749, -0.0205, 0.7876), (-0.5317, 0.4934, -0.1753), (-0.7352, 0.1925, 0.3261), (0.1918,$   
 $0.8196, 0.2889), (-0.7976, -0.3369, 0.1924), (0.1852, -0.8357, 0.2299), (0.4663, -0.0394,$   
 $-0.7533), (-0.1969, 0.8261, -0.2357), (0.7381, 0.2775, 0.4076), (0.8681, 0.0109, -0.1805),$   
 $(0.5358, 0.6626, -0.1489), (0.1880, 0.387, 0.7587), (-0.0492, -0.3125, -0.8283), (0.7161,$   
 $-0.4846, 0.1961), (0.4762, -0.5981, -0.4485), (-0.1445, -0.1907, 0.0808), (0.4498, -0.2566,$   
 $0.6921), (0.4078, 0.5088, -0.6015), (-0.4742, -0.6365, 0.3952), (0.0696, 0.2487, 0.166),$   
 $(-0.7823, 0.119, -0.402), (-0.3833, 0.6356, 0.4878), (0.2848, -0.1494, 0.0184)\}.$

Радиус шаров покрытия  $r \approx 0.4631$ .

Рис. 7. Множество  $M$  в примере 2.Рис. 8. Часть покрытия  $\Xi(S_{29}, r)$  шара  $M$ .Рис. 9. Покрытие  $\Xi(S_{29}, r)$  шара  $M$ : вид 1.Рис. 10. Покрытие  $\Xi(S_{29}, r)$  шара  $M$ : вид 2.

Множество  $M$  представлено на рис. 7. На рис. 8 показана часть шаров  $B(\mathbf{s}_i, r)$  из покрытия  $\Xi(S_{29}, r)$  (у которых ордината центра  $\mathbf{s}_i$  больше  $-0.4$ ), чтобы проиллюстрировать его структуру в окрестности начала координат. Полностью множество  $\Xi(S_{29}, r)$  представлено на рис. 9 и 10.

Примеры иллюстрируют работу программного комплекса по построению покрытий, близких к оптимальным, множеств в трехмерном пространстве наборами из  $n$  шаров равного радиуса. Полученные результаты свидетельствуют о высокой точности применяемых численных методов, позволяющих минимизировать радиус покрытия. При моделировании конкретных примеров требовались большие затраты машинного времени, связанные прежде всего с перебором 4-сетей при построении областей Дирихле и отыскании их чебышевских центров. Это означает, что при увеличении числа  $n$  потребуется применять распараллеливание вычислений. Оно, в свою очередь, вызывает необходимость изменения алгоритмов. Одной из возможностей представляется введение возможностей конструирования наилучших  $n_i$ -сетей для подмножеств  $M_i$  множества  $M$  при  $i = \overline{1, k}$ ,  $k > 1$ ,  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ,  $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k = M$ , а затем построения на их базе аппроксимации  $n$ -сети  $S_n$ , хаусдорфово отклонение от которой множества  $M$  близко к минимально возможному. Другим путем увеличения скорости вычислений может стать использование субградиентного метода [31] отыскания чебышевского центра многогранника, подобного описанному, например, А. Ф. Шориковым в работах [32; 33], посвященных построению аппроксимаций многогранников. Ранее авторы использовали подобные методы для многоугольников на плоскости [8].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Ушаков В.Н., Лавров Н.Г., Ушаков А.В. Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 277–286.
3. Ушаков В.Н., Малев А.Г. К вопросу о дефекте стабильности в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.
4. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.
5. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука. 1988. 384 с.
6. Aronov V., Ezra E., and Sharir M. Small-size  $\varepsilon$ -nets for axis-parallel rectangles and boxes // SIAM J. Comput. 2010. Vol. 39, no. 7. P. 3248–3282.
7. Laue S. Geometric set cover and hitting sets for polytopes in  $R^3$  // 25th Int. Symp. Theoretical Aspects of Comput. Sci. 2008. Vol. 1. P. 479–490.
8. Лебедев П.Д., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 79–90.
9. Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств наборами кругов // Вест. Удмурт. ун-та. 2013. Вып. 4. С. 88–99. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
10. Ушаков В.Н., Лахтин А.С., Лебедев П.Д. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 291–308.
11. Райгородский А.М. Вокруг гипотезы Борсука // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 23. С. 147–164.
12. Katarzowa–Karanowa P. Über ein euklidisch-geometrisches Problem von B. Grünbaum // Arch. Math. 1967. Vol. 18, iss. 6. P. 663–672.
13. О задаче патрулирования границы акватории, охраняемой группой подводных аппаратов / И.В. Бычков, Н.Н. Максимкин, И.С. Хозяинов, Л.В. Киселев // Технические проблемы освоения мирового океана: материалы 5-й Всерос. науч.-техн. конф. Владивосток, 2013. С. 424–429.
14. Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 87–100.
15. Гаркави А.Л. О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 210–211.
16. Гаркави А.Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1962. Т. 26, № 1. С. 87–106.
17. Сосов Е.Н. Метрическое пространство всех  $N$ -сетей геодезического пространства // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2009. Т. 15, вып. 4. С. 136–149.
18. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 6. С. 139–145.
19. Белобров П.К. К вопросу о чебышевском центре множества // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1964. № 1 (38). С. 3–9.
20. Сосов Е.Н. Наилучшее приближение в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта шаром // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 2. С. 226–236.
21. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / пер. с нем. В.А.Залгаллера, Т.В. Хачатуровой; под ред. В.А. Залгаллера. М.: Наука, 1985. 335 с. (Leichtweiss K. von. Konvexe Nengene.)
22. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., перераб. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 760 с.
23. Пиявский С.А. Об оптимизации сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1968. № 1. С. 68–80.
24. Брусов В.С., Пиявский С.Л. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 304–312.
25. Местецкий Л.М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. 288 с.
26. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. М.: Мир. 1989. 478 с.
27. Колмогоров А.Н. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 3. С. 385–388.

28. **Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.**  $\varepsilon$ -энтропия и  $\varepsilon$ -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Вып 2(86). С. 3–86.
29. **Тот Л.Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 365 с.
30. **Чен К., Джиблин П., Ирвинг А.** MATLAB в математических исследованиях. М.: Мир, 2001. 346 с.
31. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 382 с.
32. **Шориков А.Ф.** Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. I // Автоматика и телемеханика. 1996. № 7. С. 130–143.
33. **Шориков А.Ф.** Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. II // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 139–150.

Ушаков Владимир Николаевич  
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН  
зав. отделом

Поступила 10.04.2015

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
профессор  
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина  
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич  
канд. физ.-мат. наук  
науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
e-mail: pleb@yandex.ru