ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ В АБСТРАКТНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас, А. А. Чикрий

Изучается игровая задача сближения для системы, динамика которой описывается дифференциально-операторным уравнением в гильбертовом пространстве. Уравнение записывается в неявной форме с необратимым, вообще говоря, оператором при производной. Предполагается, что характеристический пучок операторов, отвечающий линейной части уравнения, удовлетворяет ограничению параболического типа в некоторой правой полуплоскости. С использованием метода разрешающих функционалов получены достаточные условия приведения динамического вектора системы на цилиндрическое терминальное множество. Рассматриваются приложения к системам, описываемым уравнениями в частных производных.

Ключевые слова: дифференциальная игра, параболическая система, эргодическая теорема, псевдорезольвента, производящий оператор полугруппы, многозначное отображение, разрешающий функционал, уравнения в частных производных.

L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, A. A. Chikrii. On a differential game in an abstract parabolic system.

We consider the game problem of approach for a system whose dynamics is described by a differential operator equation in a Hilbert space. The equation is written in an implicit form with generally non-invertible operator multiplying the derivative. It is assumed that the characteristic operator pencil corresponding to the linear part of the equation satisfies a constraint of parabolic type in a right half-plane. Using the method of resolving functionals, we obtain sufficient conditions for the approach of a dynamical vector of the system to a cylindrical terminal set. Applications to systems described by partial differential equations are considered.

Keywords: differential game, parabolic system, ergodic theorem, pseudoresolvent, generator of a semigroup, set-valued mapping, resolving functional, partial differential equation.

Введение

Фундаментальные методы исследования конфликтно-управляемых процессов, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями в конечномерных пространствах, разработаны в [1–3]. Важнейшая роль в становлении и развитии теории дифференциальных игр принадлежит А. И. Субботину [2; 4–7]. Он внес огромный вклад в разработку позиционного подхода в исследовании игровых задач, что привело к созданию эффективного метода — правила экстремального преследования. Ключевую роль в изучении структуры динамических игр играют теоремы об альтернативе, полученные им совместно с Н. Н. Красовским. Особого внимания заслуживает цикл работ А. И. Субботина, связанный с исследованием основного уравнения теории дифференциальных игр — уравнения Гамильтона — Якоби и его обобщенных решений [4–6], получивший дальнейшее развитие в [8].

В настоящей работе мы изучаем дифференциальные игры в распределенных системах, которые описываются уравнениями в частных производных и более общими дифференциально-операторными уравнениями в абстрактных гильбертовых пространствах. Проблемы, затронутые нами, примыкают к исследованиям [9–13]. В статье [9] используется первый прямой метод Л. С. Понтрягина, в [10; 11] изучается правило экстремального прицеливания Н. Н. Красовского, в статьях [12; 13] ход игры интегрально оценивается с помощью разрешающего функционала, который обобщает понятие разрешающей функции в конечномерном пространстве [14; 15] на бесконечномерную ситуацию. В данной работе мы показываем, как метод разрешающих функционалов применяется к дифференциальным играм в системах параболического типа, явным и неявным. Явные параболические системы можно описать с помощью дифференциальных уравнений в частных производных типа Ковалевской, разрешенных относительно производной по времени, как, например, в [11], неявные — с помощью уравнений, не принадлежащих типу Ковалевской, т. е. не разрешенных относительно производной по времени. Мы изучаем дифференциальную игру в системе, которая описывается дифференциальным уравнением параболического типа в абстрактной, вообще говоря, неявной форме — в виде неявного, в частном случае явного, дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Решения уравнения понимаются в сильном смысле в отличие от слабых решений в [10; 11]. Для применения метода разрешающих функций или функционалов принципиальным является представление решения уравнения, допускающее аддитивное вхождение члена с начальными данными и блока управления [15]. Чтобы получить такое представление решения для неявного уравнения, которому отвечает пара операторов или их пучок, с применением эргодических теорем Хилле для псевдорезольвент [16, гл. VIII, разд. 4] осуществляются специальное разложение параболического пучка и отвечающее ему разложение пространства состояний.

1. Постановка задачи и предварительные результаты

Динамика системы описывается дифференциально-операторным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Ay(t)] + By(t) = K_1u(t) - K_2v(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

с неограниченными операторами A, B и ограниченными операторами K_1, K_2. *Явное уравнение*

$$y'(t) + By(t) = K_1u(t) - K_2v(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

есть частный случай *неявного уравнения* (1.1), в котором оператор A является единичным. Явная конфликтно-управляемая система (1.2) с ограниченными операторами K_1, K_2 и неограниченным оператором B таким, что $-B$ порождает сильно непрерывную полугруппу, была предметом исследования статьи [11]. В статье [9] рассматривалась явная систем с ограниченными операторами. Относительно уравнения (1.1) предполагаем: A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из сепарабельного вещественного гильбертова пространства H_1, вообще говоря, в другое сепарабельное вещественное гильбертово пространство H_2 с областями определения D_A, D_B соответственно, $D = D_A \cap D_B \ne \{0\}$; K_1, K_2 — ограниченные линейные операторы из сепарабельных вещественных гильбертовых пространств U, V в пространство H_2; управления преследователя $u(t)$ и убегающего $v(t)$ суть измеримые вектор-функции, принимающие значения из областей управления U_0 и V_0, которые являются замкнутыми выпуклыми ограниченными множествами в пространствах U и V. Предполагается, что преследователю при выборе управления $u(t)$ в момент t становится известной вся предыстория управления убегающего $v_t(\cdot) = \{\, v(s) \colon s \in [0, t]\}$. Проблем с физической осуществимостью таких управлений, как будет показано далее, не возникает, так как на двух соседних участках используются различные контруправления, а предыстория управления убегающего необходима лишь для нахождения момента переключения [14; 15]. По существу, преследователь использует некоторую специальную квазистратегию [7]. В изучаемой системе, как и в работах [9;10], при управлениях преследователя и убегающего стоят операторы. Их наличие позволяет рассматривать управления $u(t)$ и $v(t)$, вообще говоря, в разных пространствах. С другой стороны, как показывает теорема 1, при соответствующих ограничениях на эти операторы мы можем для негладких управлений рассматривать сильные решения, удовлетворяющие уравнению почти всюду, а не только в слабом смысле, т. е. в смысле скалярного произведения (см. определение различных классов решений дифференциально-операторных уравнений в [17]). Слабые решения при изучении дифференциальных игр также называют движениями [10; 11].

Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ — пространство линейных ограниченных операторов из H_1 в H_2, $\mathcal{L}(H_1, H_1) = \mathcal{L}(H_1)$; $\mathrm{Ker}A$ — ядро оператора A; $\mathrm{Im}A$ — образ оператора A; E — единичный оператор в соответствующем пространстве;

$L_2(0,T;H_1)$ — пространство H_1-значных измеримых функций, интегрируемых с квадратом нормы на $[0,T]$; $W_2^1(0,T;H_1)$ — пространство Соболева H_1-значных функций, которые принадлежат $L_2(0,T;H_1)$ вместе со своими обобщенными производными. Функции из $W_2^1(0,T;H_1)$ будем считать непрерывными на $[0,T]$, изменив их, если это необходимо, на множестве меры нуль (теорема 1.1 [18, гл. 3]). Заметим, что в сепарабельном пространстве понятия сильной и слабой измеримости эквивалентны [19, гл. III, п. 3.5], и поэтому в дальнейшем мы употребляем термин измеримость.

Для неявного уравнения (1.1) рассматриваем начальное условие

$$Ay(0) = q. \tag{1.3}$$

Пусть $u(t) \in L_2(0,T;U)$, $v(t) \in L_2(0,T;V)$. *Решением начальной задачи* (1.1), (1.3) называется функция $y(t) \in L_2(0,T;H_1)$ такая, что $y(t) \in D$ для почти всех $t \in [0,T]$, $Ay(t) \in W_2^1(0,T;H_2)$, $y(t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (1.1) и выполнено начальное условие (1.3). Выясним условия разрешимости начальной задачи (1.1), (1.3) и опишем решения. *Целью игры в системе* (1.1), (1.3) является приведение *динамического вектора* $Ay(t)$ на терминальное множество M за конечное время (не превосходящее T) в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

На динамику уравнения (1.1) существенное влияние оказывает поведение резольвенты пучка операторов $\lambda A + B$. Чтобы использовать пучок операторов и его резольвенту для комплексных значений спектрального параметра λ, как и в случае резольвенты одного оператора, перейдем к комплексным оболочкам $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2$ вещественных пространств H_1, H_2 и комплексным расширениям $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ операторов A, B. Предположим, что в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \geq C_1$ пучок операторов $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B} : \widetilde{D} = D_{\widetilde{A}} \cap D_{\widetilde{B}} \to \widetilde{H}_2$ имеет резольвенту $(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_2, \widetilde{H}_1)$ и *псевдорезольвента* $\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_2)$ удовлетворяет оценке

$$\|\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}\| \leq \frac{C_2}{1+|\lambda|}, \quad \mathrm{Re}\lambda \geq C_1, \quad C_2 > 0. \tag{1.4}$$

В случае единичного оператора A оценка (1.4) принимает вид

$$\|(\lambda E + \widetilde{B})^{-1}\| \leq \frac{C_2}{1+|\lambda|}, \quad \mathrm{Re}\lambda \geq C_1, \quad C_2 > 0. \tag{1.5}$$

Это есть ограничение на резольвенту оператора $-\widetilde{B}$, отвечающего абстрактному параболическому уравнению $y'(t) = -\widetilde{B}y(t)$ [20, гл. 1, § 3, п. 5]. Поэтому пучок $\lambda A + B$ операторов A, B в вещественных пространствах H_1, H_2 и соответствующее ему уравнение (1.1) будем называть параболическими, как и в случае комплексных пространств [21].

Свойства параболического пучка операторов в случае комплексных пространств устанавливаются и обосновываются с помощью обобщенных эргодических теорем Хилле для псевдорезольвент [16, гл. VIII, разд. 4]. Эти свойства можно найти в [21; 22], подробное изложение содержится в [23, п. 4.3.2]. Основным моментом рассуждений является построение двух пар взаимно дополнительных проекторов $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ на линеале $\widetilde{D}$ и $\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2$ в пространстве $\widetilde{H}_2$ как слабых пределов псевдорезольвент:

$$\widetilde{P}_1 x = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \mathrm{Re}\lambda \geq C_1}} (\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}\widetilde{A}x, \quad x \in \widetilde{D}; \quad \widetilde{Q}_1 y = \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \mathrm{Re}\lambda \geq C_1}} \widetilde{A}(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}y, \quad y \in \widetilde{H}_2,$$

$$\widetilde{P}_2 = E_{\widetilde{H}_1} - \widetilde{P}_1, \quad \widetilde{Q}_2 = E_{\widetilde{H}_2} - \widetilde{Q}_1.$$

Свойства параболического пучка операторов $\lambda A + B$ в случае вещественных пространств H_1, H_2 устанавливаются путем перехода к сужениям P_1, P_2, Q_1, Q_2 операторов $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2$ на вещественные пространства, причем

$$P_1 x = \lim_{s\to+\infty} (sA + B)^{-1}Ax, \quad x \in D; \quad Q_1 y = \lim_{s\to+\infty} A(sA + B)^{-1}y, \quad y \in H_2. \tag{1.6}$$

Заметим, что $\widetilde{Q}_j \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_2)$, $Q_j \in \mathcal{L}(H_2)$, $\quad j = 1,2$. С помощью соответствующих прямых разложений в комплексных пространствах нетрудно проверить, что имеют место прямые разложения линеала $D = D_A \cap D_B \neq \{0\}$ в прямую сумму линеалов $D_1 = P_1 D$, $D_2 = P_2 D$ и пространства H_2 в прямую сумму замкнутых подпространств $H_2^1 = Q_1 H_2$, $H_2^2 = Q_2 H_2$:

$$\begin{gathered} D = D_A \cap D_B = D_1 \dot{+} D_2, \quad H_2 = H_2^1 \dot{+} H_2^2 \\ D_2 = \mathrm{Ker} A \cap D, \quad H_2^2 = BD_2,\ H_2^1 = \overline{AD}, \quad D_1 = (sA+B)^{-1} H_2^1 \end{gathered} \tag{1.7}$$

— такие, что операторы A, B отображают D_j в H_2^j $(j=1,2)$, оператор A не вырождается на D_1, оператор B не вырождается на D_2. Черта означает замыкание.

Оператор

$$G = AP_1 + BP_2 = A + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B = A + Q_2 B : D \to H_2, \quad D_G = D, \tag{1.8}$$

обладает свойствами, аналогичными свойствам своего комплексного расширения

$$\widetilde{G} = \widetilde{A} + \widetilde{B}\widetilde{P}_2 = \widetilde{A} + \widetilde{Q}_2 \widetilde{B} : \widetilde{D} \to \widetilde{H}_2, \quad D_{\widetilde{G}} = \widetilde{D}.$$

Оператор G отображает D_j в H_2^j $(j=1,2)$ и имеет обратный оператор G^{-1}, определенный на $AD \dot{+} H_2^2$, причем $G^{-1} Q_2 \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ и справедливы равенства

$$\begin{gathered} BG^{-1}Q_2 = Q_2, \quad Q_2 B G^{-1} h = Q_2 h, \quad AG^{-1} h = Q_1 h, \\ G^{-1} A d = P_1 d, \quad G^{-1} B P_2 d = P_2 d, \quad h \in AD \dot{+} H_2^2, \quad d \in D. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Оператор

$$\widetilde{W} = -\widetilde{Q}_1 \widetilde{B} \widetilde{G}^{-1}, \quad D_{\widetilde{W}} = \widetilde{A}\widetilde{D} \dot{+} \widetilde{H}_2^2, \quad \widetilde{H}_2^2 = \widetilde{Q}_2 \widetilde{H}_2,$$

является комплексным расширением оператора

$$W = -Q_1 B G^{-1}, \quad D_W = AD \dot{+} H_2^2. \tag{1.10}$$

Для параболического пучка операторов $\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B}$ оценка типа (1.4) выполнена в более широкой области Σ [21; 23]:

$$\|\widetilde{A}(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}\| \le \frac{C_2'}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\lambda \ge C_1 - \beta \frac{1 + |\mathrm{Im}\lambda|}{C_2} \Big\}, \tag{1.11}$$

где $0 < \beta < 1$, $C_2' > 0$. Пусть $\widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_{|_{\widetilde{H}_2^1}}$ — сужение оператора $\widetilde{W}$ на подпространство $\widetilde{H}_2^1 = \widetilde{Q}_1 \widetilde{H}_2$. В области Σ существует резольвента $R_{\widetilde{W}_1}(\lambda) = (\widetilde{W}_1 - \lambda E)^{-1}$ оператора $\widetilde{W}_1$:

$$R_{\widetilde{W}_1}(\lambda) y = -\widetilde{A}(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} y, \quad y \in \widetilde{H}_2^1, \quad \lambda \in \Sigma.$$

Поэтому в силу (1.11) справедливо неравенство

$$\|R_{\widetilde{W}_1}(\lambda)\| \le \frac{C_2'}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma, \tag{1.12}$$

откуда следует, что $\widetilde{W}_1$ является секториальным оператором согласно [24, определение 1.3.1] и производящим оператором аналитической полугруппы $\widetilde{S}_1(t)$ в $\widetilde{H}_2^1$ [20, гл. 1, § 3, п. 5]. В [25, гл. 5, § 4] полугруппу $\widetilde{S}_1(t)$ с производящим оператором $\widetilde{W}_1$, резольвента которого удовлетворяет ограничению (1.12), называют параболической; для полугруппы $\widetilde{S}_1(t)$ справедливо представление

$$\widetilde{S}_1(t) y = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} R_{\widetilde{W}_1}(\lambda) y \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} \widetilde{A}(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} y \, d\lambda, \quad y \in \widetilde{H}_2^1, \quad t > 0, \tag{1.13}$$

где Γ — контур, состоящий из двух лучей $\mathrm{Re}\lambda = C_1 + \varepsilon - \beta \dfrac{1 + |\mathrm{Im}\lambda|}{C_2}$, $\varepsilon > 0$; контур Γ ориентирован так, что область $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ при обходе контура остается слева.

Оператор $\widetilde{S}_1(t)$ является вещественным при всех $t \geq 0$, т. е. элементы из H_2^1 (вещественные элементы) переводит в H_2^1. Действительно, пусть J_1, J_2 — инволюции в пространствах $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2$ соответственно, т. е. $J_1 h_1 = \bar{h}_1$, $J_2 h_2 = \bar{h}_2$, где $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ — комплексные сопряженные для элементов $h_1 \in \widetilde{H}_1, h_2 \in \widetilde{H}_2$. Определение и свойства оператора инволюции можно найти в [26, гл. XIII, § 2]. Справедливы соотношения

$$J_2 \widetilde{A}(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} = \widetilde{A} J_1 (\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} = \widetilde{A}(\bar{\lambda} \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} J_2.$$

С помощью этих соотношений и представления (1.13) получаем

$$J_2 \widetilde{S}_1(t) y = \widetilde{S}_1(t) J_2 y, \quad y \in \widetilde{H}_2^1, \quad t \geq 0.$$

Отсюда следует, что оператор $\widetilde{S}_1(t)$ является вещественным при всех $t \geq 0$.

При каждом $t \geq 0$ рассмотрим сужение $S_1(t)$ оператора $\widetilde{S}_1(t)$ на вещественное подпространство H_2^1. Семейство операторов $S_1(t)$ образует полугруппу класса C_0 в $\mathcal{L}(H_2^1)$ с производящим оператором $W_1 = W_{|_{H_2^1}}$. Семейство операторов

$$S(t) = S_1(t) Q_1 + Q_2$$

есть полугруппа класса C_0 в $\mathcal{L}(H_2)$ с производящим оператором W (1.10).

Теорема 1. *Пусть в полуплоскости* $\mathrm{Re}\lambda \geq C_1$ *пучок операторов* $\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B} : \widetilde{D} = D_{\widetilde{A}} \cap D_{\widetilde{B}} \to \widetilde{H}_2$ *имеет резольвенту* $(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_2, \widetilde{H}_1)$ *и псевдорезольвента* $\widetilde{A}(\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_2)$ *удовлетворяет оценке* (1.4), *оператор* G^{-1} *ограничен на своей области определения,* $\mathrm{ImQ_1K_1} \subset \mathrm{AD}$, $\mathrm{ImQ_1K_2} \subset \mathrm{AD}$, $q \in AD$, $u(t) \in L_2(0,T;U)$, $v(t) \in L_2(0,T;V)$. *Тогда существует единственное решение* $y(t)$ *задачи* (1.1), (1.3) *и это решение допускает представление*

$$y(t) = G^{-1}\left[S(t)q + \int\limits_0^t S(t-\tau) Q_1 [K_1 u(\tau) - K_2 v(\tau)] d\tau + Q_2 [K_1 u(t) - K_2 v(t)]\right] \textit{п.в. } t \in [0,T]. \quad (1.14)$$

З а м е ч а н и е 1. Примеры операторов K_1, K_2, удовлетворяющих условиям теоремы 1, а также условиям теоремы 2 и следствию из нее приведены в разделе 3 статьи в приложениях.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Согласно разложениям (1.7) уравнение (1.1) распадается

$$z'(t) = W z(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.15)$$

$$z(t) = A y(t), \quad f(t) = Q_1 [K_1 u(t) - K_2 v(t)],$$

$$Q_2 B y(t) = Q_2 [K_1 u(t) - K_2 v(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.16)$$

Из соотношения (1.16) заключаем, если функция $y(t) = P_1 y(t) + P_2 y(t)$ является решением задачи (1.1), (1.3) то $P_2 y(t) = G^{-1} Q_2 [K_1 u(t) - K_2 v(t)]$.

Уравнение (1.15) рассматриваем в пространстве H_2. Здесь W — производящий оператор полугруппы $S(t)$ класса C_0, $f(t) \in D_W$, $W K_1 = W Q_1 K_1 \in \mathcal{L}(U, H_2)$, $W K_2 = W Q_1 K_2 \in \mathcal{L}(V, H_2)$, $W f(t) \in L_2(0,T;H_2)$. Отсюда следует, что для этого уравнения выполнены условия теоремы 2.9 из [17, гл. 4]. Поэтому существует единственное сильное решение $z(t)$ уравнения (1.15), удовлетворяющее начальному условию $z(0) = q$. Сильное решение почти всюду имеет производную, интегрируемую в смысле Бохнера, почти всюду удовлетворяет уравнению и определяется по формуле

$$z(t) = S(t) q + \int\limits_0^t S(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Нетрудно видеть, что $z(t)$ принимает значения в AD и $z(t), z'(t) \in L_2(0,T;H_2)$. Учитывая четвертое равенство в (1.9), однозначно находим

$$P_1 y(t) = G^{-1} z(t) = G^{-1}\left[S(t)q + \int\limits_0^t S(t-\tau)Q_1[K_1 u(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau\right].$$

На этом доказательство теоремы завершается.

З а м е ч а н и е 2. Если $u(t) \in U_0$, $v(t) \in V_0$, то вместо условий $\mathrm{ImQ_1K_1} \subset \mathrm{AD}$, $\mathrm{ImQ_1K_2} \subset \mathrm{AD}$ достаточно потребовать, чтобы $Q_1K_1U_0 \subset AD$, $Q_1K_2V_0 \subset AD$.

2. Метод разрешающих функционалов в игровой задаче для параболической системы

Вернемся к изучению дифференциальной игры в системе (1.1), (1.3). Будем предполагать справедливость условий теоремы 1 с учетом замечания 2 относительно ограничений на операторы K_1, K_2. Пусть терминальное множество M, на которое должен быть переведен динамический вектор $Ay(t)$ системы (1.1), (1.3), имеет цилиндрический вид

$$M = M_0 + M_1, \tag{2.1}$$

где M_0 — замкнутое линейное подпространство в H_2^1, M_1 — выпуклое замкнутое ограниченное множество из ортогонального дополнения $M_0^{\perp}$ к M_0 в H_2^1. Из вида (1.14) решения $y(t)$ системы (1.1), (1.3) получаем представление для динамического вектора

$$Ay(t) = S(t)q + \int\limits_0^t S(t-\tau)Q_1[K_1 u(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau. \tag{2.2}$$

К исследованию дифференциальной игры в системе (1.1), (1.3) с цилиндрическим терминальным множеством M (2.1) применим метод разрешающих функционалов в гильбертовом пространстве [12; 13] и теорию многозначных отображений [27]. Обозначим через Π ортопроектор в H_2^1 на $M_0^{\perp}$, $\Pi \in \mathcal{L}(H_2^1)$. Рассмотрим многозначное отображение

$$\Omega(t,\tau,v) = \Pi S(t-\tau)Q_1[K_1U_0 - K_2 v], \quad \Omega \,:\, \Delta \times V_0 \rightsquigarrow H_2^1, \quad \Delta = \{(t,\tau)\colon 0 \le \tau \le t < \infty\}.$$

Очевидно, что это отображение имеет выпуклые ограниченные образы в H_2^1. Выпуклое замкнутое ограниченное множество U_0 в гильбертовом пространстве U является слабо компактным [19, разд. 2.9, 2.10]. Используя конкретный вид многозначного отображения $\Omega(t,\tau,v)$, устанавливаем замкнутость его образов в H_2^1.

Всюду в дальнейшем будем предполагать выполнение следующего условия.

У с л о в и е П о н т р я г и н а. Многозначное отображение

$$\Omega_0(t,\tau) = \bigcap_{v\in V_0} \Omega(t,\tau,v) = \Pi S(t-\tau)Q_1K_1U_0 \overset{*}{-} \Pi S(t-\tau)Q_1K_2V_0, \quad \Omega_0 : \Delta \rightsquigarrow H_2^1,$$

принимает непустые значения на множестве Δ. Здесь $\overset{*}{-}$ обозначает геометрическую разность множеств.

Придерживаемся схемы метода разрешающих функционалов из [12; 13]. Пусть $\gamma(t,\tau)$ — измеримый по $\tau \in [0,t]$ $(t \ge 0)$ селектор многозначного отображения $\Omega_0(t,\tau)$, существование которого следует из теоремы 8.2.2 о выпуклой оболочке и теоремы 8.1.3 измеримого выбора (см. [27]), и пусть

$$\xi(t) = \xi(t; q, \gamma) = \Pi S(t)q + \int\limits_0^t \gamma(t, s)ds.$$

Многозначное отображение

$$\Lambda(t, \tau, v) = \big\{\widetilde{\alpha} \geq 0 \ : \ [\Omega(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \widetilde{\alpha}[M_1 - \xi(t)] \neq \varnothing\big\}, \quad \Lambda \ : \ \Delta \times V_0 \rightsquigarrow \mathbb{R}^1, \tag{2.3}$$

имеет непустые и замкнутые образы. Если $\xi(t) \in M_1$, то $\Lambda(t, \tau, v) = [0, \infty)$. Если $\xi(t) \notin M_1$, то образы $\Lambda(t, \tau, v)$ ограничены и с использованием теоремы 8.2.8 об образе и теоремы 8.2.9 о прообразе (см. [27]) устанавливаем измеримость многозначного отображения $\Lambda(t, \tau, v)$ по $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$. Опорная функция многозначного отображения $\Lambda(t, \tau, v)$ (2.3) называется *разрешающим функционалом*

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup\big\{\widetilde{\alpha} \geq 0 \ : \ \widetilde{\alpha} \in \Lambda(t, \tau, v), \ (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0\big\}. \tag{2.4}$$

Если $\xi(t) \in M_1$, то $\alpha(t, \tau, v) = \infty$. Если $\xi(t) \notin M_1$, то разрешающий функционал ограничен; в силу компактности множества $\Lambda(t, \tau, v)$ (2.3) точная верхняя грань в (2.4) достигается; в силу теоремы об опорной функции (см. [27, теорема 8.2.14]) разрешающий функционал является измеримым по $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$.

Пусть V_* — множество измеримых вектор-функций $v(\tau) : [0, T] \to V_0 \subset V$. Если $v(\cdot) \in V_*$ и $\xi(t) \notin M_1$, то измеримыми являются многозначное отображение $\Lambda_{t,v}(\tau) = \Lambda(t, \tau, v(\tau)) : [0, t] \rightsquigarrow \mathbb{R}^1$ и его опорная функция $\alpha_{t,v}(\tau) = \alpha(t, \tau, v(\tau)) : [0, t] \to \mathbb{R}^1$. Введем множество

$$\Upsilon = \Upsilon(q, \gamma) = \big\{t \in [0, T] \ : \ \xi(t) \in M_1\big\} \cup \Big\{t \in [0, T] \ : \ \xi(t) \notin M_1 \wedge \inf_{v(\cdot) \in V_*} \int\limits_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau))d\tau \geq 1\Big\}. \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (1.1), (1.3) *с терминальным множеством* M (2.1) *справедливо ограничение* (1.4), *оператор* G^{-1} *ограничен на своей области определения, выполнено условие Понтрягина, начальный вектор* q *в* (1.3) *и операторы* K_1, K_2 *в* (1.1) *удовлетворяют соотношениям* $q \in AD$, $Q_1K_1U_0 \subset AD$, $Q_1K_2V_0 \subset AD$ *и для некоторого измеримого по* $\tau \in [0, t]$ $(t \geq 0)$ *селектора* $\gamma(t, \tau) \in \Omega_0(t, \tau)$ *множество* Υ (2.5) *не является пустым. Тогда динамический вектор* $Ay(t)$ *системы* (1.1), (1.3) *может быть приведен на терминальное множество* M (2.1) *в момент* $T_0 \in \Upsilon$.

Доказательство теоремы 2 осуществляется по схеме доказательства соответствующих теорем из [12; 13]. Пусть $T_0 \in \Upsilon$. Рассмотрим многозначное отображение

$$\begin{gathered} U_1(\tau, v) = \big\{u \in U_0 \ : \ \Pi S(T_0 - \tau)Q_1[K_1u - K_2v] - \gamma(T_0, \tau) = 0\big\}, \\ U_1(\tau, v)\colon [0, T_0] \times V_0 \rightsquigarrow H_2^1, \end{gathered} \tag{2.6}$$

а если $\xi(T_0) \notin M_1$, то также рассмотрим многозначное отображение

$$\begin{gathered} U_2(\tau, v) = \Big\{u \in U_0 \ : \ \Pi S(T_0 - \tau)Q_1[K_1u - K_2v] - \gamma(T_0, \tau) \in \alpha(T_0, \tau, v)[M_1 - \xi(T_0)]\Big\}, \\ U_2(\tau, v)\colon [0, T_0] \times V_0 \rightsquigarrow H_2^1. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Пусть $v(\tau)$ — произвольная измеримая функция из $[0, T_0]$ в V_0. В силу теоремы о прообразе (см. [27, теорема 8.2.9]) многозначные отображения $U_1(\tau, v)$ (2.6), $U_2(\tau, v)$ (2.7), $U_1(\tau, v(\tau)) : \tau \in [0, t] \rightsquigarrow H_2^1$, $U_2(\tau, v(\tau)) : \tau \in [0, t] \rightsquigarrow H_2^1$ измеримы. В силу теоремы измеримого выбора (см. [27, теорема 8.1.3]) эти многозначные отображения имеют измеримые селекторы $u_1(\tau, v)$, $u_2(\tau, v)$,

$u_{1,v}(\tau)$, $u_{2,v}(\tau)$ соответственно. Заметим, если многозначное отображение $U_j(\tau, v)$ $(j = 1, 2)$ имеет суперпозиционно измеримый селектор $u_j(\tau, v)$ (см. определение в [28, п. 17.8]), функция $u_{j,v}(\tau) = u_j(\tau, v(\tau))$ является измеримым селектором многозначного отображения $U_j(\tau, v(\tau))$. Например, суперпозиционная измеримость имеет место, если $u_j(\tau, v)$ является отображением Каратеодори, т. е. непрерывным по v.

В случае $\xi(T_0) \in M_1$ управление преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0, T_0]$ положим равным измеримому селектору $u_{1,v}(\tau)$ многозначного отображения $U_1(\tau, v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя динамический вектор $Ay(t)$ системы (1.1), (1.3) будет приведен на терминальное множество M (2.1) в момент T_0 при любых допустимых управлениях убегающего, так как $\Pi Ay(T_0) = \xi(T_0) \in M_1$.

Теперь рассмотрим случай $\xi(T_0) \notin M_1$. Как и в [12; 13], существует момент времени $t_* \in (0, T_0]$ такой, что

$$\int\limits_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau))d\tau = 1. \tag{2.8}$$

Управление преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0, t_*)$ положим равным измеримому селектору $u_{2,v}(\tau)$ многозначного отображения $U_2(\tau, v(\tau))$, а на промежутке $[t_*, T_0]$ — равным измеримому селектору $u_{1,v}(\tau)$ многозначного отображения $U_1(\tau, v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя динамический вектор $Ay(t)$ системы (1.1), (1.3) будет приведен на терминальное множество M (2.1) в момент T_0 при любых допустимых управлениях убегающего. Действительно, с использованием (2.2), (2.6)–(2.8) получаем

$$\Pi Ay(T_0) = \xi(T_0) + \int\limits_0^{t_*} \big\{\Pi S(T_0 - \tau)Q_1[K_1 u_{2,v}(\tau) - K_2 v(\tau)] - \gamma(T_0, \tau)\big\}d\tau,$$

$$\Pi Ay(T_0) \in \xi(T_0) + \int\limits_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau))[M_1 - \xi(T_0)]d\tau = \int\limits_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau))M_1 d\tau.$$

Здесь интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Ауманна [27, разд. 8.6], т. е. как множество интегралов от интегрируемых селекторов отображения. В силу теоремы I.6.13 [29], где в качестве вероятностной меры на отрезке $[0, t_*]$ используется мера Лебега — Стилтьеса, порожденная абсолютно непрерывной, монотонно неубывающей и неотрицательной функцией $F(\tau) = \int_0^\tau \alpha(T_0, s, v(s))ds$, имеем $\Pi Ay(T_0) \in M_1$. Следовательно, $Ay(T_0) \in M$.

Теорема доказана.

Покажем, как выглядят условия теоремы 2 в случае динамической системы, описываемой явным параболическим уравнением (1.2) с начальным условием

$$y(0) = q. \tag{2.9}$$

Здесь $H_1 = H_2 = H_2^1 = H$, операторы P_1, Q_1, G — единичные, операторы P_2, Q_2 — нулевые; оператор B имеет плотную область определения D_B, $\overline{D}_B = H$; оператор $-B$ является генератором полугруппы класса C_0; оператор $\widetilde{B}$ является секториальным. В формуле (2.1), определяющей терминальное множество M, M_0 — замкнутое линейное подпространство в H, M_1 — выпуклое замкнутое ограниченное множество из ортогонального дополнения $M_0^\perp$ к M_0 в H; Π — ортопроектор в H на $M_0^\perp$. Решение задачи Коши (1.2), (2.9) понимаем в сильном смысле, т. е. как удовлетворяющее уравнению почти всюду. Если $q \in D_B$, $\mathrm{Im} K_j \subset D_B$, $j = 1, 2$, $u(t) \in L_2(0, T; U)$, $v(t) \in L_2(0, T; V)$, то единственное решение задачи Коши (1.2), (2.9) допускает представление

$$y(t) = S(t)q + \int\limits_0^t S(t - \tau)[K_1 u(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau.$$

Сформулируем следствие из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (1.2), (2.9) *с терминальным множеством* M (2.1) *оператор* $-\widetilde{B}$ *является секториальным, выполнено условие Понтрягина, начальный вектор* q *в* (2.9) *и операторы* K_1, K_2 *в* (1.2) *удовлетворяют соотношениям* $q \in D_B$, $K_1 U_0 \subset D_B$, $K_2 V_0 \subset D_B$ *и для некоторого измеримого по* $\tau \in [0,t]$ $(t \geq 0)$ *селектора* $\gamma(t,\tau) \in \Omega_0(t,\tau)$ *множество* Υ (2.5) *имеет непустое пересечение с отрезком* $[0,T]$. *Тогда траектория системы* (1.2), (2.9) *может быть приведена на терминальное множество* M (2.1) *в момент* $T_0 \in \Upsilon \cap [0,T]$.

Заметим, что оператор $-\widetilde{B}$ является секториальным тогда и только тогда, когда справедливо ограничение (1.5) на его резольвенту.

3. Приложения к уравнениям в частных производных

Ряд фактов теории уравнений в частных производных можно получить, исходя из общих положений теории дифференциально-операторных уравнений в абстрактных банаховых или гильбертовых пространствах. Рассмотрим приложения полученных выше абстрактных результатов теории дифференциальных игр в гильбертовых пространствах к конфликтно-управляемым процессам, описываемым уравнениями в частных производных.

3.1. Конфликтно-управляемый процесс теплопроводности

Распространение тепла в стационарной однородной среде с управляемыми распределенными тепловыми источниками и утечками в простейшем случае описывается одномерным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t,x) = \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} y(t,x) + K(u(t,x) - v(t,x)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3.1}$$

Для иллюстрации метода рассматриваем это уравнение на отрезке $0 \leq x \leq \pi$ с краевыми условиями Дирихле

$$y(t,0) = y(t,\pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2}$$

и начальным условием

$$y(0,x) = q(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{3.3}$$

где $q(x) \in L_2(0,\pi)$; $K \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$; $u(t,x)$ и $v(t,x)$ — управляющие воздействия преследователя и убегающего, $u(t,x), v(t,x) \in L_2([0,T] \times [0,\pi]) = L_2(0,T; L_2(0,\pi))$. Допустимые управления преследователя (источника) и убегающего (утечки) удовлетворяют ограничениям $u(t,\cdot) \in U_0$, $v(t,\cdot) \in V_0$, где U_0, V_0 — выпуклые замкнутые ограниченные множества в пространстве $L_2(0,\pi)$. В дальнейшем в качестве U_0, V_0 будем рассматривать замкнутые шары в $L_2(0,\pi)$ с центром в нуле и радиусом ϱ_1, ϱ_2 соответственно. *Цель игры в системе* (3.1)–(3.3) состоит в приведении состояния $y(t,x)$ в ноль за конечное время, не превосходящее T, в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

Первыми работами по позиционным игровым задачам для линейных параболических систем, в частности для системы (3.1)–(3.3), являются фундаментальные работы Ю. С. Осипова [10; 11]. В этих работах правило экстремального прицеливания Н. Н. Красовского распространяется на распределенные системы для получения достаточных условий окончания игры. Базовым аппаратом в этой методике является аппарат опорных функций. Здесь для исследования игровой задачи в параболической системе мы применяем метод разрешающих функций [14; 15], в основе которого лежат обратные функционалы Минковского. Идейно этот метод примыкает к первому прямому методу Л. С. Понтрягина, управление преследователя строится на основе теорем измеримого выбора и не является позиционным, т. е. не создает проблем, связанных с последующим решением нелинейных уравнений динамики.

В вещественном пространстве $H = U = V = L_2(0, \pi)$ задача (3.1)–(3.3) записывается в абстрактной форме (1.2), (2.9) с оператором

$$Bw = -\frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad D_B = \{w(x) \in W_2^2(0, \pi),\ w(0) = w(\pi) = 0\}, \tag{3.4}$$

и операторами $K_1 = K_2 = K$. Через $W_2^m(0, \pi)$ обозначаем пространство Соболева функций, которые принадлежат $L_2(0, \pi)$ вместе со своими обобщенными производными до порядка m включительно. Придерживаясь подхода, принятого в [18] при исследовании распределенных управляемых систем, *решение* $y(t, x)$ *смешанной задачи* (3.1)–(3.3) будем понимать в смысле решения абстрактной задачи (1.2), (2.9), т. е. $y(t, x) \in D_B$ при почти всех $t \in [0, T]$, $y(t, \cdot) \in W_2^1(0, T; L_2(0, \pi))$ и соотношения (3.1)–(3.3) удовлетворяются при почти всех $t \in [0, T]$, $x \in [0, \pi]$. Как уже упоминалось во введении и в разд. 1, здесь мы решаем игровую задачу в более узком классе сильных решений системы (3.1)–(3.3), в отличие от движений (слабых решений) из работ Ю. С. Осипова [10;11]. Терминальное множество (2.1) есть $M = \{0\}$, $M_0^\perp = H$, $M_0 = \{0\}$, $M_1 = \{0\}$, $\Pi = E$.

Проверим выполнение условий следствия 1 для дифференциальной игры в системе (3.1)–(3.3). Пространство $\widetilde{H} = \widetilde{U} = \widetilde{V}$ есть комплексное пространство $L_2(0, \pi)$. Оператор $\widetilde{B}$ определяется тем же самым дифференциальным выражением, что и оператор B (3.4), с краевыми условиями Дирихле. Оператор $-\widetilde{B}$ является секториальным; его спектр состоит из простых собственных чисел $\lambda_k = -k^2$ с предельной точкой $-\infty$; для комплексных чисел $\lambda \neq \lambda_k$ существует резольвента

$$R_{-\widetilde{B}}(\lambda)w = (-\widetilde{B} - \lambda E)^{-1}w = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k \sin kx}{\lambda + k^2}.$$

Через w_k мы обозначаем коэффициенты Фурье в разложении функции $w(x) \in L_2(0, \pi)$:

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin kx, \quad w_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} w(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Находим полугруппу с генератором $-B$:

$$S(t)w = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} w_k \sin kx.$$

Для простоты изложения рассматриваем случай самосопряженного оператора K. Справедливо ортогональное разложение: $H = \mathrm{Ker}K \oplus \overline{\mathrm{Im}K}$. Пусть Π_0 — оператор ортогонального проектирования в H на подпространство $H_0 = \overline{\mathrm{Im}K}$. Для оператора K введем блок $K_0 = \Pi_0 K \Pi_0 \in \mathcal{L}(H_0)$. Существуют обратный оператор K_0^{-1} с областью определения $D_{K_0^{-1}} = \mathrm{Im}K$. Предположим, что $\mathrm{Im}K \subset D_B$. Например, в качестве оператора K можно взять оператор B^{-1}, оператор S_T, ортопроектор Π_k на линейную оболочку $\sin kx$ и т. д. Если $\varrho_1 \geq \varrho_2$, то справедливо условие Понтрягина и $0 \in \Omega_0(t, \tau)$. Селектор $\gamma(t, \tau) \in \Omega_0(t, \tau)$ выберем тождественно равным нулю. Пусть в начальном условии (3.3) $q(x) \in D_B$ (3.4). Исключим тривиальный случай и предположим, что функция $q(x)$ отлична от нуля на некотором множестве из $[0, \pi]$ положительной меры. Находим $\xi(t) = S(t)q$. Относительно начальной функции $q(x)$ также предположим, что $S(\tau)q \in \mathrm{Im}K$ для всех $\tau \in [0, T]$.

Уточним вид многозначного отображения (2.3):

$$\Lambda(t, \tau, v) = \{\widetilde{\alpha} \geq 0 \ : \ \widetilde{\alpha} K_0^{-1} S(\tau) q \in \Pi_0(U_0 + v)\}.$$

Вектор-функция $K_0^{-1}S(\tau)q$ от аргумента $\tau \in [0,T]$ со значениями в $L_2(0,\pi)$ измерима. Пусть $\varrho_1 > \varrho_2$. Разрешающий функционал (2.4) имеет следующий вид:

$$\alpha(t,\tau,v) = \frac{\langle K_0^{-1}S(\tau)q, \Pi_0 v\rangle + \sqrt{\langle K_0^{-1}S(\tau)q, \Pi_0 v\rangle^2 + \|K_0^{-1}S(\tau)q\|^2(\varrho_1^2 - \|\Pi_0 v\|^2)}}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|^2}. \tag{3.5}$$

Здесь и ниже норму $\|\cdot\|$ и скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ рассматриваем в пространстве $L_2(0,\pi)$.

Множество V_* — это множество функций $v(\tau,x) \in L_2([0,T]\times[0,\pi])$ таких, что $\|v(\tau,\cdot)\| \le \varrho_2$. Множество $\Upsilon(q,0)$ (2.5) есть

$$\Upsilon = \Upsilon(q,0) = \left\{ t \in [0,T] \ : \ \inf_{v\in V_*} \int_0^t \alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau \ge 1 \right\}.$$

Точная нижняя грань достигается при $v(\tau,x) = v_*(\tau,x)$:

$$v_*(\tau,x) = -\varrho_2 \frac{K_0^{-1}S(\tau)q}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|}, \quad \alpha(t,\tau,v_*(\tau)) = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|} \le \frac{\|K\|}{\|S(\tau)q\|} \le \frac{\|K\|}{\|S(T)q\|}.$$

Имеем представление для множества Υ:

$$\Upsilon = \Upsilon(q,0) = \left\{ t \in [0,T] \ : \ \int_0^t \frac{d\tau}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|} \ge \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} \right\}. \tag{3.6}$$

Понятно, что найдутся функции $q(x)$, удовлетворяющие указанным ранее ограничениям, для которых множество $\Upsilon(q,0)$ не является пустым. В дальнейшем будем предполагать, что для начальной функции в (3.3) выполнено это ограничение. Множество Υ (3.6) есть $\Upsilon = [T_0, T]$, где число T_0 определяется из равенства

$$\int_0^{T_0} \frac{d\tau}{\|K_0^{-1}S(\tau)q\|} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}. \tag{3.7}$$

Таким образом, для игровой задачи в системе (3.1)–(3.3) выполнены условия следствия 1. Наименьшее время T_0 приведения траектории системы в ноль определяется из соотношения (3.7). Многозначные отображения (2.6), (2.7) представляют собой следующие выражения:

$$U_1(\tau,v) = \{u(x) \in U_0 \ : \ Ku = Kv\},$$

$$U_2(\tau,v) = \{u(x) \in U_0 \ : \ Ku = Kv - \alpha(T_0,\tau,v)S(\tau)q\}, \quad (\tau,v) \in [0,T_0] \times V_0.$$

Имеем суперпозиционно измеримые селекторы этих отображений

$$u_1(\tau,v) = \Pi_0 v \in U_1(\tau,v), \quad u_2(\tau,v) = \Pi_0 v - \alpha(T_0,\tau,v)K_0^{-1}S(\tau)q \in U_2(\tau,v), \quad (\tau,v) \in [0,T_0] \times V_0.$$

Для любого допустимого управления $v(\tau,x)$ строим управление

$$u(\tau,x) = \begin{cases} \Pi_0 v(\tau,x) - \alpha(T_0,\tau,v(\tau))K_0^{-1}S(\tau)q(x), \ (\tau,x) \in [0,t_*) \times [0,\pi], \\ \Pi_0 v(\tau,x), \ (\tau,x) \in [t_*,T_0] \times [0,\pi], \end{cases} \tag{3.8}$$

где t_* есть момент переключения с управления $u(\tau,x) = u_2(\tau,v(\tau))$ на управление $u(\tau,x) = u_1(\tau,v(\tau))$, который определяется с помощью соотношения (2.8).

Таким образом, мы получили следующий результат.

Утверждение 1. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (3.1)–(3.3) *выполняются следующие предположения: начальная функция* $q(x) \in W_2^2(0,\pi)$ *отлична от нуля на некотором множестве из* $[0,\pi]$ *положительной меры,* $q(0) = q(\pi) = 0$*; оператор* K *является самосопряженным,* $\mathrm{Im}K \subset D_B$*,* $S(\tau)q \in \mathrm{Im}K$ *для всех* $\tau \in [0,T]$*; области управления* U_0 *и* V_0 *суть замкнутые шары в* $L_2(0,\pi)$ *с центром в нуле и радиусов* ϱ_1 *и* ϱ_2*,* $\varrho_1 > \varrho_2$*; множество* $\Upsilon(q,0)$ (3.6) *не пусто. Тогда траектория системы* (3.1)–(3.3) *может быть приведена в ноль за наименьшее время* T_0*, где* T_0 *определено в* (3.7)*, при любом допустимом управлении* $v(t,x) \in V_0$ *и допустимом управлении* $u(t,x) \in U_0$ *вида* (3.8)*, где момент* t_* *переключения управления удовлетворяет соотношению* (2.8) *с разрешающим функционалом* $\alpha(t,\tau,v)$ (3.5)*.*

3.2. Дифференциальная игра в системе не типа Ковалевской

Покажем, как полученные абстрактные результаты применяются к управлению системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных, не принадлежащими типу Ковалевской. Исследуем конфликтно-управляемую систему, описываемую дифференциальным уравнением в частных производных

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + y(t,x)\Big] + \frac{\partial^4 y(t,x)}{\partial x^4} = K(u(t,x) - v(t,x)), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{3.9}$$

с краевыми условиями

$$y(t,0) = y(t,\pi) = \frac{\partial^2 y(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(t,\pi)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.10}$$

и начальным условием

$$-\Big(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y\Big)(0,x) = q(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{3.11}$$

где $q(x) \in L_2(0,\pi)$, $u(t,x), v(t,x) \in L_2([0,T] \times [0,\pi])$, $K \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$. Как отмечалось в [22], интерес к подобным уравнениям, а также уравнениям более общего вида, у которых порядок дифференциального оператора по пространственным переменным при дифференцировании по времени в два раза ниже порядка дифференциального оператора по пространственным переменным в слагаемом без дифференцирования по времени, вызван прикладными задачами. Например, при описании модели волн изгиба в стержне [30, гл. 2, § 8, п. 8.1] таким является уравнение для смещения. Как в первом приложении, рассмотренном выше, допустимые управления преследователя $u(t,x)$ и убегающего $v(t,x)$ удовлетворяют ограничениям $u(t,\cdot) \in U_0$, $v(t,\cdot) \in V_0$, где U_0, V_0 — замкнутые шары в $L_2(0,\pi)$ с центром в нуле и радиусом ϱ_1, ϱ_2 соответственно. *Цель игры в системе* (3.9)–(3.11) состоит в приведении динамического вектора $-\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} - y(t,x)$ в ноль за конечное время, не превосходящее T, в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

В вещественном пространстве $H_1 = H_2 = U = V = L_2(0,\pi)$ задача (3.9)–(3.11) записывается в абстрактной форме (1.1), (1.3) с дифференциальными операторами

$$\begin{gathered} Aw = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - w(x), \quad Bw = \frac{d^4 w(x)}{dx^4}, \\ D_A = \big\{w(x) \in W_2^2(0,\pi),\ w(0) = w(\pi) = 0\big\}, \\ D_B = \big\{w(x) \in W_2^4(0,\pi),\ w(0) = w(\pi) = w''(0) = w''(\pi) = 0\big\}, \end{gathered} \tag{3.12}$$

и операторами $K_1 = K_2 = K$. Оператор A является вырожденным: $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Lin}\{\sin x\}$. *Решение смешанной задачи* (3.9)–(3.11) есть функция $y(t,x) \in D_B$ при почти всех $t \in [0,T]$ такая, что $y(t,\cdot) \in W_2^1(0,T; L_2(0,\pi))$ и соотношения (3.9)–(3.11) удовлетворяются при почти всех $t \in [0,T]$, $x \in [0,\pi]$.

Комплексная оболочка $\widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_2 = \widetilde{U} = \widetilde{V}$ пространства $H_1 = H_2 = U = V$ есть комплексное пространство $L_2(0,\pi)$. Комплексные расширения $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ операторов A, B определяются теми же самыми дифференциальными выражениями и краевыми условиями, что и операторы A, B (3.12), где $W_2^2(0,\pi), W_2^4(0,\pi)$ — комплексные пространства Соболева порядков $2, 4$. Пучок операторов $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$, определенный на $\widetilde{D} = D_{\widetilde{B}}$, имеет резольвенту

$$(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1} w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k \sin kx}{k^4 + \lambda(k^2-1)}, \quad \lambda \neq \frac{k^4}{1-k^2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Псевдорезольвента $\widetilde{A}(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}$ удовлетворяет оценке (1.4) в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$.

Находим линеалы D_1, D_2 и подпространства H_2^1, H_2^2, отвечающие разложениям $D = D_B$ и $H_2 = L_2(0,\pi)$ (1.7):

$$D_1 = D_B \cap \mathrm{Ker}A^{\perp}, \quad D_2 = H_2^2 = \mathrm{Ker}A = \mathrm{Lin}\{\sin x\}, \quad H_2^1 = \mathrm{Ker}A^{\perp} = AD_A.$$

Операторы P_1, Q_1 (1.6) являются ортогональными проекторами; они проектируют на $D_B \cap \mathrm{Ker}A^{\perp}$, $\mathrm{Ker}A^{\perp}$ соответственно ортогонально $\mathrm{Ker}A$. Оператор G (1.8) допускает замкнутое расширение $\overline{G}$ на D_A, и существует ограниченный обратный $\overline{G}^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$:

$$\overline{G}^{-1} w = w_1 \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{w_k \sin kx}{k^2 - 1}.$$

Сужение $\overline{G}^{-1}$ на $AD \dot{+} \mathrm{Lin}\{\sin x\} = D_A$ есть G^{-1}. Оператор W (1.10) порождает полугруппу S_τ класса C_0 в пространстве $\mathcal{L}(L_2(0,\pi))$:

$$S(\tau) w = w_1 \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} e^{\alpha_k \tau} w_k \sin kx, \quad \alpha_k = \frac{k^4}{1-k^2}. \tag{3.13}$$

Утверждение 2. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (3.9)–(3.11) *выполняются следующие предположения: начальная функция $q(x) \in W_2^2(0,\pi)$ отлична от нуля на некотором множестве из $[0,\pi]$ положительной меры, $q(0) = q(\pi) = 0$, $\int_0^\pi q(x) \sin x dx = 0$; оператор K является самосопряженным, $\mathrm{Im}K \subset D_A$, $S(\tau)q \in \mathrm{Im}K$ для всех $\tau \in [0,T]$, где $S(\tau)$ — полугруппа* (3.13)*; области управления U_0 и V_0 суть замкнутые шары в $L_2(0,\pi)$ с центром в нуле и радиусом ϱ_1 и ϱ_2, $\varrho_1 > \varrho_2$; множество $\Upsilon(q,0)$* (3.6) *не пусто. Тогда динамический вектор $-\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} - y(t,x)$ системы* (3.9)–(3.11) *может быть приведен в ноль за наименьшее время T_0, где T_0 определено в* (3.7)*, при любом допустимом управлении $v(t,x) \in V_0$ и допустимом управлении $u(t,x) \in U_0$ вида* (3.8)*, где момент t_* переключения управления удовлетворяет соотношению* (2.8) *с разрешающим функционалом $\alpha(t,\tau,v)$* (3.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение условий теоремы 2 для дифференциальной игры в системе (3.9)–(3.11) с терминальным множеством (2.1), где $M = \{0\}$, $M_0^{\perp} = H_2^1 = \mathrm{Ker}A^{\perp} = AD_A$, $M_0 = \{0\}$, $M_1 = \{0\}$, $\Pi = E$. Выше было установлено, что для системы (3.9)–(3.11) оценка (1.4) выполнена и оператор G^{-1} ограничен на своей области определения, совпадающей с D_A.

Если выполнены условия утверждения, то $q(x) \in D_A \cap \mathrm{Ker}A^{\perp} = AD$, $Q_1 \mathrm{Im}K \subset AD$ и справедливо условие Понтрягина ($0 \in \Omega_0(t,\tau)$). В данном приложении в роли $S(\tau)$ выступает полугруппа (3.13). Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве утверждения 1, получаем, что разрешающий функционал (2.4) имеет вид (3.5), множество $\Upsilon(q,0)$ (2.5) принимает вид (3.6). Для начальных функций $q(x)$ с достаточно малой нормой $\Upsilon(q,0) \neq \varnothing$. В силу теоремы 2 игра в системе (3.9)–(3.11) может быть окончена в любой момент времени из множества $\Upsilon(q,0)$ (2.5). Наименьшее время окончания игры есть $\min\{t \in \Upsilon(q,0)\} = T_0$, где T_0 определено в (3.7). Из доказательства теоремы 2 следует, что для любого допустимого управления убегающего $v(\tau,x)$ управление преследователя $u(\tau,x)$ строится по формуле (3.8), где момент t_* переключения управления удовлетворяет соотношению (2.8) с разрешающим функционалом $\alpha(t,\tau,v)$ (3.5).

Утверждение доказано.

Если в системе (3.9)–(3.11) рассмотреть оператор $K = \Pi_k$ — ортопроектор на линейную оболочку $\sin kx$, $k > 1$, то $q(x) = q_k \sin kx$, K_0 — единичный оператор, разрешающий функционал $\alpha(t,\tau,v)$ (3.5) есть

$$\alpha(t,\tau,v) = \varrho_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_k(\tau)\mathrm{sign} q_k, \quad v_k(\tau)\sin kx = \Pi_k v(\tau),$$

а множество $\Upsilon(q,0)$ (3.6) принимает вид

$$\Upsilon(q,0) = [\alpha_k^{-1} d_k, \infty) \cap [0,T], \quad d_k = \ln(\varrho_1 - \varrho_2) - \ln(\varrho_1 - \varrho_2 - \alpha_k \|q\|).$$

Если $\|q\| \le \alpha_k^{-1}(\varrho_1 - \varrho_2)(1 - e^{-\alpha_k T})$, то $\Upsilon(q,0) \ne \varnothing$. Находим наименьшее время окончания игры

$$T_0 = \alpha_k^{-1}\big[\ln(\varrho_1 - \varrho_2) - \ln(\varrho_1 - \varrho_2 - \alpha_k\|q\|)\big].$$

Для любого допустимого управления убегающего $v(\tau,x)$ управление преследователя $u(\tau,x)$ строится по формуле

$$u(\tau,x) = \begin{cases} v_k(\tau)\sin kx\Big[1 - e^{\alpha_k \tau}\Big(\varrho_1 + \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} v_k(\tau)\mathrm{sign} q_k\Big)\Big], & (\tau,x) \in [0,t_*) \times [0,\pi], \\ v_k(\tau)\sin kx, & (\tau,x) \in [t_*,T_0] \times [0,\pi], \end{cases}$$

где момент t_* переключения управления определяется из соотношения

$$\varrho_1 t_* + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sign} q_k \int\limits_0^{t_*} v_k(\tau)d\tau = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isaacs R.** Differential Games. New York: John Wiley, 1965. 480 p.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
4. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
5. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first order PDEs: The dynamic optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Ижевск: Институт компьютер. исслед., 2003. 336 с.
7. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М: Наука, 1981. 288 с.
8. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamic optimization // J. Math. Sci. 2006. Vol. 135, № 3. P. 2955–3091.
9. **Никольский М.С.** Об управлении при наличии противодействия // Вестн. Моск. ун-та. 1972. № 1. С. 67–72.
10. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.
11. **Осипов Ю.С.** Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 195–201.

12. **Власенко Л.А., Чикрий А.А.** Метод разрешающих функционалов для одной динамической игры в системе типа Соболева // Проблемы управления и информатики. 2014. № 4. С. 5–14.
13. **Власенко Л.А., Чикрий А.А.** Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 71–80.
14. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer, 1997. 424 p.
15. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 76–92.
16. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
17. **Pazy A.** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1983. 279 p.
18. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с.
19. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностр. лит., 1962. 830 с.
20. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
21. **Власенко Л.А., Мышкис А.Д., Руткас А.Г.** Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 222–231.
22. **Власенко Л.А., Руткас А.Г.** Об одном классе импульсных функционально-дифференциальных уравнений с неатомарным разностным оператором // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 37–49.
23. **Власенко Л.А.** Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006. 273 с.
24. **Хенри Д.** Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 367 с.
25. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
26. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
27. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
28. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. М.: Наука, 1966. 500 с.
29. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
30. **Бреховских Л.М., Гончаров В.В.** Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.

Власенко Лариса Андреевна
д-р тех. наук, профессор,
профессор Харьковского нац. университета им. В.Н. Каразина
e-mail: lara@rutrus.com

Поступила 24.01.15

Руткас Анатолий Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой Харьковского нац. университета им. В.Н. Каразина
e-mail: anatoly@rutrus.com

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
член- корр. НАН Украины
зав. отделом Ин-та кибернетики им. В. М. Глушкова НАНУ
e-mail: chik@insyg.kiev.ua