ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ

В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев

Рассмотрена задача импульсной встречи в заданный момент времени с началом координат. Имеется воздействие со стороны неконтролируемой помехи, о которой известно только множество ее значений. Динамика системы имеет декомпозиционный вид, характеризующийся тем, что часть фазовых переменных не подвержена воздействию со стороны импульсного управления.

Ключевые слова: импульсное управление, декомпозиционная система, стабильный мост.

V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest'ev. On a problem of impulse control in the presence of a disturbance.

We consider the problem of impulse encounter with the origin at a given time under the action of an uncontrolled disturbance given only by a set of its values. The dynamics of the system has decomposition form, which is characterized by the nonsusceptibility of a part of the state variable to the action of the impulse control.

Keywords: impulse control, decomposition system, stable bridge.

Введение

К задачам импульсного управления сводятся задачи управления механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы [1]. Если на механическую систему воздействуют неконтролируемые силы, о которых известны только области их возможных значений, то задача управления может быть рассмотрена в рамках теории управления гарантированным результатом.

Анализ задач импульсного управления усложняется тем, что траектории управляемой системы могут быть разрывными.

В работе [2] предложен метод решения игровых задач преследования, основанный на принципе поглощения областей достижимости. Возможность применения этого метода к задачам импульсного управления рассматривалась, например, в работах [3;4]. В [4] приводится пример импульсной «мягкой» встречи двух управляемых материальных точек, когда первый игрок не может поддерживать требуемое включение областей достижимости. Обсуждается вопрос о возможности применения метода динамического программирования к задачам импульсной встречи. В работе [5] этот метод применяется при решении конкретных задач импульсной встречи.

В [6] доказана теорема об альтернативе для дифференциальных игр с импульсными управлениями в предположении, что целевые координаты вектора состояния меняются непрерывно.

В работах [7–11] предложены разные подходы к исследованию дифференциальных игр и задач управления при наличии помех в случае импульсных управлений.

Известно, что линейную управляемую систему с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [12] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоят только управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс, уравнения движения которого имеют вид (см. [1])

$$dz = A(t)du + wf_1(t,\theta,v)dt, \quad \dot{\theta} = f_2(t,\theta,v), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \mathbb{R}^q, \quad t \le p. \tag{1.1}$$

Здесь $A(t)$ — непрерывная при $t \le p$ матрица размерности $n \times l$, p — заданное число.

На каждом отрезке $[t,\tau] \subset (-\infty, p]$ допустимым программным управлением является функция $u : [t;\tau] \to \mathbb{R}^l$ с ограниченным изменением

$$\int\limits_t^\tau \|du(r)\|_{(l)} = \sup \sum \|u(r_{i+1}) - u(r_i)\|_{(l)}\,.$$

Здесь и в дальнейшем посредством $\|\cdot\|_{(j)}$ будем обозначать норму в пространстве $\mathbb{R}^j$, $j = n, q, l$. Верхняя грань берется по всем разбиениям точками r_i отрезка $[t,\tau]$.

Программной реализацией помехи являются измеримые функции $v : [t,\tau] \to V$, $w : [t,\tau] \to [-1,1]$, где V — компакт в $\mathbb{R}^g$.

Предположение 1.1. *Функции* $f_1 : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^q \times V \to \mathbb{R}^n$ *и* $f_2 : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^q \times V \to \mathbb{R}^q$ *являются непрерывными.*

Предположение 1.2. *Для любого компакта* $D \subset [-\infty, p] \times \mathbb{R}^q$ *найдется такая константа* $L = L(D) > 0$, *что*

$$\|f_2(t,\theta_1,v) - f_2(t,\theta_2,v)\|_{(q)} \le L\|\theta_1 - \theta_2\|_{(q)} \ \ \forall\,(t,\theta_i,v) \in D \times V, \quad i = 1,2.$$

Предположение 1.3. *Для любого числа* $t_0 < p$ *существует такая константа* $\gamma > 0$, *что*

$$\|f_2(t,\theta,v)\|_{(q)} \le \gamma(1 + \|\theta\|_{(q)}) \ \ \forall\,(t,\theta,v) \in [t_0,p] \times \mathbb{R}^q \times V.$$

Из предположений 1.1–1.3 следует (см. [13;14]), что для любого начального условия $t_0 < p$, $\theta(t_0) = \theta_0$ и для любой измеримой функции $v : [t_0,p] \to V$ уравнение $\dot\theta = f_2(t,\theta,v(t))$ имеет единственное решение, определенное при $t_0 \le t \le p$. Под решеним понимается абсолютно непрерывная функция $\theta : [t_0,p] \to \mathbb{R}^q$, почти всюду на $[t_0,p]$ удовлетворяющая уравнению. Это решение будем обозначать $\theta = \psi(t,t_0,\theta_0,v(\cdot))$. Для любой измеримой функции $v : [t_0,p] \to V$ и для любых $t_0 \le t \le \tau \le p$ выполнено равенство

$$\psi(\tau,t,\psi(t,t_0,\theta_0,v(\cdot)),v(\cdot)) = \psi(\tau,t_0,\theta_0,v(\cdot)).$$

Позицией является точка (t,z,μ,θ), где $t < p$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\mu \ge 0$, $\theta \in \mathbb{R}^q$. Число μ характеризует имеющийся запас ресурсов, который можно использовать на формирование управления u.

Определение 1.1. Назовем *u-стратегией* правило, ставящее в соответствие каждой позиции (t,z,μ,θ) функцию

$$u : [t,p] \to \mathbb{R}^l, \quad \int\limits_t^p \|du(r)\|_{(l)} \le \mu. \tag{1.2}$$

Пусть задана начальная позиция (t_0,z_0,μ_0,θ_0) и выбрана u-стратегия. Возьмем разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{k+1} = p \tag{1.3}$$

с диаметром $d(\omega) = \max\,(t_{i+1} - t_i)$, $i = \overline{1,k}$.

Зафиксируем u-стратегию (1.2) и для уравнения (1.1) построим ломаную с вершинами

$$z^{(\omega)}(t_{i+1}) = z^{(\omega)}(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(r)du(r) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} w_i(r) f_1\Big(r, \psi\big(r,t_i,\theta^{(\omega)}(t_i), v_i(\cdot)\big), v_i(r)\Big)dr, \tag{1.4}$$

$$\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) = \mu^{(\omega)}(t_i) - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|du(r)\|_{(l)}, \quad \theta^{(\omega)}(t_{i+1}) = \psi\big(t_{i+1}; t_i, \theta^{(\omega)}(t_i), v_i(\cdot)\big). \tag{1.5}$$

Здесь $i = \overline{0,k}$, $z^{(\omega)}(t_0) = z_0$, $\mu^{(\omega)}(t_0) = \mu_0$, $\theta^{(\omega)}(t_0) = \theta_0$. Первый интеграл в (1.4) понимается в смысле Римана — Стилтьеса. Функции $v_i : [t_i, t_{i+1}] \to V$ и $w_i : [t_i, t_{i+1}] \to [-1, 1]$ — любая измеримая реализация помехи.

Цель построения u-стратегии заключается в выводе вектора z в момент времени p в начало координат. Наличие импульсного управления может привести к мгновенному изменению фазовых координат. Это требует специального определения условия попадания точки $z(p)$ в начало координат [5; 9] . С этой целью введем в рассмотрение вектограмму управления

$$U(t) = \big\{z \in \mathbb{R}^n \colon z = A(t)u, \ \|u\|_{(l)} \le 1\big\}. \tag{1.6}$$

Множество (1.6) является выпуклым компактом, симметричным относительно начала координат. Из непрерывности матрицы $A(t)$ следует, что многозначная функция (1.6) непрерывно по Хаусдорфу зависит от t.

О п р е д е л е н и е 1.2. Из начальной позиции $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$ можно попасть в момент времени p в начало координат, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ и u-стратегия такие, что для любого разбиения ω (1.3) с диаметром $d(\omega) < \delta$ и для любой допустимой реализации помехи выполнено включение

$$z^{(\omega)}(p) \in \mu^{(\omega)}(p)U(p) + \epsilon S. \tag{1.7}$$

Здесь обозначено $S = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z\|_{(n)} \le 1\}$.

З а м е ч а н и е. Из включения (1.7) и из формулы (1.6) следует, что

$$z^{(\omega)}(p) + \mu^{(\omega)}(p)A(p)u \in \epsilon S$$

при некотором $\|u\|_{(l)} \le 1$. Следовательно, выбрасывая мгновенно в момент времени p в направлении вектора u оставшееся $\mu^{(\omega)}(p)$ количество ресурсов, получим включение $z(p_+) \in \epsilon S$.

2. Область достижимости управления

Зафиксируем числа $t < \tau \le p$. Объединение множеств $U(r)$ (1.6) при $t \le r \le \tau$ является компактом, симметричным относительно начала координат. Поэтому выпуклая оболочка

$$U_t^\tau = co \bigcup_{t \le r \le \tau} U(r) \tag{2.1}$$

является выпуклым компактом, симметричным относительно начала координат. Положим $U_t^t = U(t)$. Тогда множества U_t^τ непрерывно по Хаусдорфу зависят от $t \le \tau \le p$.

Можно показать, что (см. [15])

$$U_t^\tau = \bigcup_{0 \le \lambda \le 1} \big(\lambda U_t^s + (1-\lambda) U_s^\tau\big), \quad t \le s \le \tau \le p, \tag{2.2}$$

а область достижимости импульсного управления определяется как

$$\left\{ z = \int\limits_t^\tau A(r)\, du(r) : \int\limits_t^\tau \|du(r)\|_{(l)} = \mu \right\} = \mu U_t^\tau, \quad t < \tau. \tag{2.3}$$

Скалярное произведение двух векторов ϕ и y в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\langle \phi, y\rangle$. Если $Y \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, то его опорную функцию будем обозначать $c(\phi; Y) = \max \langle \phi, y\rangle, y \in Y$.

Обозначим $m\,(t,\phi)=c\,(\phi;U_t^p)$. Тогда из формул (1.6) и (2.1) получим, что

$$m\,(t,\phi)=\max_{r,\,u}\langle\phi,A(r)u\rangle,\quad \|u\|_{(l)}\le 1,\quad t\le r\le p. \tag{2.4}$$

Отметим, что функция (2.4) является четной по переменной ϕ и убывает по t при $t\le p$.

Предположение 2.1. *При всех $t<p$ и $\phi\in\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $m(t,\phi)>0$.*

3. Задача уклонения

Зафиксируем число $t_0<p$, векторы $\theta_0\in\mathbb{R}^q$ и $\phi\in\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$B(t_0,\theta_0,\phi)=\sup_{v(\cdot)\in V}\int\limits_{t_0}^{p}\frac{\big|\langle\phi,f_1(r,\psi(r,t_0,\theta_0,v(\cdot)),v(r))\rangle\big|}{m(r,\phi)}dr. \tag{3.1}$$

Здесь верхняя грань вычисляется по всем измеримым функциям $v:[t_0,p]\to V$. Поскольку согласно предположению 2.1 возможно равенство $m(p,\phi)=0$, то интеграл в (3.1) понимается в смысле несобственного.

Теорема 3.1. *Пусть начальное состояние $t_0<p$, $z(t_0)\in\mathbb{R}^n$, $\mu(t_0)\ge 0$ и $\theta(t_0)\in\mathbb{R}^q$ таково, что для некоторого единичного вектора $\phi\in\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$|\langle\phi,z(t_0)\rangle|>m(t_0,\phi)\left(\mu(t_0)-B(t_0,\theta(t_0),\phi)\right). \tag{3.2}$$

Тогда существует такая допустимая реализация помехи, что из этого начального состояния невозможно в момент времени p попасть в начало координат при любой u-стратегии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (3.1) и (3.2) следует, что существуют измеримая функция $v_0:[t_0,p]\to V$ и число $\gamma>0$, для которых выполнено неравенство

$$|\,\langle\phi,z(t_0)\rangle\,|>m_\gamma(t_0,\phi)\Bigg(\mu(t_0)-\int\limits_{t_0}^{p}\frac{|\langle\phi,f(r)\rangle|}{m_\gamma(r,\phi)}dr+\gamma\Bigg). \tag{3.3}$$

Здесь

$$f(r)=f_1\big(r,\psi\big(r,t_0,\theta(t_0),v_0(\cdot)\big),v_0(r)\big),\quad m_\gamma(t,\phi)=m(t,\phi)+\gamma. \tag{3.4}$$

Для разбиения ω (1.3) обозначим

$$B_i(\omega)=\sum_{j=i}^{k}\frac{1}{m_\gamma\,(t_j,\phi)}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}|\langle\phi,f(r)\rangle|dr,\quad i=\overline{0,k}. \tag{3.5}$$

Тогда (см., например, [15, с. 39–40])

$$\sup_{\omega}B_0(\omega)=\int\limits_{t_0}^{p}\frac{|\langle\phi,f(r)\rangle|}{m_\gamma(r,\phi)}dr.$$

Отсюда и из неравенства (3.3) следует, что существует разбиение ω (1.3) отрезка $[t_0,p]$, при котором

$$|\,\langle\phi,z(t_0)\rangle\,|>m_\gamma(t_0,\phi)\big(\mu(t_0)-B_0(\omega)+\gamma\big). \tag{3.6}$$

В качестве реализации v помехи возьмем найденную функцию $v_0 : [t_0, p] \to V$. Покажем, что существует допустимая реализация w помехи такая, что для любой u-стратегии выполнено неравенство

$$\bigl|\bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(t_i)\bigr\rangle\bigr| > m_\gamma(t_i, \phi)\bigl(\mu^{(\omega)}(t_i) - B_i(\omega) + \gamma\bigr), \quad i = \overline{0, k}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) следует, что неравенство (3.7) при $i = 0$ выполнено. Пусть оно выполнено при $0 \le i < k$. Возьмем

$$w_i(r) = \operatorname{sign}\bigl(\langle \phi, f(r)\rangle \bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(t_i)\bigr\rangle\bigr). \tag{3.8}$$

Из формулы (1.4), используя первое обозначение в (3.4), получим, что

$$\bigl|\bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(t_{i+1})\bigr\rangle\bigr| \ge \left|\bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(t_i)\bigr\rangle + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} w_i(r)\langle \phi, f(r)\rangle dr\right| - \left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \phi, A(r)du(r)\rangle\right|.$$

Подставим сюда функцию (3.8) и учтем неравенство

$$\left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \phi, A(r)du(r)\rangle\right| \le m(t_i, \phi)\Bigl(\mu^{(\omega)}(t_i) - \mu^{(\omega)}(t_{i+1})\Bigr),$$

которое следует из теоремы о среднем интеграла Римана — Стилтьеса [16] и из первой формулы (1.5). Получим

$$\bigl|\bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(t_{i+1})\bigr\rangle\bigr| \ge \bigl|\bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(t_i)\bigr\rangle\bigr| + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} |\langle \phi, f(r)\rangle| dr - m_\gamma(t_i, \phi)\Bigl(\mu^{(\omega)}(t_i) - \mu^{(\omega)}(t_{i+1})\Bigr). \tag{3.9}$$

Отсюда, используя второе обозначение в (3.4) и неравенство (3.7), будем иметь

$$\bigl|\bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(t_{i+1})\bigr\rangle\bigr| > m_\gamma(t_i, \phi)\bigl(\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) - B_{i+1}(\omega) + \gamma\bigr). \tag{3.10}$$

Из этого неравенства следует, что если выражение, стоящее в нем в правой части, меньше нуля, то неравенство (3.7) выполнено и при $i + 1$. Если же это выражение больше нуля, то неравенство (3.7) при $i + 1$ будет следовать из (3.10) и из монотонности функции $m_\gamma(t, \phi)$.

Положим в (3.7) $i = k$. Тогда, учитывая формулу (3.5), получим

$$\bigl|\bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(t_k)\bigr\rangle\bigr| > m_\gamma(t_k, \phi)\mu^{(\omega)}(t_k) - \int\limits_{t_k}^{p} |\langle \phi, f(r)\rangle| dr + m_\gamma(t_k, \phi)\gamma.$$

Отсюда и из формул (3.4) и (3.9) следует, что

$$\bigl|\bigl\langle \phi, z^{(\omega)}(p)\bigr\rangle\bigr| > m_\gamma(t_k, \phi)\bigl(\mu^{(\omega)}(p) + \gamma\bigr) \ge m(t_k, \phi)\mu^{(\omega)}(p) + \gamma^2.$$

Это неравенство означает, что

$$z^{(\omega)}(p) \notin \mu^{(\omega)}(p)U(p) + \gamma^2 S. \tag{3.11}$$

Возьмем любое разбиение ω_* отрезка $[t_0, p]$, среди точек разбиения которого находятся все точки рассмотренного разбиения ω. Тогда из формулы (3.5) и из монотонности функции $m_\gamma(t, \phi)$ следует, что $B_0(\omega) \le B_0(\omega_*)$. Следовательно, неравенство (3.6) будет выполнено и для этого разбиения.

Таким образом, существуют число $\gamma > 0$ и последовательность разбиений (1.3) отрезка $[t_0, p]$ с диаметром разбиения, стремящимся к нулю, такие, что можно построить допустимую реализацию помехи, для которой будет выполнено условие (3.11) для любой u-стратегии.

Согласно определению 1.2 это означает, что из рассмотренного начального состояния нельзя попасть в момент времени p в начало координат. Теорема доказана. $\square$

Обозначим при $t < p$ и $\theta \in \mathbb{R}^q$

$$b(t,\theta) = \sup_{\phi} B(t,\theta,\phi), \quad \|\phi\|_{(n)} = 1. \tag{3.12}$$

Следствие 3.1. *Пусть* $0 \le \mu_0 < b(t_0,\theta_0)$. *Тогда для любого* $z_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует такая допустимая реализация помехи, что из начальной позиции* $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$ *невозможно попасть в начало координат при любой* u*-стратегии.*

Можно показать, что для любых $t < \tau \le p$, $\theta \in \mathbb{R}^q$ и для любой измеримой функции $v : [t,\tau] \to V$ выполнены условия

$$b(p,\theta) = 0,\ b(t,\theta) \ge b\big(\tau, \psi(\tau; t, \theta, v(\cdot))\big). \tag{3.13}$$

4. Построение u-стратегии, гарантирующей встречу

Построим u-стратегию, гарантирующую попадание в начало координат из начальной позиции при любой допустимой реализации помехи. Это построение проведем с помощью стабильного моста [12], который определяется следующим образом (см. [10; 11]):

$$\mu \ge b(t,\theta), \quad z \in (\mu - b(t,\theta)) U_t^p + N(t,\theta). \tag{4.1}$$

Здесь $b(t,\theta) \ge 0$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям (3.13), а семейство множеств $N(t,\theta) \subset \mathbb{R}^n$ при $t \le p$ и $\theta \in \mathbb{R}^q$ должно удовлетворять условию стабильности [12] и равенству

$$N(p,\theta) = 0. \tag{4.2}$$

Условие стабильности означает следующее: если позиция (t, z, μ, θ) удовлетворяет соотношениям (4.1), то для момента времени $\tau \in (t,p]$ и для любой допустимой реализации помехи $v : [t,\tau] \to V$, $w : [t,\tau] \to [-1,1]$ найдется управление $u : [t,\tau] \to \mathbb{R}^n$ с расходом ресурсов $\int_t^\tau \|du(r)\|_{(l)} \le \mu$ такое, что реализовавшаяся позиция $(\tau, z(\tau), \mu(\tau), \theta(\tau))$ будет удовлетворять условию (4.1).

Можно показать, используя формулы (2.2) и (2.3), что условие стабильности будет выполнено, если

$$N(t,\theta) + \int_t^\tau w(r) f_1(r, \psi(r,t,\theta,v(\cdot)), v(r))dr$$
$$\subset \Big(b(t,\theta) - b\big(\tau, \psi(\tau,t,\theta,v(\cdot))\big)\Big) U_t^p + N\big(\tau, \psi(\tau,t,\theta,v(\cdot))\big) \tag{4.3}$$

для любых измеримых функций $v : [t,\tau] \to V$, $w : [t,\tau] \to [-1,1]$.

Теорема 4.1. *Пусть при* $t \le p$, $\theta \in \mathbb{R}^q$ *задано семейство непустых множеств* $N(t,\theta) \subset \mathbb{R}^n$*, удовлетворяющих равенству* (4.2) *и включению* (4.3). *Тогда из начальной позиции* $t_0 < p$, $z(t_0) = z_0$, $\theta(t_0) = \theta_0$, $\mu(t_0) = \mu_0$, *удовлетворяющей соотношениям* (4.1), *возможно попадание в начало координат в момент времени* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Возьмем число $a > 0$ такое, что

$$a b(t_0,\theta_0) < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Из условия (3.13) следует, что $b(t_0,\theta_0) \ge b(t,\theta)$ при всех $t_0 \le t \le p$ и

$$\theta = \psi(t, t_0, \theta_0, v(\cdot)) \text{ при некоторой } v : [t_0, t] \to V. \tag{4.5}$$

Обозначим при таких t и θ

$$N_+(t,\theta) = N(t,\theta) + a\big(b(t_0,\theta_0) - b(t,\theta)\big)S. \tag{4.6}$$

Для позиции (t,z,μ,θ), удовлетворяющей условиям (4.6) и соотношениям (4.1) с заменой в них множества $N(t,\theta)$ на $N_+(t,\theta)$, верно разложение

$$z = x + y, \quad x \in \big(\mu - b(t,\theta)\big)U_t^p, \quad y \in N_+(t,\theta). \tag{4.7}$$

Очевидно, что рассматриваемая начальная позиция этим условиям удовлетворяет.

Рассмотрим проблему моментов (см. [1]):

$$\int\limits_t^p \|du(r)\|_{(l)} \to \min, \quad x + \int\limits_t^p A(r)du(r) = 0. \tag{4.8}$$

Из второго включения (4.7) и из формулы (2.3) следует, что проблема моментов (4.8) имеет решение $u^*:[t,p]\to\mathbb{R}^l$, причем

$$\int\limits_t^p \|du^*(r)\|_{(l)} \le \mu - b(t,\theta). \tag{4.9}$$

Из второго равенства (4.8) и неравенства (4.9) следует, что построенная функция u^* : $[t,p]\to\mathbb{R}^l$ при $t<\tau\le p$ удовлетворяет неравенству

$$\mu(\tau) = \mu - \int\limits_t^\tau \|du^*(r)\|_{(l)} \ge b(t,\theta) \tag{4.10}$$

и включению

$$x + \int\limits_t^\tau A(r)du^*(r) \in \big(\mu(\tau) - b(t,\theta)\big)U_\tau^p. \tag{4.11}$$

Берем эту функцию $u^*:[t,p]\to\mathbb{R}^l$ в качестве u-стратегии для позиции (t,z,μ,θ). Для всех остальных позиций полагаем $u^*(r)=0$ при $t\le r\le p$.

Область достижимости U_t^p непрерывно по Хаусдорфу зависит от t. Поэтому на отрезке $[t_0,p]$ она равномерно непрерывна. Следовательно, для числа $a>0$, удовлетворяющего неравенству (4.4), существует число $\delta>0$ такое, что для любого разбиения ω (1.3) с диаметром разбиения меньше δ выполнено включение

$$U_{t_i}^p \subset U_{t_{i+1}}^p + aS, \quad i=\overline{0,k}. \tag{4.12}$$

Возьмем разбиение ω (1.3) и применим построенную u-стратегию. В результате реализации допустимой помехи получим ломаную (1.4), (1.5). Отметим, что точки t_i, $\theta^{(\omega)}(t_i)$, $i=\overline{1,k+1}$, удовлетворяют условию (4.5). Покажем, что для всех $i=\overline{0,k+1}$ выполнены неравенство

$$\mu^{(\omega)}(t_i) \ge b\big(t_i,\theta^{(\omega)}(t_i)\big) \tag{4.13}$$

и включение

$$z^{(\omega)}(t_i) \in \Big(\mu^{(\omega)}(t_i) - b\big(t_i,\theta^{(\omega)}(t_i)\big)\Big)U_{t_i}^p + N_+\big(t_i,\theta^{(\omega)}(t_i)\big). \tag{4.14}$$

При $i=0$ соотношения (4.13) и (4.14) выполнены. Допустим, что они выполнены для $0\le i\le k$. Тогда из (4.10) следует, что $\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) \ge b\left(t_i,\theta^{(\omega)}(t_i)\right)$. Отсюда и из условия (3.13) получим, что неравенство (4.13) выполнено и при $i+1$.

Используя формулу (1.4), последнее включение в (4.7) и включение (4.11), выводим, что

$$z^{(\omega)}(t_{i+1}) \in \Big(\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) - b\big(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\big)\Big)U^p_{t_{i+1}}$$

$$+ N_+\big(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\big) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} w_i(r) f_1\Big(r, \psi\big(r, t_i, \theta^{(\omega)}(t_i), v_i(\cdot)\big), v_i(r)\Big)dr. \tag{4.15}$$

Включение (4.3) выполнено при $t = t_i$, $\theta = \theta^{(\omega)}(t_i)$, $\tau = t_{i+1}$. Прибавим к обеим частям включения (4.3) множество $a\left(b\left(t_0, \theta_0\right) - b\left(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\right)\right)S$ и учтем включение (4.12). Получим

$$N_+\big(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\big) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} w_i(r) f_1\Big(r, \psi\big(r, t_i, \theta^{(\omega)}(t_i), v_i(\cdot)\big), v_i(r)\Big)dr$$

$$\subset \Big(b\big(t_i, \theta^{(\omega)}(t_i)\big) - b\big(t_{i+1}, \theta^{(\omega)}(t_{i+1})\big)\Big)U^p_{t_{i+1}} + N_+\big(t_{i+1}, \theta^{(\omega)}(t_{i+1})\big).$$

Отсюда и из включения (4.15) следует, что включение (4.14) выполнено при $i + 1$.

Положим в (4.14) $i = k + 1$. Получим требуемое включение (1.7). Теорема доказана.

5. Пример

Рассмотрим одномерный случай $z \in \mathbb{R}$. Тогда, как следует из формулы (2.4), $m(t, \phi) = m(t)|\phi|$ при любом $\phi \in \mathbb{R}$. Далее, функция (3.1) не зависит от ϕ и равна

$$B(t, \theta) = \sup \int\limits_t^p \frac{|f_1(r, \theta(r), v(r))|}{m(r)}dr, \tag{5.1}$$

$$\dot\theta(r) = f_2(r, \theta(r), v(r)), \quad \theta(t) = \theta, \quad v(r) \in V. \tag{5.2}$$

Условие (3.2), при выполнении которого существует реализация помехи, гарантирующая непопадание в момент времени p в начало координат из начального состояния $t_0 < p$, $z(t_0) = z_0$, $\theta(t_0) = \theta_0$, $\mu(t_0) = \mu_0$, принимает вид $|z_0| > (\mu_0 - B(t_0, \theta_0))m(t_0)$.

В рассматриваемом случае функция $b(t, \theta)$, определяемая формулой (3.12), совпадает с функцией $B(t, \theta)$. Покажем, что семейство множеств $N(t, \theta) = 0$ удовлетворяет включению (4.3). Это значит, что при всех $t < \tau < p$ имеет место неравенство

$$\int\limits_t^\tau |f_1(r, \theta(r), v(r))|dr \le \big(B(t, \theta) - B(\tau, \theta(\tau))\big)m(t) \tag{5.3}$$

для любой измеримой функции $v : [t, p] \to V$ и любого решения $\theta(r)$ задачи Коши (5.2). Из монотонности функции $m(t)$ следует, что

$$\frac{1}{m(r)} \int\limits_t^\tau |f_1(r, \theta(r), v(r))|dr \le \int\limits_t^\tau \frac{|f_1(r, \theta(r), v(r))|}{m(r)}dr.$$

Поэтому неравенство (5.3) будет выполнено, если верно неравенство

$$B(t, \theta) \ge B(\tau, \theta(\tau)) + \int\limits_t^\tau \frac{|f_1(r, \theta(r), v(r))|}{m(r)}dr.$$

Это неравенство следует из формул (5.1) и (5.2).

Соотношения (4.1) при $N(t,\theta) = 0$ для заданного начального состояния $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$ принимают следующий вид: $|z_0| \leq (\mu_0 - B(t_0, \theta_0))m(t_0)$.

Таким образом, для рассматриваемого примера последнее неравенство задает необходимые и достаточные условия возможности попадания в начало координат в момент времени p из заданной начальной позиции $(t_0, z_0, \mu_0, \theta_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. **Красовский Н.Н.** Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.
3. **Красовский Н.Н., Репин Ю.М., Третьяков В.Е.** О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1965. № 4. С. 3–23.
4. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 587–599.
5. **Пожарицкий Г.К.** Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 4. С. 579–589.
6. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
7. **Чикрий А.А., Матичин И.И., Чикрий К.А.** Конфликтно управляемые процессы с разрывными траекториями // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 6. С. 15–29.
8. **Петров Н.Н.** Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователя// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 38–44.
9. **Ухоботов В.И.** Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 355–362.
10. **Ухоботов В.И.** Линейная игра импульсной встречи заданной продолжительности с интегральным ограничением // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика, механика. 1991. № 1. С. 47–64.
11. **Ухоботов В.И., Зайцева О.В.** Линейная задача импульсной встречи в заданный момент времени при наличии помехи //Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 186–198.
12. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
13. **Коддингтон Э.А., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностр. лит., 1958. 475 с.
14. **Hermes H.** The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t,x)$ // Advances Math. 1970. Vol. 4, no. 2. P. 149–169.
15. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.
16. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1972. 496 с.

Поступила 23.01.2015

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет
e-mail: ukh@csu.ru

Изместьев Игорь Вячеславович
аспирант
Челябинский государственный университет
e-mail: j748e8@gmail.com