ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.988

РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ РАЗНОСТЬЮ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ[1]

А. А. Толстоногов

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается эволюционное включение, правая часть которого содержит разность субдифференциалов собственных, выпуклых, полунепрерывных снизу функций и многозначное возмущение, значениями которого являются невыпуклые, замкнутые множества. Наряду с исходным включением рассматривается включение с овыпукленным возмущением и возмущением, значениями которого являются экстремальные точки овыпукленного возмущения, принадлежащие одновременно значениям исходного возмущения. Изучаются вопросы существования решений при различных возмущениях и устанавливаются взаимосвязи между решениями. Основное внимание уделено ослаблению предположений на возмущение по сравнению с известными, при которых справедливы теоремы существования и релаксации. Все наши предположения в отличие от известных относятся не к исходному, а к овыпукленному возмущению.

Ключевые слова: эволюционные включения, разность субдифференциалов, релаксация.

A. A. Tolstonogov. Solutions of evolution inclusions generated by a difference of subdifferentials.

An evolution inclusion with the right-hand side containing the difference of subdifferentials of proper convex lower semicontinuous functions and a multivalued perturbation whose values are nonconvex closed sets is considered in a separable Hilbert space. In addition to the original inclusion, we consider an inclusion with convexified perturbation and a perturbation whose values are extremal points of the convexified perturbation that also belong to the values of the original perturbation. Issues of the existence of solutions under various perturbations are studied and relations between solutions are established. The primary focus is on the weakening of assumptions on the perturbation as compared to the known assumptions under which existence and relaxation theorems are valid. All our assumptions, in contrast to the known assumptions, concern the convexified rather than original perturbation.

Keywords: evolution inclusions, difference of subdifferentials, relaxation.

1. Введение

Пусть $T = [0,1]$ и H — сепарабельное гильбертово пространство. В пространстве H мы рассматриваем эволюционное включение

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) - \partial\varphi^2(x(t)) + F(t, x(t)), \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0.$$

Здесь φ^1, φ^2 — элементы пространства $\Gamma_0(H)$ всех собственных, выпуклых, полунепрерывных снизу функций из H в $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$, $\partial\varphi^1$ и $\partial\varphi^2$ — субдифференциалы функций φ^1 и φ^2, $F(t,x)$ — многозначное возмущение с замкнутыми, ограниченными значениями. Наряду с включением (1.1) мы рассматриваем включения

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) - \partial\varphi^2(x(t)) + \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x(t)), \tag{1.2}$$

$$x(0) = x_0,$$

и

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) - \partial\varphi^2(x(t)) + F(t, x(t)) \cap \mathrm{ext}\, \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x(t)), \tag{1.3}$$

$$x(0) = x_0,$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00287).

где $\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества $F(t,x)$, а $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$ — совокупность всех экстремальных (крайних) точек множества $\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$.

При $\varphi^2 \equiv 0$ исследованию эволюционных включений вида (1.1) с возмущениями $F(t,x)$, $\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$ и $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$ посвящено огромное количество работ. Основное внимание в подавляющем большинстве из них уделено вопросам существования решений и плотности множества решений включения (1.1) в множестве решений включения (1.2). В последнее время появились работы, в которых рассматриваются вопросы существования и плотности множества решений включения с возмущением $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$ в множестве решений включения с возмущением $\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$. Это свойство обычно называют "bang-bang" принципом или релаксацией для траекторий.

Следует заметить, что в общем случае $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x) \not\subset F(t,x)$ и при доказательстве "bang-bang" принципа включение (1.1) по существу остается невостребованным, так как множество $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$ однозначно определяется множеством $\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$. Поэтому более естественно называть "bang-bang" принципом плотность множества решений включения (1.3) во множестве решений включения (1.2).

При изучении эволюционных включений вида (1.1)–(1.3) в бесконечномерном пространстве существенно используется максимальная монотонность оператора $\partial\varphi^1$ в случае, когда $\varphi^2 \equiv 0$. Наличие члена $\partial\varphi^2$ принципиально усложняет задачу, так как в общем случае оператор $\partial\varphi^1 - \partial\varphi^2$ не является даже монотонным. В случае, когда $F(t,x)$ является однозначным возмущением, не зависящим от x, включение (1.1) в гильбертовом пространстве изучалось в работах [1; 2], а в банаховом — в работе [3].

Основное внимание в этих работах уделено вопросам существования решений. В настоящей работе мы рассматриваем следующие вопросы:

а) существование решений;

б) компактность множества решений включений (1.2);

в) плотность множества решений включений (1.1) и (1.3) в множестве решений включения (1.2).

Рассматривается пример. В идейном плане при доказательстве существования решения включения (1.2) мы следуем работе [2]. Однако в отличие от [2] мы не предполагаем, что $\varphi^i(x) \geq 0,\ i = 1, 2$.

2. Основные обозначения и определения

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — сепарабельное банахово пространство, $T = [0,1]$ — отрезок числовой прямой с мерой Лебега μ и с σ-алгеброй Σ – μ-измеримых подмножеств из T.

Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения: $\mathrm{c}(X)$ — семейство всех непустых, замкнутых подмножеств из X, $\mathrm{cb}(X)$ — семейство непустых, замкнутых, ограниченных подмножеств из X, $\mathrm{ccb}(X)$ — семейство всех непустых, замкнутых, ограниченных, выпуклых подмножеств из X.

Пусть X' — пространство, топологически сопряженное к X и $\langle x, x'\rangle$ — каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между X и X'.

Для множества $K \subset X,\ x' \in X',\ x' \neq 0,\ \alpha > 0$ положим

$$C(K, x') = \sup\{\langle x, x'\rangle;\ x \in K\},$$

$$C(K, x', \alpha) = \big\{x \in K;\ \langle x, x'\rangle > C(K, x') - \alpha\big\}.$$

Пусть $K \in \mathrm{ccb}(X)$ и $x \in K$. Точка x называется строго выставленной (strongly exposed), если существует элемент $x' \in X'$ такой, что $\langle x, x'\rangle > \langle y, x'\rangle$ для всех $y \in K,\ y \neq x$ и семейство множеств $\{C(K, x', \alpha);\ \alpha > 0\}$ образует в нормированной топологии базу окрестностей точки x в K.

Через $\mathrm{st}\, K$ обозначим совокупность всех строго выставленных точек множества K. Хорошо известно [4], что если K — замкнутое множество и множество $\overline{\mathrm{co}}\, K$ является слабо компактным, то

$$\mathrm{st}\ \overline{\mathrm{co}}\, K \subset K \subset \overline{\mathrm{co}}\, K, \tag{2.1}$$

$$\overline{\mathrm{co}}\ \mathrm{st}\ \overline{\mathrm{co}}\, K = \overline{\mathrm{co}}\, K. \tag{2.2}$$

Через ω-X мы обозначаем пространство X, наделенное слабой топологией. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств пространства ω-X.

Через $D_X(\cdot,\cdot)$ мы обозначим метрику Хаусдорфа на пространстве $\mathrm{cb}(X)$:

$$D_X(A,B) = \max\Big\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\Big\},$$

где $d(x,A)$ означает расстояние от точки x до множества A.

Пусть Y — метрическое пространство. Многозначное отображение $F: Y \to X$ с замкнутыми, ограниченными значениями называется непрерывным, если оно непрерывно как отображение из Y в $(\mathrm{cb}(X), D_X(\cdot,\cdot))$.

Многозначное отображение $F: Y \to X$ называется полунепрерывным снизу по Вьеторису, если для любого открытого множества $V \subset X$ множество $F^{-1}(V) = \{y \in Y;\ F(y) \cap V \neq \varnothing\}$ открыто.

Известно, что многозначное отображение $F: Y \to X$ полунепрерывно снизу по Вьеторису тогда и только тогда, когда таковым является отображение $\overline{F}: Y \to X$, где $\overline{F}(y) = \overline{F(y)}$ и $\overline{F(y)}$ означает замыкание множества $F(y)$, $y \in Y$.

Многозначное отображение $F: T \to X$ называется измеримым (слабо измеримым) [5], если множество $F^{-1}(V) = \{t \in T;\ F(t) \cap V \neq \varnothing\} \in \Sigma$ для любого замкнутого (открытого) множества $V \subset X$.

Пусть $\mathcal{B}(Y)$ — σ-алгебра борелевских множеств из Y и $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$ — σ-алгебра подмножеств из $T \times Y$, порожденная множествами $A \times B$, $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}(Y)$.

Многозначное отображение $F: T\times Y \to X$ называется $\Sigma\otimes\mathcal{B}(Y)$ измеримым (слабо $\Sigma\otimes\mathcal{B}(Y)$ измеримым), если $F^{-1}(V) = \{(t,x) \in T\times Y,\ F(t,x)\cap V \neq \varnothing\} \in \Sigma\otimes\mathcal{B}(Y)$ для любого замкнутого (открытого) множества $V \subset X$.

Множество $K \subset L^p(T,X)$, $1 \le p < \infty$ называется разложимым, если $\chi(E)u + \chi(T\backslash E)v \in K$ для любых $E \in \Sigma$, $u, v \in K$, где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция множества. Отметим, что замыкание разложимого множества является разложимым.

На пространстве $L^2(T,H)$ кроме стандартной нормы $\|\cdot\|_{L^2}$ мы рассмотрим норму

$$\|u\|_\omega = \sup_{0\le t'\le t\le 1} \left\| \int_{t'}^{t} u(s)ds \right\|, \tag{2.3}$$

которую обычно называют слабой. Пространство $L^2(T,H)$ с нормой (2.3) мы обозначаем через $L^2_\omega(T,H)$.

Через $C(T,X)$ мы обозначим пространство всех непрерывных отображений из T в X с топологией равномерной сходимости на T.

Функция $\varphi: H \to \overline{R} = (-\infty, +\infty]$ называется собственной, если ее эффективная область $\mathrm{dom}\,\varphi = \{x \in H;\ \varphi(x) < +\infty\}$ не пуста. Через $\Gamma_0(H)$ мы обозначаем множество всех функций $\varphi: H \to \overline{R}$, которые являются собственными, выпуклыми, полунепрерывными снизу.

Субдифференциал функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ в точке $x \in H$ обозначается $\partial\varphi(x)$, $\partial\varphi(x) = \{v \in H;\ \langle v, y - x\rangle \le \varphi(y) - \varphi(x)\, \forall y \in H\}$.

Известно, что $\partial\varphi$ является максимально монотонным оператором,

$$\mathrm{dom}\ \partial\varphi = \{x \in H;\ \partial\varphi(x) \neq \varnothing\} \subset \mathrm{dom}\ \varphi$$

и

$$\overline{\mathrm{dom}\,(\partial\varphi)} = \overline{\mathrm{dom}\,\varphi},$$

[6; 7], где черта означает замыкание в H.

Моро — Иосиды регуляризацией функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ является функция

$$\varphi_\lambda(x) = \inf\left\{\varphi(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y-x\|^2;\ y \in H\right\}, \quad \lambda > 0.$$

Как обычно, $W^{1,2}(T,H)$ — пространство абсолютно непрерывных функций из T в H, производные которых принадлежат пространству $L^2(T,H)$.

Определение 2.1. Функция $x(\cdot) \in W^{1,2}(T,H)$, $x(0) = x_0$ называется решением включения (1.1), если $x(t) \in \mathrm{dom}\,\partial\varphi^1$ п.в. и существуют функции $f^i(\cdot)$, $f(\cdot) \in L^2(T,H)$, $i = 1,2$, такие, что

$$-\dot{x}(t) = f^1(t) - f^2(t) + f(t) \text{ п.в.},$$

$$f^i(t) \in \partial\varphi^i(x(t)), \quad f(t) \in F(t,x(t)) \text{ п.в.}, \quad i = 1,2.$$

Аналогично определяются решения включений (1.2) и (1.3). Множества всех решений включений (1.1), (1.2) и (1.3) мы будем обозначать $\mathcal{R}_F$, $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ и $\mathcal{R}_{F\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}$ соответственно.

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе для удобства доказательств мы приведем ряд результатов, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 3.1 [6, лемма 3.3]. *Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$, $x(\cdot) \in W^{1,2}(T,H)$ и существуют $g(\cdot) \in L^2(T,H)$, $g(t) \in \partial\varphi(x(t))$ п.в. Тогда функция $t \to \varphi(x(t))$ абсолютно непрерывна и*

$$\dot{\varphi}(x(t)) = \langle g(t), \dot{x}(t)\rangle \text{ п.в.}$$

Лемма 3.2 [8]. *Если последовательность $f_n(\cdot) \in L^2(T,H)$, $n \geq 1$, ограничена в $L^2(T,H)$ и сходится к $f(\cdot)$ в $L^2_\omega(T,H)$, то она сходится к $f(\cdot)$ в ω-$L^2(T,H)$.*

Лемма 3.3. *Пусть $F : T \to c(H)$, отображение $t \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t)$ измеримо и*

$$\|\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t)\| = \sup\{\|v\|;\ v \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t)\} \leq m(t) \text{ п.в.},$$

где $m(\cdot) \in L^2(T,\mathbb{R}^+)$. Тогда существует измеримое отображение $F^* : T \to c(H)$ такое, что $F^*(t) \subset F(t)$, $\overline{\mathrm{co}}\,F^*(t) = \overline{\mathrm{co}}\,F(t)$ п.в.

Доказательство. Пусть

$$S_{\overline{\mathrm{co}}\,F} = \{f(\cdot) \in L^2(T,H);\ f(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t) \text{ п.в.}\}.$$

Тогда $S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ является непустым, разложимым, выпуклым, компактным подмножеством пространства ω-$L^2(T,H)$. Поэтому множество $\mathrm{st}\,S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ строго выставленных точек $S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ будет непустым и

$$\overline{\mathrm{co}}\ \mathrm{st}\,S_{\overline{\mathrm{co}}\,F} = S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}. \tag{3.1}$$

Согласно [9, теорема 2.1] точка $f(\cdot) \in \mathrm{st}\,S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$ тогда и только тогда, когда

$$f(t) \in \mathrm{st}\ \overline{\mathrm{co}}\,F(t) \text{ п.в.} \tag{3.2}$$

Пусть $\{f_n(\cdot),\ n \geq 1\}$ — счетное, плотное в топологии $L^2(T,H)$ подмножество множества $\mathrm{st}\,S_{\overline{\mathrm{co}}\,F}$. Положим

$$F^*(t) = \left\{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(t)}\right\}, \quad t \in T,$$

где черта означает замыкание в H. Тогда отображение $F^*: T \to c(H)$ является измеримым. Из (3.2), (2.1) вытекает, что $f_n(t) \in F(t)$ п.в., $n \geq 1$. Поэтому

$$F^*(t) \subset F(t) \text{ п.в.}$$

и $f(t) \in F^*(t)$ п.в. для любого $f(\cdot) \in \operatorname{st} S_{\overline{\mathrm{co}}\, F}$. Из этих включений следует, что

$$\operatorname{st} S_{\overline{\mathrm{co}}\, F} \subset S_{\overline{\mathrm{co}}\, F^*} \subset S_{\overline{\mathrm{co}}\, F}.$$

Так как множества $S_{\overline{\mathrm{co}}\, F^*}$ и $S_{\overline{\mathrm{co}}\, F}$ выпуклы и замкнуты, то из этих включений и (3.1) вытекает $S_{\overline{\mathrm{co}}\, F^*} = S_{\overline{\mathrm{co}}\, F}$. Поэтому [10]

$$\overline{\mathrm{co}}\, F^*(t) = \overline{\mathrm{co}}\, F(t) \text{ п.в.}$$

Лемма доказана.

Следующие результаты хорошо известны [7; 8 и др.].

Лемма 3.4. *Пусть* $\varphi \in \Gamma_0(H)$. *Тогда*:

(1) φ_λ *является конечной, непрерывной, выпуклой и дифференцируемой по Гато функцией с* $\operatorname{dom} \partial\varphi_\lambda = H$;

(2) $\|\partial\varphi_\lambda(x) - \partial\varphi_\lambda(y)\| \leq \|x - y\|/\lambda$, $\lambda > 0$, $x, y \in H$;

(3) *существует константа* $L > 0$ *такая, что*

$$-L(\|x\| + 1) \leq \varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x),$$

$x \in H$, $\lambda > 0$ *и* $\varphi_\lambda(x) \uparrow \varphi(x)$ *при* $\lambda \downarrow 0$;

(4) $\|\partial\varphi_\lambda(x)\| \leq \|\partial\varphi^0(x)\|$, $\lambda > 0$ *и* $\partial\varphi_\lambda(x) \to \partial\varphi^0(x)$ *в* H *при* $\lambda \downarrow 0$, $x \in \operatorname{dom} \partial\varphi$, *где* $\partial\varphi^0(x)$ — *единственный элемент минимальной нормы множества* $\partial\varphi(x)$, *который существует в силу замкнутости и выпуклости множества* $\partial\varphi(x)$, $x \in \operatorname{dom} \partial\varphi$;

(5) *если* $x_n \in \operatorname{dom} \partial\varphi$, $v_n \in \partial\varphi(x_n)$, $n \geq 1$ *и* $x_n \to x$ *в* H, $v_n \to v$ *в* ω-H, *то* $v \in \partial\varphi(x)$;

(6) *если* $\lambda_n \downarrow 0$, $x_{\lambda_n} \to x$ *в* H *и* $\partial\varphi_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}) \to x^*$ *в* ω-H, *то* $x^* \in \partial\varphi(x)$.

Лемма 3.5 [6; 7]. *Пусть* $\varphi \in \Gamma_0(H)$, $x(\cdot) \in L^2(T, H)$ *и*

$$\Phi(x(\cdot)) = \begin{cases} \displaystyle\int_T \varphi(x(t))\, dt, \ \textit{если}\ \varphi(x)(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}), \\ +\infty \ \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Тогда:

(1) $\Phi(\cdot) \in \Gamma_0(L^2(T, H))$;

(2) $$\Phi_\lambda(x(\cdot)) = \int_T \varphi_\lambda(x(t))\, dt, \ \lambda > 0; \tag{3.4}$$

(3) *если* $v(\cdot) \in L^2(T, H)$, *то* $v(\cdot) \in \partial\Phi(x(\cdot))$ *тогда и только тогда, когда* $v(t) \in \partial\varphi(x(t))$ *п.в.*;

(4) $\partial\Phi_\lambda(x)(t) = \partial\varphi_\lambda(x(t))$ *п.в.*, $\lambda > 0$.

4. Априорные оценки

Для доказательства существования решений включений (1.1)–(1.3) сделаем следующие предположения.

Гипотезы $H(\varphi)$:

(1) $\varphi^1, \varphi^2 \in \Gamma_0(H)$, $\operatorname{dom} \partial\varphi^1 \subset \operatorname{dom} \partial\varphi^2$;

(2) для любого $r > 0$ множество $\{x \in H; \|x\| \leq r, |\varphi^1(x)| \leq r\}$ относительно компактно в H;

(3) существуют $0 \leq k_1, k_2 < 1$ и неубывающая функция $\eta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что

$$\|\partial\varphi^{2^0}(x)\| \leq k_1 \|\partial\varphi^{1^0}(x)\| + \eta(|\varphi^1(x)| + |\varphi^2(x)| + \|x\|), \quad x \in \operatorname{dom} \partial\varphi^1;$$

(4) $\varphi^2(x) \le k_2\varphi^1(x) + C,\ C \ge 0,\quad x \in \mathrm{dom}\,\varphi^1$;

(5) $x_0 \in \mathrm{dom}\,\varphi^1$;

(6) для любого $r > 0$ существует неубывающая функция $\eta_r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для любых $x, y \in \mathrm{dom}\,\partial\varphi^1,\ \|x\| \le r,\ \|y\| \le r$ и любых $v \in \partial\varphi^2(x),\ w \in \partial\varphi^2(y)$ будет иметь место неравенство

$$\langle x - y, v - w\rangle \le \eta_r\left(|\varphi^1(x)| + |\varphi^1(y)|\right)\|x - y\|^2.$$

Гипотезы $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$. Отображение $F : T \times \mathrm{dom}\,\varphi^1 \to \mathrm{cb}(H)$ таково, что

(1) отображение $t \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)$ измеримо;

(2) отображение $x \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)$ непрерывно;

(3) $\|\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)\| = \sup\{\|v\|;\ v \in \mathrm{co}F(t, x)\} \le m(t) + n(t)\|x\|$ п.в., $m(\cdot), n(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$;

(4) для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathrm{dom}\,\varphi^1$ существует функция $l_{\mathcal{K}} \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что для любых $x, y \in \mathcal{K},\ v \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x)$ найдется элемент $u \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, y)$, удовлетворяющий неравенству $\langle x - y, v - u\rangle + l_{\mathcal{K}}(t)\|x - y\|^2 \ge 0$ п.в.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(\varphi)$ (1)–(5) *и* $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3). *Тогда существует константа* $M > 0$ *такая, что для любого* $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ *будут иметь место неравенства*

$$\|x(t)\| \le M, \quad t \in T, \quad \|\dot{x}\|_{L^2(T,H)} \le M, \tag{4.1}$$

$$|\varphi^i(x(t))| \le M, \quad t \in T, \quad i = 1, 2. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$. Тогда существуют $f^i,\ f \in L^2(T, H),\ i = 1, 2$, такие, что

$$f^i(t) \in \partial\varphi^i(x(t)),\ f(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x(t)) \text{ п.в.}$$

и

$$-\dot{x}(t) = f^1(t) - f^2(t) + f(t) \text{ п.в.} \tag{4.3}$$

Умножив (4.3) на $\dot{x}(t)$ и воспользовавшись леммой 3.1, мы получим

$$\|\dot{x}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\varphi^1(x(t)) - \frac{d}{dt}\varphi^2(x(t)) = -\langle f(t), \dot{x}(t)\rangle \text{ п.в.} \tag{4.4}$$

Согласно утверждению (3) леммы 3.4

$$-\varphi^i(x(t)) \le L(\|x(t)\| + 1), \quad i = 1, 2. \tag{4.5}$$

Тогда из (4.4), (4.5) и гипотезы $H(\varphi)$ (4) вытекает

$$\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2\,ds + (1 - k_2)\varphi^1(x(t)) \le C_1 + \int_0^t \|\dot{x}(s)\| \cdot \|f(s)\|\,ds, \tag{4.6}$$

где

$$C_1 = |\varphi^1(x_0)| + C + L(\|x_0\| + 1). \tag{4.7}$$

Воспользовавшись (4.5), (4.6) и неравенством Коши $ab \le \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2},\ a, b \ge 0$, мы получим

$$\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2\,ds \le 2C_1 + 2(1 - k_2)L(\|x(t)\| + 1) + \int_0^t \|f(s)\|^2\,ds. \tag{4.8}$$

Из этого неравенства, неравенства

$$\|x(t)\|^2 \le 2\|x_0\|^2 + 2\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2\,ds$$

и неравенства Коши, примененного к члену $4(1-k_2)L\|x(t)\|$, вытекает

$$\|x(t)\|^2 \le C_2 + 4\int\limits_0^t \|f(s)\|^2\,ds, \tag{4.9}$$

где

$$C_2 = 4\|x_0\|^2 + 8C_1 + 8(1-k_2)L + (4(1-k_2)L)^2. \tag{4.10}$$

Воспользовавшись (4.9), гипотезой $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (3), мы получим

$$\|x(t)\|^2 \le C_2 + 8\int\limits_0^t m^2(s)\,ds + 8\int\limits_0^t n^2(s)\|x(s)\|^2\,ds. \tag{4.11}$$

Из неравенства (4.11) и неравенства Беллмана — Гронуолла вытекает, что существует $M_1>0$ такое, что

$$\|x(t)\| \le M_1, \quad t\in T. \tag{4.12}$$

Из (4.8), (4.12) и гипотезы $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (3) мы получим, что

$$\|\dot x\|_{L^2(T,H)} \le M_2 \tag{4.13}$$

при некотором $M_2>0$. Из неравенств (4.5), (4.6), (4.12), (4.13) и гипотезы $H(\varphi)$ (4) следует, что

$$|\varphi^i(x(t))| \le M_3, \quad t\in T, \quad i=1,2, \tag{4.14}$$

при некотором $M_3>0$. Объединяя неравенства (4.12)–(4.14), мы приходим к неравенствам (4.1), (4.2). Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi)$ (1)–(5) и $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3). Тогда $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ является непустым подмножеством пространства $C(T,H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим при $\lambda>0$ включение

$$-x_\lambda(t) \in \partial\varphi^1(x_\lambda(t)) - \partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t)) + \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x_\lambda(t)) \text{ п.в.}, \tag{4.15}$$

$$x_\lambda(0)=x_0.$$

Решение включения (4.15) определяется аналогично решению включения (1.1). Так как функция $x\to\partial\varphi^2_\lambda(x)$ является липшицевой, то существование решения включения (4.15) вытекает из существования решений включения

$$-\dot x(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) + \tilde F(t,x(t)) \text{ п.в.},$$

$$x(0)=x_0,$$

где $\tilde F(t,x(t)) = -\partial\varphi^2_\lambda(x(t)) + \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x(t))$. Существование решения этого включения хорошо известно, так как с учетом утверждения (2) леммы 3.4 отображение $\tilde F$ удовлетворяет гипотезам, аналогичным гипотезам $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3), и имеет место гиплтеза $H(\varphi)$ (2). Из (4.15) по аналогии с (4.4) мы получим

$$\|\dot x_\lambda(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\varphi^1(x_\lambda(t)) - \frac{d}{dt}\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t)) = -\langle f_\lambda(t), \dot x_\lambda(t)\rangle \text{ п.в.}, \tag{4.16}$$

где

$$f_\lambda(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x_\lambda(t)) \text{ п.в.} \tag{4.17}$$

Дословно повторяя доказательство теоремы 4.1 с использованием (4.16), (4.17) и неравенства в утверждении (3) леммы 3.4, мы получим, что при той же по величине константе $M > 0$, которая фигурирует в (4.1), (4.2), будут справедливы неравенства

$$\|x_\lambda(t)\| \le M, \quad t \in T, \quad \|\dot{x}_\lambda\|_{L^2(T,H)} \le M, \quad \lambda > 0, \tag{4.18}$$

$$|\varphi^i(x_\lambda(t))| \le M, \quad t \in T, \quad i = 1, 2, \quad \lambda > 0. \tag{4.19}$$

Пусть

$$f^1_\lambda(t) = -\dot{x}_\lambda(t) + \partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t)) - f_\lambda(t). \tag{4.20}$$

Так как

$$f^1_\lambda(t) \in \partial\varphi^1(x_\lambda(t)) \text{ п.в.}, \tag{4.21}$$

то из леммы 3.4 (4) и гипотезы $H(\varphi)$ (3), (4.20), (4.21) вытекает, что

$$\|\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t))\| \le k_1(\|\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda(t))\| + \|\dot{x}_\lambda(t)\| + \|f_\lambda(t)\|) + \eta\Big(\sum_{i=1}^{2}|\varphi^i(x_\lambda(t))| + \|x_\lambda(t)\|\Big). \tag{4.22}$$

Воспользовавшись гипотезой $H(\overline{\text{co}}\, F)$ (3), (4.17)–(4.19), (4.22), (4.20), мы получим, что

$$\|\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda)\|_{L^2(T,H)} \le N, \quad \lambda > 0, \tag{4.23}$$

$$\|f_\lambda\|_{L^2(T,H)} \le N, \quad \lambda > 0, \tag{4.24}$$

$$\|f^1_\lambda\|_{L^2(T,H)} \le N, \quad \lambda > 0 \tag{4.25}$$

при некотором $N > 0$. Из (4.18), (4.19), гипотезы $H(\varphi)$ (2) и теоремы Арцела — Асколи следует, что множество $\{x_\lambda;\, \lambda > 0\}$ относительно компактно в пространстве $C(T, H)$, а множество $\{\dot{x}_\lambda;\, \lambda > 0\}$ относительно компактно в пространстве ω-$L^2(T, H)$.

Аналогично из (4.23)–(4.25) вытекает, что множества $\{\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda); \lambda > 0\}$, $\{f_\lambda;\, \lambda > 0\}$, $\{f^1_\lambda;\, \lambda > 0\}$ относительно компактны в пространстве ω-$L^2(T, H)$. Поэтому существуют последовательность $\lambda_n \downarrow 0$ и функции $x \in W^{1,2}(T, H)$, f^1, f^2, $f \in L^2(T, H)$ такие, что

$$x_{\lambda_n} \to x \text{ в } C(T, H), \tag{4.26}$$

$$\dot{x}_{\lambda_n} \to \dot{x} \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H), \tag{4.27}$$

$$f^1_{\lambda_n} \to f^1 \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H), \tag{4.28}$$

$$\partial\varphi^2_\lambda(x_\lambda) \to f^2 \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H), \tag{4.29}$$

$$f_{\lambda_n} \to f \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H). \tag{4.30}$$

Из (4.20), (4.27)–(4.30) вытекает равенство

$$-\dot{x}(t) = f^1(t) - f^2(t) + f(t) \text{ п.в.} \tag{4.31}$$

Пусть Φ^i, $\Phi^i_\lambda : L^2(T, H) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $\lambda > 0$, — функции, определенные равенствами (3.3), (3.4), в которых функции φ, φ_λ заменены на функции φ^i, φ^i_λ, $i = 1, 2$, $\lambda > 0$. Тогда, воспользовавшись (4.21), (4.26)–(4.29), утверждениями (5), (6) в лемме 3.4 применительно к функциям Φ^i, $i = 1, 2$, мы получим $f^i \in \partial\Phi^i(x)$, $i = 1, 2$. Теперь из леммы 3.5 (3) вытекает, что

$$f^i(t) \in \partial\varphi^i(x(t)) \text{ п.в.}, \quad i = 1, 2. \tag{4.32}$$

Из (4.19), (4.26) и неравенства

$$\varphi^1(x(t)) \le \varliminf_{n\to\infty} \varphi^1(x_{\lambda_n}(t)) \le M, \quad t \in T,$$

следует, что $x(t) \in \operatorname{dom}\varphi^1$, $t \in T$. Так как $f_{\lambda_n}(t) \in \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x_{\lambda_n}(t))$ п.в., $n \geq 1$, то из гипотез $H(\overline{\mathrm{co}}\, F)$ (1), (2), (4.26), (4.30) и теоремы Мазура для слабо сходящихся последовательностей [11] вытекает включение

$$f(t) \in \bigcap_{k\geq 1} \overline{\mathrm{co}} \Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x_{\lambda_n}(t)) \Big) \in \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x(t)) \text{ п.в.}$$

Из этого включения и (4.31), (4.32) следует, что $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0)$. Теорема доказана.

5. Существование решений

Как было установлено в теореме 4.2, при выполнении гипотез $H(\varphi)$ (1)–(5) и $H(\overline{\mathrm{co}}\, F)$ (1)–(3) множество $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0)$ не пусто. Согласно теореме 4.1 для любого $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0)$ справедливы неравенства (4.1). Поэтому, не нарушая общности, мы можем считать, что вместо неравенства в гипотезе $H(\overline{\mathrm{co}}\, F)$ (3) многозначное отображение $\overline{\mathrm{co}}\, F(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\| \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x)\| \leq m(t) + n(t)M \text{ п.в.}, \quad x \in \operatorname{dom}\varphi^1. \tag{5.1}$$

Пусть

$$U(t) = \{u \in H;\ \|u\| \leq m(t) + n(t)M \text{ п.в.}\}, \tag{5.2}$$

$$S_U = \{u \in L^2(T, H);\ u(t) \in U(t) \text{ п.в.}\}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) - \partial\varphi^2(x(t)) + U(t), \tag{5.4}$$

$$x(0) = x_0 \in \operatorname{dom}\varphi^1.$$

Решение включения (5.4) определяется аналогично решению включения (1.1). Пусть $\mathcal{R}_U(x_0)$ — множество решений включения (5.4). Так как отображение $t \to U(t)$ является измеримым с замкнутыми, выпуклыми значениями, то из теоремы 4.2 непосредственно вытекает, что включение (5.4) имеет решение. Более того, любое решение включения (5.4) является решением включения

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^1(x(t)) - \partial\varphi^2(x(t)) + u(t) \tag{5.5}$$

при некотором $u \in S_U$, а любое решение включения (5.5) при $u \in S_U$ является решением включения (5.4). Повторяя доказательство теоремы 4.1, мы получим, что существует $N > 0$ такое, что

$$\|x(t)\| \leq N, \quad t \in T, \quad \|\dot{x}\|_{L^2(T,H)} \leq N, \tag{5.6}$$

$$|\varphi^i(x(t))| \leq N, \quad t \in T, \tag{5.7}$$

для любого $x \in \mathcal{R}_U(x_0)$.

Лемма 5.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(\varphi)$. *Тогда для любого* $u \in S_U$ *включение* (5.5) *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in S_U$ и x_i, $i = 1, 2$, — решения включения (5.5), соответствующие u. Из определения решения следует, что существуют $f_i^2 \in L^2(T, H)$, $f_i^2(t) \in \partial\varphi^2(x(t))$ п.в., $i = 1, 2$, при которых имеют место включения

$$-\dot{x}_i(t) \in \partial\varphi^1(x_i(t)) - f_i^2(t) + u(t) \text{ п.в.}, \quad i = 1, 2. \tag{5.8}$$

Так как $x_i \in \mathcal{R}_U(x_0)$, $x_i(t) \in \operatorname{dom}\partial\varphi^1$ п.в., $i = 1, 2$, то из (5.6), (5.7) и гипотезы $H(\varphi)$ (6) следует, что существует константа $L_N > 0$, $L_N \geq \eta_N(|\varphi^1(x_1(t))| + |\varphi^1(x_2(t))|)$, при которой будет иметь место неравенство

$$\langle x_1(t) - x_2(t), f_1^2(t) - f_2^2(t)\rangle \leq L_N \|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \text{ п.в.} \tag{5.9}$$

Воспользовавшись (5.8), (5.9) и монотонностью оператора $\partial\varphi^1$, мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|x_1(t)-x_2(t)\|^2 \leq \int\limits_0^t L_N\|x_1(s)-x_2(s)\|^2\,ds, \quad t\in T.$$

Из этого неравенства вытекает, что $x_1(t)=x_2(t),\ t\in T$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{L}$ оператор, который каждому $u\in S_U$ ставит в соответствие единственное решение x включения (5.5), т. е.

$$x=\mathcal{L}(u). \tag{5.10}$$

Лемма 5.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi)$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ является непрерывным из ω-S_U в $C(T,H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как S_U является выпуклым, метризуемым компактом в пространстве ω-$L^2(T,H)$, то нам достаточно доказать секвенциальную непрерывность оператора $\mathcal{L}$. Пусть $u_n\in S_U,\ n\geq 1$, сходится к u в пространстве ω-$L^2(T,H)$ и $x_n=\mathcal{L}(u_n),\ x=\mathcal{L}(u),\ n\geq 1$. Поскольку $x_n,x\in\mathcal{R}_U(x_0),\ n\geq 1$, то для них будут иметь место неравенства (5.6), (5.7). Воспользовавшись (5.5)–(5.7), гипотезой $H(\varphi)$ (6), по аналогии с доказательством леммы 5.1 мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|x_n(t)-x(t)\|^2 \leq \int\limits_0^t L_N\|x_n(s)-x(s)\|^2\,ds+\int\limits_0^t\langle x_n(s)-x(s),u(s)-u_n(s)\rangle ds, \quad t\in T. \tag{5.11}$$

Из неравенств (5.6), (5.7) и гипотезы $H(\varphi)$ (2) вытекает, что последовательность x_n, $n\geq 1$, относительно компактна в пространстве $C(T,H)$. Пусть $x_{n_k},\ k\geq 1$, — подпоследовательность последовательности $x_n,\ n\geq 1$, которая сходится к y в $C(T,H)$. Заменяя в (5.11) n на n_k и переходя к пределу при $k\to\infty$, мы получим

$$\frac{1}{2}\|y(t)-x(t)\|^2 \leq \int\limits_0^t L_N\|y(s)-x(s)\|^2\,ds.$$

Из этого неравенства вытекает, что $y(t)=x(t),\ t\in T$. Таким образом, мы показали, что если $u_n\to u$ в ω-$L^2(T,H)$, то существует подпоследовательность $x_{n_k}=\mathcal{L}(u_{n_k}),\ k\geq 1$, последовательности $x_n=\mathcal{L}(u_n),\ n\geq 1$, которая сходится к $x=\mathcal{L}(u)$. Если мы предположим, что сама последовательность $x_n,\ n\geq 1$, не сходится к x, то, используя единственность решения включения (5.5) с помощью хорошо известных аргументов, мы придем к противоречию. Следовательно, $x_n=\mathcal{L}(u_n),\ n\geq 1$, сходится к $x=\mathcal{L}(u)$ в $C(T,H)$ при $u_n\to u$ в пространстве ω-$L^2(T,H)$. Лемма доказана.

Следствие 5.1. *Множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T,H)$.*

Следствие вытекает из леммы 5.2 и компактности множества S_U в пространстве ω-$L^2(T,H)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi)$, $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3). Тогда множества $\mathcal{R}_{F\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$, $\mathcal{R}_F(x_0)$, $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ не пусты и множество $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ является компактом в $C(T,H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непустота множества $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ была доказана в теореме 4.2. Поэтому нам достаточно доказать непустоту множества $\mathcal{R}_{F\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$. Из (4.1), (5.1), (5.2), (5.4) следует, что

$$\mathcal{R}_{F\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)\subset\mathcal{R}_F(x_0)\subset\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)\subset\mathcal{R}_U(x_0). \tag{5.12}$$

Пусть

$$\Gamma(x)=\big\{f\in L^2(T,H);\ f(t)\in\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x(t))\ \text{п.в.}\big\}, \tag{5.13}$$

$x \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Используя гипотезы $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1)–(3), (5.1) и следствие 5.1 по аналогии с доказательством утверждения 8.1 в [12], мы получим, что значениями отображения $\Gamma(x)$ являются выпуклые, слабокомпактные, разложимые множества из $L^2(T,H)$ и отображение $\Gamma : \mathcal{R}_U(x_0) \to \mathrm{cb}\,L^2(T,H)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа на пространстве $\mathrm{cb}\,L^2(T,H)$. Поскольку отображение $t \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x(t))$ измеримо, то согласно лемме 3.3 существует измеримое отображение $F^*(x) : T \to c(H)$, $x \in \mathcal{R}_U(x_0)$ такое, что

$$F^*(x)(t) \subset F(t,x(t)), \quad \overline{\mathrm{co}}\,F^*(x)(t) = \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x(t)) \text{ п.в.} \tag{5.14}$$

Пусть

$$\Gamma^*(x) = \bigl\{f \in L^2(T,H);\ f(t) \in F^*(x)(t) \text{ п.в.}\bigr\}, \quad x \in \mathcal{R}_U(x_0). \tag{5.15}$$

Тогда $\Gamma^*(x)$ является замкнутым, разложимым подмножеством пространства $L^2(T,H)$. Из (5.1), (5.13)–(5.15) и теоремы 1.5 в [10] вытекает, что

$$\Gamma(x) = \overline{\mathrm{co}}\,\Gamma^*(x), \quad x \in \mathcal{R}_U(x_0). \tag{5.16}$$

Воспользовавшись (5.16) и теоремой 0.2 в [12], мы получим, что существует непрерывное отображение $g : \mathcal{R}_U(x_0) \to L^2(T,H)$ такое, что

$$g(x) \in \Gamma^*(x) \cap \mathrm{ext}\,\Gamma(x).$$

Из этого включения, следствия 5.2 в [12] и (5.13)–(5.15) вытекает, что

$$g(x)(t) \in F(t,x(t)) \cap \mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x(t)) \text{ п.в.}, \tag{5.17}$$

$x \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Пусть $\mathcal{A} : S_U \to L^2(T,H)$ — оператор, определенный по правилу $\mathcal{A}(u) = g(\mathcal{L}(u))$, где $\mathcal{L}$ — оператор, который каждому $u \in S_U$ ставит в соответствие единственное решение $x = \mathcal{L}(u) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ включения (5.5). Из леммы 5.2, (5.1), равенства $\mathcal{L}(S_U) = \mathcal{R}_U(x_0)$ следует, что оператор $\mathcal{A}$ является непрерывным из ω-S_U в ω-S_U. Так как ω-S_U является выпуклым компактом, то по теореме Шаудера о неподвижной точке существует элемент $u_* \in S_U$ такой, что

$$u_* = \mathcal{A}(u_*) = g(\mathcal{L}(u_*)). \tag{5.18}$$

Положим $x_* = \mathcal{L}(u_*)$. Тогда из (5.17), (5.18) следует, что

$$u_*(t) \in F(t,x_*(t)) \cap \mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F(t,x_*(t)) \text{ п.в.}$$

Тем самым x_* является решением включения (1.3). Следовательно, множества $\mathcal{R}_{F\cap \mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$, $\mathcal{R}_F(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ не пусты.

Так как $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0) \subset \mathcal{R}_U(x_0)$ и в соответствии со следствием 5.1 множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ — компакт в $C(T,H)$, то для доказательства компактности множества $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ нам достаточно доказать его замкнутость. Пусть $x_n \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$, $n \geq 1$, сходится к x в $C(T,H)$. Тогда $x_n = \mathcal{L}(u_n)$, $u_n \in S_U$, $n \geq 1$,

$$u_n(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x_n(t)) \text{ п.в.}, \quad n \geq 1. \tag{5.19}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $u_n \to u \in S_U$ в пространстве ω-$L^2(T,H)$. Согласно лемме 5.2

$$x = \mathcal{L}(u). \tag{5.20}$$

Тогда из гипотез $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (1), (2) и (5.19) по аналогии с доказательством теоремы 4.2 мы получаем

$$u(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x_k(t)) \right) \subset \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x(t)) \text{ п.в.}$$

Из этого включения и (5.20) следует, что $x \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$. Тем самым множество $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ замкнуто в $C(T,H)$. Теорема доказана.

6. Плотность

В этом разделе мы докажем основной результат настоящей работы.

Теорема 6.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(\varphi)$, $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$. *Тогда для любого* $x_* \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ *существует последовательность* $x_n \in \mathcal{R}_{F\cap \mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$, $n \geq 1$, *сходящаяся к* x_* *в пространстве* $C(T,H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_* \in \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$. Тогда $x_* \in \mathcal{R}_U(x_0)$ и $x_* = \mathcal{L}(u_*)$,

$$u_*(t) \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t, x_*(t)) \text{ п.в.} \tag{6.1}$$

Согласно следствию 5.1 множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ является компактом в $C(T,H)$ и $x(t) \in \mathrm{dom}\,\varphi^1$, $t \in T$ для любого $x \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Поэтому множество $\mathcal{K} = \{x(t);\ x \in \mathcal{R}_U(x_0),\ t \in T\}$ является компактом в H и $\mathcal{K} \subset \mathrm{dom}\,\varphi^1$. Тогда из гипотезы $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$ (4) вытекает, что существует функция $l_{\mathcal{K}} \in L^1(T,\mathbb{R}^+)$ такая, что для любого $y \in \mathcal{K}$ найдется элемент $v \in \overline{\mathrm{co}}\,F(t,y)$, удовлетворяющий неравенству

$$\langle x_*(t) - y, u_*(t) - v\rangle + l_{\mathcal{K}}(t)\|x_*(t) - y\|^2 \geq 0. \tag{6.2}$$

Рассмотрим функцию

$$p(t,y,u) = \langle x_*(t) - y, u_*(t) - u\rangle + l_{\mathcal{K}}(t)\|x_*(t) - y\|^2, \quad t \in T, \quad y \in \mathcal{K}, \quad u \in H, \tag{6.3}$$

которая очевидно является измеримой по t и непрерывной по (y,u) на $\mathcal{K} \times H$. Воспользовавшись теоремой 6.1 в [5] и гипотезами $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$, мы получим, что для любого $z \in H$ функция $(t,x) \to d(z, \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x))$, $x \in \mathcal{K}$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ измеримой. Тогда в соответствии с теоремой 3.5 в [5] отображение $(t,x) \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t,x)$, $x \in \mathcal{K}$, является слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ измеримым. Поэтому из теоремы 2.4 в [13] вытекает, что существует последовательность замкнутых множеств $T_k \subset T_{k+1} \subset \ldots \subset T$, $k \geq 0$, $\mu\,(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) = 0$ такая, что отображение $(t,y) \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t,y)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times \mathcal{K}$, а функция $(t,y,u) \to p(t,y,u)$ непрерывна на $T_k \times \mathcal{K} \times H$.

Рассмотрим многозначное отображение $V_n : T \times \mathcal{K} \to H$, определенное по правилу

$$V_n(t,y) = \Big\{u \in H;\ p(t,y,u) + \frac{1}{n} > 0\Big\}. \tag{6.4}$$

Очевидно, что для каждого $k \geq 1$ график сужения $V_n(t,y)$ на $T_k \times \mathcal{K}$ является открытым множеством в пространстве $T_k \times \mathcal{K} \times H$. Положим

$$F_n(t,y) = \overline{\mathrm{co}}\,F(t,y) \cap V_n(t,y), \quad t \in T, \quad y \in \mathcal{K}. \tag{6.5}$$

Из (6.2)–(6.4) следует, что для каждого $t \in T_k$, $k \geq 1$, $y \in \mathcal{K}$ множество $F_n(t,y)$ не пусто. Так как отображение $(t,y) \to \overline{\mathrm{co}}\,F(t,y)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису на $T_k \times \mathcal{K}$ и график сужения отображения $(t,y) \to V_n(t,y)$ на $T_k \times \mathcal{K}$ есть открытое подмножество в пространстве $T_k \times \mathcal{K} \times H$, то отображение $(t,y) \to F_n(t,y)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису на $T_k \times \mathcal{K}$, $k \geq 1$. Таковым будет и отображение $(t,y) \to \overline{F_n(t,y)}$, где черта означает замыкание в H. Из (6.5) и (6.4) следует, что

$$\overline{F_n}(t,y) = \overline{F_n(t,y)} \subset \overline{\mathrm{co}}\,F(t,y) \text{ п.в.}, \quad y \in \mathcal{K}, \tag{6.6}$$

$$p(t,y,u) + \frac{1}{n} \geq 0 \text{ п.в.}, \quad y \in \mathcal{K}, \quad u \in \overline{F_n}(t,y). \tag{6.7}$$

Так как $\mu(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) = 0$, то из свойств отображения $\overline{F_n}(t,y)$, установленных выше, следует, что для любой функции $x \in \mathcal{R}_U(x_0)$ отображение $t \to \overline{F_n}(t,x(t))$ слабо измеримо, а отображение $x \to \overline{F_n}(t,x)$, $x \in \mathcal{K}$ полунепрерывно снизу по Вьеторису при почти всех $t \in T$. Поэтому на $\mathcal{R}_U(x_0)$ мы можем определить многозначное отображение

$$\Gamma_n(x) = \big\{v \in L^2(T,H);\ v(t) \in \overline{F_n(t,x(t))} \text{ п.в.}\big\}, \tag{6.8}$$

значениями которого являются непустые, замкнутые, разложимые множества из $L^2(T,H)$. Используя хорошо известные аргументы [12; 14 и др.], можно показать, что отображение $\Gamma_n : \mathcal{R}_U(x_0) \to L^2(T,H)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису. Тогда существует непрерывное отображение [12, 14] $g_n : \mathcal{R}_U(x_0) \to L^2(T,H)$ такое, что

$$g_n(x) \in \Gamma_n(x) \subset \Gamma(x), \quad x \in \mathcal{R}_U(x_0), \tag{6.9}$$

где Γ — отображение, определенное равенством (5.13). Из (6.3)–(6.5), (6.8), (6.9) вытекает, что

$$\langle x_*(t) - x(t), u_*(t) - g_n(x)(t)\rangle + l_{\mathcal{K}}(t)\|x_*(t) - x(t)\|^2 + \frac{1}{n} \geq 0 \text{ п.в.}, \tag{6.10}$$

$x \in \mathcal{R}_U(x_0)$.

Пусть $\Gamma^*(x)$ — отображение, определенное равенством (5.15), значениями которого являются замкнутые, разложимые множества в пространстве $L^2(T,H)$. Это отображение удовлетворяет равенству (5.16). Тогда из следствия 6.2 в [15] вытекает, что существует непрерывная функция $q_n : \mathcal{R}_U(x_0) \to L^2(T,H)$ такая, что

$$q_n(x) \in \Gamma^*(x) \cap \operatorname{ext}\Gamma(x), \tag{6.11}$$

$$\|g_n(x) - q_n(x)\|_\omega \leq \frac{1}{n}, \quad x \in \mathcal{R}_U(x_0), \tag{6.12}$$

где $\|\cdot\|_\omega$ — норма (2.3). Из (5.13)–(5.15), (6.11) вытекает, что

$$q_n(x)(t) \in F(t,x(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\, F(t,x(t)) \text{ п.в.}, \tag{6.13}$$

$x \in \mathcal{R}_U(x_0)$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_n : S_U \to L^2(T,H)$, определенный по правилу

$$\mathcal{A}_n(u) = q_n(\mathcal{L}(u)), \quad u \in S_U, \quad n \geq 1.$$

По аналогии с доказательством теоремы 5.1 мы получим, что существует неподвижная точка $u_n \in S_U$ оператора $\mathcal{A}_n$, т. е.

$$u_n = \mathcal{A}_n(u_n) = q_n(\mathcal{L}(u_n)), \quad n \geq 1. \tag{6.14}$$

Положим

$$x_n = \mathcal{L}(u_n), \quad n \geq 1. \tag{6.15}$$

Тогда из (6.13)–(6.15) следует, что

$$u_n(t) \in F(t,x_n(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\, F(t,x_n(t)) \text{ п.в.}, \quad n \geq 1.$$

Тем самым x_n, $n \geq 1$, является решением включения (1.3). Так как $x_*, x_n \in \mathcal{R}_U(x_0)$, $n \geq 1$, то используя гипотезу $H(\varphi)$ (6), (5.6), (5.7), как и при доказательстве леммы 5.2, мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|x_n(t) - x_*(t)\|^2 \leq \int\limits_0^t L_N\|x_n(s) - x_*(s)\|^2\,ds + \int\limits_0^t \langle x_n(s) - x_*(s), u_*(s) - u_n(s)\rangle ds, \quad n \geq 1. \tag{6.16}$$

Пусть $v_n(t) = g_n(x)(t)$. Тогда из (6.10), (6.12) вытекает

$$\langle x_n(t) - x_*(t), u_*(t) - v_n(t)\rangle \leq \frac{1}{n} + l_{\mathcal{K}}(t)\|x_*(t) - x_n(t)\|^2, \quad n \geq 1, \tag{6.17}$$

$$\|v_n - u_n\|_\omega \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \tag{6.18}$$

Объединяя (6.16), (6.17), мы придем к неравенству

$$\frac{1}{2}\|x_n(t)-x_*(t)\|^2 \le \int\limits_0^t L_N\|x_n(s)-x_*(s)\|^2\,ds+\frac{1}{n}$$

$$+\int\limits_0^t l_{\mathcal{K}}(s)\|x_n(s)-x_*(s)\|^2\,ds+\int\limits_0^t\langle x_n(s)-x_*(s),v_n(s)-u_n(s)\rangle ds. \tag{6.19}$$

Так как $u_n\in S_U,\ n\ge 1$, то последовательность $u_n,\ n\ge 1$, относительно компактна в ω-$L^2(T,H)$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $u_n\to u$ в ω-$L^2(T,H)$. Тогда из леммы 5.2 и (6.15) вытекает, что $x_n\to x=\mathcal{L}(u)$ в $C(T,H)$. Так как $v_n,u_n\in S_U,\ n\ge 1$, то из (6.18) и леммы 3.2 вытекает, что последовательность $v_n\to u$ в ω-$L^2(T,H)$. Переходя к пределу в (6.19) при $n\to\infty$, мы получим

$$\frac{1}{2}\|x(t)-x_*(t)\|^2\le\int\limits_0^t (L_N+l_{\mathcal{K}}(s))\|x(s)-x_*(s)\|^2\,ds,\quad t\in T.$$

Из этого неравенства следует, что $x(t)=x_*(t),\ t\in T$. Поэтому последовательность $x_n\in\mathcal{R}_{F\cap\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\,F}(x_0),\ n\ge 1$, сходится в $C(T,H)$ к $x_*\in\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}\,F}(x_0)$. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi)$, $H(\overline{\operatorname{co}}\,F)$. Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}}\,F}(x_0)=\overline{\mathcal{R}_F(x_0)}=\overline{\mathcal{R}_{F\cap\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\,F}(x_0)}, \tag{6.20}$$

где черта означает замыкание в $C(T,H)$.

Следствие вытекает из теорем 5.1, 6.1.

Начиная с классической работы А. Ф. Филиппова [16] при доказательстве плотности множества решений того или иного типа включения с возмущением $F(t,x)$ в множестве решений включения с возмущением $\overline{\operatorname{co}}\,F(t,x)$ традиционными предположениями являются измеримость отображения $t\to F(t,x)$ и липшицевость отображения $x\to F(t,x)$. Наши предположения при доказательстве равенства (6.20) относятся к возмущению $\overline{\operatorname{co}}\,F(t,x)$ и носят более общий характер, чем известные. В частности, из липшицевости отображения $x\to F(t,x)$ вытекает гипотеза $H(\overline{\operatorname{co}}\,F)$ (4).

7. Пример

Пусть $T=[0,1],\ H=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — евклидово пространство, $x=(x_1,x_2)\in H,\ f=(f_1,f_2)\in H,\ F:T\times H\to H$ — многозначное отображение с непустыми, замкнутыми значениями. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx_1}{dt}+a_1|x_1|^{p_1-2}x_1-b_1|x_1|^{\alpha_1}x_1=f_1(t), \tag{7.1}$$

$$\frac{dx_2}{dt}+a_2|x_2|^{p_2-2}x_2-b_2|x_2|^{\alpha_2}x_2=f_2(t), \tag{7.2}$$

$$f(t)\in F(t,x), \tag{7.3}$$

$$x(0)=x_0\in H.$$

Предположим, что

$$a_i,b_i>0,\quad 2+\alpha_i<p_i,\quad \alpha_i>0,\quad i=1,2. \tag{7.4}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi^1(x) = \varphi_1^1(x_1) + \varphi_2^1(x_2), \tag{7.5}$$

$$\varphi^2(x) = \varphi_1^2(x_1) + \varphi_2^2(x_2), \tag{7.6}$$

где

$$\varphi_i^1(x_i) = \frac{1}{p_i} a_i |x_i|^{p_i}, \quad i = 1, 2, \tag{7.7}$$

$$\varphi_i^2(x_i) = \frac{1}{\alpha_i + 2} b_i |x_i|^{\alpha_i + 2}, \quad i = 1, 2. \tag{7.8}$$

Из (7.5)–(7.8) вытекает, что

$$\partial\varphi^1(x) = (a_1|x_1|^{p_1-2}x_1, a_2|x_2|^{p_2-2}x_2), \tag{7.9}$$

$$\partial\varphi^2(x) = (b_1|x_1|^{\alpha_1}x_1, b_2|x_2|^{\alpha_2}x_2). \tag{7.10}$$

Используя (7.9), (7.10), включения (7.1)–(7.3) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} + \partial\varphi^1(x) - \partial\varphi^2(x) = f,$$

$$f \in F(t, x),$$

$$x(0) = x_0.$$

Покажем, что функции $\varphi^i(x)$, $i = 1, 2$, определенные равенствами (7.5), (7.6), при выполнении неравенств (7.4) удовлетворяют гипотезам $H(\varphi)$. Для этого нам понадобится неравенство Юнга

$$ab \le \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{q\varepsilon^q}, \quad a, b, \varepsilon > 0, \quad p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Поскольку $\operatorname{dom}\varphi^i = \operatorname{dom}\partial\varphi^i = H$ и пространство H конечномерно, то гипотезы $H(\varphi)$ (1), (2), (5) очевидны. Из (7.9), (7.10), (7.4) и неравенства Юнга вытекает, что существуют $0 < k_1 < 1$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$, такие, что $b_i|x_i|^{\alpha_i+1} \le k_1 a_i |x_i|^{p_i-1} + c_i$, $i = 1, 2$. Из этого неравенства и (7.9), (7.10) вытекает, что

$$\|\partial\varphi^2(x)\| \le k_1 \|\partial\varphi^1(x)\| + c,$$

где $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Так как $\partial\varphi^{i^0}(x) = \partial\varphi^i(x)$, $i = 1, 2$, то гипотеза $H(\varphi)$ (3) доказана.

Для доказательства гипотезы $H(\varphi)$ (4) воспользуемся (7.4), (7.7), (7.8) и неравенством Юнга. Тогда мы получим, что существуют $0 < k_2 < 1$, $c_i^* > 0$, $i = 1, 2$ такие, что

$$\frac{1}{\alpha_i + 2} b_i |x_i|^{\alpha_i+2} \le k_2 \frac{1}{p_i} a_i |x_i|^{p_i} + c_i^*, \quad i = 1, 2.$$

Из этого неравенства и (7.5)–(7.8) вытекает, что $\varphi^2(x) \le k_2\varphi^1(x) + c^*$, $c^* = c_1^* + c_2^*$. Следовательно, гипотеза $H(\varphi)$ (4) имеет место.

Так как функции $x_i \to b_i|x_i|^{\alpha_i}x_i, i = 1, 2$, непрерывно дифференцируемы, то из теоремы о среднем мы получаем

$$b_i|x_i|^{\alpha_i}x_i - b_i|y_i|^{\alpha_i}y_i = (\alpha_i + 1)b_i|\Theta_i x_i + (1 - \Theta_i)y_i|^{\alpha_i} \cdot |x_i - y_i|, \quad i = 1, 2, \quad 0 \le \Theta_i \le 1.$$

Так как

$$|\Theta_i x_i + (1 - \Theta_i)y_i|^{\alpha_i} \le (|x_i|^{\alpha_i} + |y_i|^{\alpha_i}),$$

то из этого неравенства, (7.4), (7.7) и неравенства Юнга вытекает

$$b_i|x_i|^{\alpha_i}x_i - b_i|y_i|^{\alpha_i}y_i \le (\alpha_i + 1)b_i(\varphi_i^1(x_i) + \varphi_i^1(y_i) + D_i)|x_i - y_i|, \quad D_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Воспользовавшись этим неравенством, (7.5), (7.10), мы получим

$$\langle x-y, \partial\varphi^2(x)-\partial\varphi^2(y)\rangle \leq L(\varphi^1(x)+\varphi^1(y)+D)\|x-y\|^2, \quad x,y\in H,$$

где $L=\sum_{i=1}^2(\alpha_i+1)b_i, D=D_1+D_2$. Следовательно, гипотеза $H(\varphi)$ (6) имеет место.

Если мы предположим, что многозначное отображение $F: T\times H\to H$ удовлетворяет гипотезам $H(\overline{\mathrm{co}}\,F)$, то для дифференциального включения (7.1)–(7.3) будут иметь место теоремы 5.1, 6.1 и следствие 6.1. Формулировки их мы не приводим в силу очевидности.

Если подходить к изучению включения (7.1)–(7.3) с точки зрения общей теории дифференциальных включений, не учитывая специфику, то для этого включения, как и для включения

$$\frac{dx_i}{dt}-a_i|x_i|^{p_1-2}x_i+b_i|x_i|^{\alpha_i}x_i=f_i(t), \quad i=1,2,$$

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t))\in F(t,x(t)),$$

мы сможем доказать существование только локальных решений. Это объясняется тем, что для этих включений не выполняются традиционные условия роста для нелинейных членов, при которых доказывается существование глобальных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Koi Y., Watanabe J.** On nonlinear evolution equation with a difference term of subdifferentials // Proc. Japan. Acad. 1976. №. 52. P. 413–446.
2. **Otani M.** On existence of strong solutions for $du(t)/dt+\partial\psi^1(u(t))-\partial\psi^2(u(t))\ni f(t)$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math. 1977. Vol. 24, no. 3. P. 575–605.
3. **Akagi G., Otani M.** Evolution inclusions governed by the difference of two subdifferentials in reflexive Banach spaces // J. Diff. Equat. 2005. Vol. 209, no. 2. P. 392–415.
4. **Bourgin R.D.** Geometric aspects of convex sets with the Radon–Nikodym property. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 474 p. (Lecture Notes in Math.; vol. 993).
5. **Himmelberg C.J.** Measurable relations // Fund. Math. 1975. Vol. 87. P. 53–72.
6. **Brezis H.** Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam; London: North-Holland, 1973. 183 p.
7. **Kenmochi N.** Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications // Bull. Fac. Educ. Chiba University. 1981. Vol. 30. P. 1–87.
8. **Толстоногов А.А.** Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 11. С. 135–160.
9. **Толстоногов А.А.** Строго выставленные точки разложимых множеств в пространствах интегрируемых по Бохнеру функций // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 2. Р. 298–306.
10. **Hiai F., Umegaki H.** Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. Vol. 7, no. 1. P. 149–182.
11. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
12. **Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A.** L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-valued Anal. 1996. Vol. 4, no. 2. P. 173–203.
13. **Толстоногов А.А.** К теореме Скорца Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Мат. заметки. 1990. Vol. 48, № 5. P. 109–120.
14. **Fryszkowski A.** Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76, no. 2. P. 163–174.
15. **Tolstonogov A.A., Tolstonogov D.A.** L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-valued Anal. 1996. Vol. 4, no. 3. P. 237–269.
16. **Филиппов А.Ф.** Классические решения уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1967. № 3. Р. 16–26.

Толстоногов Александр Александрович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зам. директора по НР
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
email: aatol@icc.ru

Поступила 03.02.15