ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.952+517.97

О НЕПРЕРЫВНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ОБРАЗУЮЩИМИ ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ[1]

Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова

В работе рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями. Приведено обоснование конструкции обобщенного решения заданной структуры. Построения опираются на метод характеристик и решения задач вариационного исчисления.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби, метод характеристик, вязкостные решения, минимаксные решения, вариационное исчисление, экстремали.

N. N. Subbotina, L. G. Shagalova. On the continuous extension of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation by characteristics that form a central field of extremals.

The Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation with state constraints is considered. A justification for a construction of a generalized solution with given structure is provided. The construction is based on the method of characteristics and on solutions of problems related to calculus of variations.

Keywords: Hamilton–Jacobi equations, method of characteristics, viscosity solutions, minimax solutions, calculus of variations, extremals.

Введение

В настоящей работе продолжено начатое в [1–3] исследование полученного в [4] для модели Кроу — Кимуры молекулярной эволюции уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями. В [1] было показано, что известные [5–9] понятия обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка неприменимы к этой задаче. В частности, минимаксные решения [6; 7] не рассматривались для задач с фазовыми ограничениями, а известные теоремы существования вязкостного [8; 9] решения доказаны при условии коэрцитивности гамильтониана, которое не выполняется в рассматриваемой задаче. В [1] авторами было введено новое понятие непрерывного обобщенного решения на ограниченном по времени и фазовым переменным множестве $\overline{\Pi}_T = [0,T] \times [-1,1]$ и показано, что такое решение существует, но не является единственным. При этом доказательство существования опиралось на сведение исходной задачи Коши к задаче Дирихле, полученной путем непрерывного продолжения начального условия с начального многообразия на границу фазовых ограничений. У полученной задачи Дирихле существует единственное минимаксное (вязкостное) решение, которое удовлетворяет определению непрерывного обобщенного решения изучаемого уравнения Гамильтона — Якоби. Это решение может быть построено с помощью решений соответствующей уравнению Гамильтона — Якоби характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями, отвечающими задаче Дирихле. В силу неединственности возможного непрерывного продолжения начального условия на границу фазовых ограничений обобщенное решение рассматриваемого уравнения Гамильтона — Якоби неединственно.

В связи с этим была поставлена задача о построении обобщенного решения определенной структуры, а именно обладающего таким свойством, что в той области Ω_0 фазового простран-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00168) и УрО РАН (программа фундаментальных исследований “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами”).

ства, через которую проходят фазовые характеристики, стартующие с начального многообразия, решение строится только с помощью этих характеристик, без участия характеристик, выпущенных с границы фазового ограничения.

В [3] были указаны достаточные условия возможности построения такого решения, описана его конструкция и приведены результаты численного моделирования. Настоящая статья посвящена обоснованию этой конструкции, базирующейся на методе характеристик [10–13]. Отметим, что существенной трудностью, которая преодолена в данной конструкции, является непродолжимость импульсных характеристик.

В рамках предлагаемой конструкции обобщенное решение строится только при помощи характеристик, выпущенных с начального многообразия. Сначала заполняется область Ω_0, а далее решение непрерывным образом продолжается на область $\overline{\Pi}_T \setminus \Omega_0$. Это непрерывное продолжение осуществляется с помощью решения вспомогательных задач вариационного исчисления с закрепленными концами. При этом максимум рассматриваемым функционалам доставляют фазовые компоненты характеристик, которые в начальный момент $t = 0$ стартуют из концов отрезка $[-1, 1]$ и образуют центральное поле экстремалей с центрами в точках $t = 0, x = -1$ и $t = 0, x = 1$ соответственно.

1. Задача о построении обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби с заданными свойствами

1.1. Уравнение Гамильтона — Якоби в модели Кроу — Кимуры и обобщенное решение для задачи с фазовыми ограничениями

В работе [4] для модели молекулярной эволюции Кроу — Кимуры было получено следующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\Big(x, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = 0, \tag{1.1}$$

где

$$H(x, p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}. \tag{1.2}$$

Входящая в (1.2) функция $f(\cdot)$ называется *фитнесом* и предполагается дважды непрерывно дифференцируемой. Уравнение (1.1) рассматривается при $t \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Предполагается также, что задана непрерывно дифференцируемая функция $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и выполняется начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1, 1]. \tag{1.3}$$

В [1] показано, что известные определения обобщенных решений [5–9] неприменимы к задаче (1.1)–(1.3), и введено новое определение (см. ниже определение 1) непрерывного обобщенного решения этой начальной задачи на компактном множестве $\overline{\Pi}_T = [0, T] \times [-1, 1]$. Определение использует следующие понятия негладкого анализа [9; 14].

Пусть задано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символом $\overline{W}$ будем обозначать его замыкание, символом $C(W)$ — класс функций, непрерывных на множестве W.

Пусть $u(\cdot) \in C(\overline{W})$ и $(t, x) \in \overline{W}$. *Субдифференциалом* функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^- u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; \liminf_{\substack{(\tau, y) \to (t, x) \\ (\tau, y) \in \overline{W}}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right\}.$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество

$$D^+u(t,x)=\left\{(a,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\;\middle|\;\limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in\overline{W}}}\frac{u(\tau,y)-u(t,x)-a(\tau-t)-s(y-x)}{|\tau-t|+|y-x|}\le 0\right\}.$$

Символом $\mathrm{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)\in C(\overline{W})$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial u(t,x)=\mathrm{co}\Big\{(a,s)\,\Big|\,a=\lim_{i\to\infty}\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t},\ s=\lim_{i\to\infty}\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x};\quad (t_i,x_i)\to(t,x)\ \text{при}\ i\to\infty,\quad (t_i,x_i)\in\overline{W}\cap\mathrm{Dif}(u)\Big\}.\tag{1.4}$$

В случае локальной липшицевости функции $u(\cdot)$ множество (1.4) совпадает с субдифференциалом Кларка [14].

О п р е д е л е н и е 1. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) в области $\overline{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию (1.3) и условиям

$$a+H(x,s)\le 0\quad\forall\,(a,s)\in D^+u(t,x),\quad\forall\,(t,x)\in\Pi_T,\tag{1.5}$$

$$a+H(x,s)\ge 0\quad\forall\,(a,s)\in D^-u(t,x),\quad\forall\,(t,x)\in\Pi_T,\tag{1.6}$$

$$a+H(x,s)\ge 0\quad\forall\,(a,s)\in D^-u(t,x)\cap\partial u(t,x),\quad\forall\,(t,x)\in\Gamma_T,\tag{1.7}$$

где $\Pi_T=(0,T)\times(-1,1)$, $\Gamma_T=\{(t,x)|\,0<t<T,x=1\}\cup\{(t,x)|\,0<t<T,\,x=-1\}$.

В [1] доказано существование непрерывного обобщенного решения начальной задачи (1.1)–(1.3) в смысле определения 1 на компактном множестве $\overline{\Pi}_T$. Доказательство основано на применении методов теории оптимального управления и исследовании свойств характеристик — решений характеристической системы

$$\dot{x}=H_p(x,p)=-(1+x)e^{2p}+(1-x)e^{-2p},\tag{1.8}$$

$$\dot{p}=-H_x(x,p)=f'(x)+\frac{e^{2p}-e^{-2p}}{2},\tag{1.9}$$

$$\dot{z}=pH_p(x,p)-H(x,p),\tag{1.10}$$

где $H_x(x,p)=\partial H(x,p)/\partial x$, $H_p(x,p)=\partial H(x,p)/\partial p$, $f'(x)=\partial f(x)/\partial x$.

Система (1.8)–(1.10) рассматривается со следующими начальными условиями:

$$x(0,y)=y,\quad p(0,y)=u_0'(y),\quad z(0,y)=u_0(y),\quad y\in[-1,1].\tag{1.11}$$

Компоненты решения системы (1.8)–(1.10) называются соответственно $x(\cdot,y)$ — фазовыми характеристиками, $p(\cdot,y)$ — импульсными характеристиками, $z(\cdot,y)$ — ценовыми характеристиками.

Основной результат [1] можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в $\mathbb{R}^2$ и такая, что*

$$\varphi(0,x)=u_0(x)\ \ \forall\,x\in[-1,1];$$

$$\frac{\partial\varphi(t,\pm1)}{\partial t}+H\Big(\pm1,\partial\frac{\varphi(t,\pm1)}{\partial x}\Big)=0\quad\forall\,t\ge 0.$$

Тогда существует непрерывное обобщенное в смысле определения 1 *решение* $u(t,x)$ *начальной задачи* (1.1)–(1.3) *на компактном множестве* $\overline{\Pi}_T$, *которое при всех* $(t,x) \in \overline{\Pi}_T$ *представимо в виде*

$$u(t,x) = \max_{x(t,y^\sharp)=x} \left[\varphi(t^\sharp, y^\sharp) + \int\limits_{t^\sharp}^{t} p(\tau, y^\sharp) H_p(x(\tau, y^\sharp), p(\tau, y^\sharp)) - H(x(\tau, y^\sharp), p(\tau, y^\sharp)) d\tau \right], \qquad (1.12)$$

где $t^\sharp \in [0,T]$, *причем* $y^\sharp = y \in [-1,1]$, *если* $t^\sharp = 0$ *и* $y^\sharp = \pm 1$, *если* $t^\sharp > 0$; *функции* $(x(\cdot, y^\sharp), p(\cdot, y^\sharp))\colon [t^\sharp, t] \to \mathbb{R}^2$ — *решения характеристической системы* (1.8), (1.9), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$x(t^\sharp, y^\sharp) = y^\sharp, \quad p(t^\sharp, y^\sharp) = \frac{\partial \varphi(t^\sharp, y^\sharp)}{\partial y} = p_0(t^\sharp, y^\sharp).$$

Таким образом, с помощью гладкой функции $\varphi(\cdot)$ начальная функция $u_0(\cdot)$ непрерывным образом продолжается на границу фазовых ограничений и исходная начальная задача Коши (1.1)–(1.3) сводится к задаче Дирихле, обобщенное (минимаксное) решение которой существует и единственно. При этом решение формируется с помощью операции максимума из характеристик, выпущенных с начального многообразия и с границ фазового ограничения.

Поскольку возможны различные продолжения $\varphi(\cdot)$ начальной функции $u_0(\cdot)$, решение исходной задачи (1.1)–(1.3) в смысле определения 1 неединственно.

1.2. Область определения обобщенного решения

Прямоугольная область $\overline{\Pi}_T = [0,T] \times [-1,1]$, в которой строится обобщенное решение, определяется значением T. Момент T выбирается таким образом, что решения системы (1.8)–(1.11) определены (продолжимы до момента T) для всех $y \in [-1,1]$. В силу нелинейной динамики характеристической системы импульсные характеристики $p(\cdot, y)$ непродолжимы на весь полуинтервал $[0, \infty)$. Символом $T^* = T^*(y)$ обозначим такой момент времени, что на интервале $[0, T^*)$ существует непродолжимое вправо решение $x = x(\cdot, y)$, $p = p(\cdot, y), z = z(\cdot, y)$ задачи Коши (1.8)–(1.11).

Поскольку функция $f(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, существуют константы M_1 и M_2 такие, что

$$M_1 \le f'(x) \le M_2, \quad x \in [-1,1].$$

Пусть задано $y \in [-1,1]$. Обозначим $p(0) = p(0,y)$. Для $i = 1,2$ введем константы

$$K_i = \frac{1}{2} \ln \Big(-M_i + \sqrt{M_i^2 + 1} \Big), \quad C_i = \frac{\big| e^{2p(0)} + M_i - \sqrt{M_i^2+1}\, \big|}{e^{2p(0)} + M_i + \sqrt{M_i^2+1}}.$$

Несложно доказать, что справедливо неравенство $K_1 \ge K_2$.

В [3] для момента T^* доказаны следующие оценки, зависящие от $p(0)$.

Теорема 2. a) *Пусть* $p(0) > K_1$. *Тогда*

$$T^* < \frac{-1}{2\sqrt{M_1^2+1}} \ln C_1, \quad 0 < C_1 < 1, \quad и \;\; p(t) \to +\infty \;\; при \;\; t \to T^*.$$

b) *Пусть* $p(0) < K_2$. *Тогда*

$$T^* < \frac{1}{2\sqrt{M_2^2+1}} \ln \left(\frac{-M_2 + \sqrt{M_2^2+1}}{C_2 \big(M_2 + \sqrt{M_2^2+1}\big)} \right), \quad C_2 > 0, \quad и \;\; p(t) \to -\infty \;\; при \;\; t \to T^*.$$

c) *Пусть* $K_2 \le p(0) \le K_1$. *Тогда*

$$T^* \ge \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{M_1^2+1}}\ln\left(\frac{-M_1+\sqrt{M_1^2+1}}{C_1\big(M_1+\sqrt{M_1^2+1}\big)}\right),\ \frac{-1}{2\sqrt{M_2^2+1}}\ln C_2\right\},\quad C_1>0,\ 0<C_2<1.$$

Определим

$$T_* = \min_{y\in[-1,1]} T^*(y).$$

Таким образом, момент T, задающий область $\overline{\Pi}_T$, следует выбирать из условия $0<T\le T_*$.

1.3. Задача о построении решения с заданными свойствами

Поставим цель построить обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (1.1)–(1.3), определенное и непрерывное на множестве $\overline{\Pi}_T \ni (t,x)$, обладающее следующим свойством: в части прямоугольника $\overline{\Pi}_T$, заполненной графиками фазовых характеристик $x(\cdot,y)$ уравнения Гамильтона — Якоби (1.1)–(1.2), стартующих с начального многообразия (1.11), решение $u(t,x)$ определяется формулой (1.12) только с помощью этих характеристик.

Пусть $x^-(t)=x(t,-1)$ и $x^+(t)=x(t,+1)$, $t\in[0,T]$ — фазовые компоненты характеристик (1.8)–(1.10), выпущенных в момент $t=0$ соответственно из точек $x=-1$ и $x=1$.

Определим

$$\Omega_T^0 = \big\{(t,x)\colon t\in[0,T],\ x^-(t)\le x\le x^+(t)\big\}. \tag{1.13}$$

Пусть выполнено следующее условие.

A. Фазовые компоненты $x(\cdot,y)$ характеристик (1.8)–(1.10) с краевым условием (1.11) удовлетворяют неравенствам

$$x^-(t)=x(t,-1)\le x(t,y)\le x(t,+1)=x^+(t)\quad \forall\, y\in[-1,1],\quad \forall\, t\in[0,\overline{T}],$$

$$\overline{T}=\min\{t|\ t>0,\ x^-(t)=x^+(t)\},$$

и прямоугольник $\overline{\Pi}_T=[0,T]\times[-1,1]$, в котором рассматривается задача (1.1)–(1.3), выбран таким образом, что

$$T\le\min\{T_*,\overline{T}\}.$$

Из условия **A** следует, что все фазовые компоненты характеристик (1.8)–(1.10), выпущенных в момент $t=0$ с начального многообразия (1.11), лежат в области Ω_T^0 (1.13).

Целью данной работы является построение обобщенного решения, удовлетворяющего определению 1 и имеющего в области Ω_T^0 следующий вид:

$$u(t,x)=\max_{x(t,y)=x}\int\limits_0^t p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau))-H(x(\tau),p(\tau))d\tau+u_0(y), \tag{1.14}$$

где $x(t)=x(t,y)$, $p(t)=p(t,y)$, $t\ge 0$, — фазовые и импульсные характеристики (1.8)-(1.9) с начальными условиями: $x(0,y)=y$, $p(0,y)=\partial u_0(y)/\partial x$, $y\in[-1,1]$.

З а м е ч а н и е 1. При выполнении условия **A** прямоугольник $\overline{\Pi}_T$ разбивается на три части

$$\overline{\Pi}_T=G_T^+\cup\Omega_T^0\cup G_T^-,$$

где

$$G_T^+=\{(t,x):\ t\in[0,T],\ x^+(t)\le x\le 1\},\quad G_T^-=\{(t,x):\ t\in[0,T],\ -1\le x\le x^-(t)\}, \tag{1.15}$$

и, таким образом, рассматриваемую задачу о построении обобщенного решения со свойством (1.14) можно трактовать как задачу о непрерывном продолжении обобщенного решения (1.14) из области Ω_T^0 на области G_T^- и G_T^+.

2. Конструкция обобщенного решения

2.1. Дополнительные предположения и вспомогательные утверждения

Далее будем предполагать, что наряду с условием **A** в задаче (1.1)–(1.3) выполнены следующие условия на входные данные $f(\cdot)$ и $u_0(\cdot)$.

B1. Существует непрерывная производная $u_0'(\cdot) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ и справедливы неравенства

$$u_0'(1) < 0, \quad u_0'(-1) > 0.$$

B2. Существует непрерывная, монотонно неубывающая производная $f'(\cdot)\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ и справедливы неравенства

$$2f'(1) + e^{2u_0'(1)} < e^{-2u_0'(1)}, \quad -2f'(-1) + e^{-2u_0'(-1)} < e^{2u_0'(-1)}.$$

При выполнении условий **A**, **B1** и **B2** справедливы следующие утверждения, описывающие поведение характеристик, выпущенных из крайних точек начального многообразия.

Лемма 1 [2, лемма 3]. *Пусть $p^+(t)$, $p_1(t)$, $x^+(t)$, $x_1(t)$ — решения* (1.8), (1.9), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$p_1(0) = p_1 \ < \ p^+ = p^+(0), \quad x_1(0) \ = \ x^+(0) \ = 1,$$

тогда при всех $t \in [0,T]$ справедливы неравенства

$$p^+(t) \geq p_1(t), \quad x^+(t) \leq x_1(t).$$

Лемма 2 [2, лемма 4]. *Пусть $p^-(t)$, $p_2(t)$, $x^-(t)$, $x_2(t)$ — решения* (1.8), (1.9), *удовлетворяющие начальным условиям*

$$p_2(0) = p_2 \ > \ p^- = p^-(0), \quad x_2(0) \ = \ x^-(0) \ = -1,$$

тогда при всех $t \in [0,T]$ справедливы неравенства

$$p^-(t) \leq p_2(t), \quad x^-(t) \geq x_2(t).$$

2.2. Поведение характеристик при приближении к границе интервала продолжимости

В этом разделе исследуются свойства решений системы (1.8), (1.9), которые будут использованы для построения обобщенного решения, удовлетворяющего требованию (1.14) в области Ω_T^0 (1.13).

Рассмотрим характеристики $x(\cdot;p_0)$, $p(\cdot;p_0)$ — решения характеристической системы (1.8), (1.9), соответствующие начальным данным

$$x(0) = 1, \quad p(0) = p_0, \quad p_0 \in (-\infty, u_0'(1)]. \tag{2.1}$$

Из леммы 1 следует, что графики фазовых компонент этих решений заполняют область G_T^+ так, что через каждую внутреннюю точку $(\bar{t},\bar{x})$ области G_T^+ проходит единственная кривая $x(t) = x(t,p_0)$, определяемая параметром $p_0 = p_0(\bar{t},\bar{x})$, такая, что $x(\bar{t}, p_0(\bar{t},\bar{x})) = \bar{x}$. Кроме того, из теоремы 1 и леммы 1 следует, что для любого параметра p_0, $p_0 \in (-\infty, u_0'(-1)]$ существует значение $t^* = t^*(p_0)$ такое, что на интервале $[0,t^*)$ определена и непродолжима вправо характеристика $x(\cdot;p_0), p(\cdot;p_0)$. При этом

$$p(t;p_0) \to -\infty \ \text{ при } \ t \to t^* = t^*(p_0);$$

$$\text{если} \quad p_{01} \in (-\infty, u_0'(1)], \quad p_{02} \in (-\infty, u_0'(1)] \text{ и } p_{01} > p_{02}, \quad \text{то} \quad t^*(p_{01}) > t^*(p_{02}).$$

В следующем утверждении устанавливается поведение фазовой компоненты характеристики, а также ее производной при приближении к границе интервала продолжимости.

Лемма 3. *Пусть* $p_0 \in (-\infty, u_0'(1)]$, *и* $t^* = t^*(p_0)$. *Тогда для фазовой компоненты* $x(\cdot) = x(\cdot; p_0)$ *характеристики, определяемой системой* (1.8), (1.9) *и начальными данными* (2.1), *справедливо*

$$x(t) \to 1, \quad \dot{x}(t) \to 0 \ \ \text{при} \quad t \to t^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$y(t) = 1 - x(t), \quad t \in [0, t^*). \tag{2.2}$$

Поскольку $\dot{y} = -\dot{x}$, из (1.8) имеем

$$\dot{y} = -\varphi(t)y + 2e^{2p(t)}, \tag{2.3}$$

где $\varphi(t) = e^{2p(t)} + e^{-2p(t)}$, $t \in [0, t^*)$. Решение однородного линейного уравнения, соответствующего (2.3), имеет вид

$$y(t) = Ce^{-\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}, \quad t \in [0, t^*).$$

Применяя метод вариации произвольной постоянной, получим отсюда решение линейного неоднородного уравнения (2.3):

$$y(t) = 2\int\limits_0^t e^{2p(\tau)+\int\limits_0^\tau \varphi(\xi)d\xi} d\tau \cdot e^{-\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}, \quad t \in [0, t^*).$$

Пусть $t \to t^*$. При этом $p(t) \to -\infty$. Найдем, используя правило Лопиталя,

$$\lim_{t \to t^*} y(t) = 2\lim_{t \to t^*} \frac{\int\limits_0^t e^{2p(\tau)+\int\limits_0^\tau \varphi(\xi)d\xi} d\tau}{e^{\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}} = 2\lim_{t \to t^*} \frac{e^{2p(t)+\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}}{e^{\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi}\varphi(t)}.$$

Подставив выражение для функции $\varphi(\cdot)$, получим

$$\lim_{t \to t^*} y(t) = \lim_{t \to t^*} \frac{e^{2p(t)}}{e^{2p(t)} + e^{-2p(t)}} = \lim_{t \to t^*} \frac{1}{1 + e^{-4p(t)}} = 0.$$

Итак, при $t \to t^*$ величина $y(t) \to 0$ и эквивалентна величине $e^{4p(t)}$. Тогда из (2.3) следует, что при $t \to t^*$ производная $\dot{y}(t)$ стремится к нулю эквивалентно величине $e^{2p(t)}$. Учитывая (2.2), получаем утверждение леммы. □

Рассмотрим решения $x(\cdot; p_0)$, $p(\cdot; p_0)$ характеристической системы (1.8), (1.9), соответствующие начальным данным

$$x(0) = -1, \quad p(0) = p_0, \quad p_0 \in [u_0'(-1), \infty). \tag{2.4}$$

Из леммы 2 следует, что графики фазовых компонент этих решений заполняют область G_T^- так, что через каждую внутреннюю точку $(\bar{t}, \bar{x})$ области G_T^- проходит единственная кривая $x(t) = x(t, p_0)$, определяемая параметром $p_0 = p_0(\bar{t}, \bar{x})$, такая, что $x(\bar{t}, p_0(\bar{t}, \bar{x})) = \bar{x}$. Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что для любого параметра p_0, $\ p_0 \in [u_0'(-1), \infty)$ существует значение $t^* = t^*(p_0)$ такое, что на интервале $[0, t^*)$ определена и непродолжима вправо характеристика $x(\cdot; p_0), p(\cdot; p_0)$. При этом

$$p(t; p_0) \to \infty \text{ при } t \to t^* = t^*(p_0);$$

$$\text{если } p_{01} \in [u_0'(-1), \infty), \ \ p_{02} \in [u_0'(-1), \infty) \text{ и } p_{01} < p_{02}, \ \text{ то } \ t^*(p_{01}) > t^*(p_{02}).$$

Следующее утверждение устанавливает поведение фазовой компоненты характеристики, а также ее производной при приближении к границе интервала продолжимости.

Лемма 4. *Пусть* $p_0 \in [u_0'(-1), \infty)$ *и* $t^* = t^*(p_0)$. *Тогда для фазовой компоненты* $x(\cdot) = x(\cdot; p_0)$ *характеристики, определяемой системой* (1.8), (1.9) *и начальными данными* (2.4), *справедливо*

$$x(t) \to -1, \quad \dot{x}(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to t^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 3.

2.3. Вспомогательная задача вариационного исчисления

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления о максимуме функционала

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{\bar{t}} H^*(x(\tau), \dot{x}(\tau))d\tau, \quad x(0) = 1, \quad x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G = G_T^+ \tag{2.5}$$

в классе непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot)$. Подынтегральная функция $H^*(\cdot)$ — функция, сопряженная гамильтониану $H(\cdot)$ (1.2), определяемая следующим образом:

$$H^*(x(t), \dot{x}(t)) = \inf_{p \in R} [p\dot{x}(t) - H(x(t), p)]. \tag{2.6}$$

Поскольку при $x \in [-1, 1]$ гамильтониан $H(\cdot)$ непрерывно дифференцируем и вогнут, инфимум в выражении (2.6) достигается на единственном элементе p таком, что

$$\dot{x}(t) = H_p(x(t), p). \tag{2.7}$$

Далее, считая, что функция $p(\cdot)$ найдена из условия (2.7), выписываем необходимое условие для функции $x(\cdot)$, доставляющей экстремум функционалу (2.5), — известное из вариационного исчисления [15; 16] уравнение Эйлера. Получим

$$\dot{p}(t) = -H_x(x(t), p). \tag{2.8}$$

Уравнения (2.7), (2.8) совпадают с уравнениями (1.8), (1.9) характеристик исходного уравнения Гамильтона — Якоби (1.1). Таким образом, экстремалями функционала являются фазовые компоненты характеристик, стартующих из точки $x(0) = 1$, $p(0) = p_0$.

Из леммы 1 следует, что через каждую внутреннюю точку (t^*, x^*) области G_T^+ проходит единственная экстремаль $x(t) = x(t, p_0)$ функционала (2.5), определяемая параметром $p_0 \in (-\infty, u_0'(1)]$, $p_0 = p_0(t^*, x^*)$, такая, что $x(t^*, p_0(t^*, x^*)) = x^*$. Таким образом, семейство экстремалей функционала (2.5) образует центральное поле с центром в точке $t_0 = 0$, $x_0 = 1$.

Покажем, что на экстремалях выполнено усиленное условие Лежандра

$$H^*_{\dot{x}\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) < 0, \quad 0 < t < \bar{t}. \tag{2.9}$$

Пусть функция $\bar{p} = \bar{p}(x, \dot{x})$ такова, что $H^*(x, \dot{x}) = \bar{p}\dot{x} - H(x, \bar{p})$. Учитывая, что $\dot{x} = H_p(x, \bar{p})$, дифференцируя это равенство по $\dot{x}$, получаем $1 = H_{pp}(x, \bar{p})\bar{p}_{\dot{x}}$. Имеем также

$$H^*_{\dot{x}} = \bar{p} + \dot{x}\bar{p}_{\dot{x}} - H_p\bar{p}_{\dot{x}} = \bar{p} + (\dot{x} - H_p(x, \bar{p}))\bar{p}_{\dot{x}} = \bar{p},$$

$$H^*_{\dot{x}\dot{x}} = \bar{p}_{\dot{x}} = \frac{1}{H_{pp}(x, \bar{p})}. \tag{2.10}$$

Поскольку $H_{pp} = -2(1 + x)e^{2p} - 2(1 - x)e^{-2p} < 0$ для любого конечного p и для всех $x \in [-1; 1]$, из (2.10) следует выполнение условия (2.9), а также вогнутость подынтегральной функции $H^*(x, \dot{x})$ по $\dot{x}$.

Из курса вариационного исчисления [15; 16] известно, что включение экстремали в поле экстремалей, выполнение усиленного условия Лежандра (2.9) и вогнутость подынтегральной функции по импульсной переменной составляют набор достаточных условий для достижения на рассматриваемой экстремали сильного максимума. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любой внутренней точки* $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_T^+$ *существует единственная экстремаль* $x = x(t)$ *вариационной задачи* (2.5), (2.6). *Эта экстремаль совпадает с фазовой компонентой характеристики* (1.8), (1.9), *стартующей из точки* $x(0) = 1, \quad p(0) = p_0$. *При этом значение* $p_0 \in (-\infty, u_0'(1))$ *единственным образом определяется из условия* $x(\bar{t}) = \bar{x}$. *На экстремали функционал* (2.5) *достигает сильного максимума.*

Рассмотрим теперь вариационную задачу в области G_T^-:

$$I(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\bar{t}} H^*(x(\tau), \dot{x}(\tau))d\tau, \quad x(0) = -1, \quad x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G = G_T^-. \tag{2.11}$$

Требуется найти непрерывно дифференцируемую функцию $x = x(t)$, удовлетворяющую заданным краевым условиям, на которой достигается максимум функционала (2.11). По аналогии с доказательством теоремы 3 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Для любой внутренней точки* $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_T^-$ *существует единственная экстремаль* $x = x(t)$ *вариационной задачи* (2.11), (2.6). *Эта экстремаль совпадает с фазовой компонентой характеристики* (1.8), (1.9), *стартующей из точки* $x(0) = -1, \quad p(0) = p_0$. *При этом значение* $p_0 \in (u_0'(-1), \infty)$ *единственным образом определяется из условия* $x(\bar{t}) = \bar{x}$. *На экстремали функционал* (2.11) *достигает сильного максимума.*

2.4. Вариационная задача с правым концом на границе фазового ограничения

В этом разделе рассмотрим вариационные задачи (2.5) и (2.11) в случае, когда оба конца искомой кривой принадлежат соответственно верхней или нижней границе фазового ограничения.

Пусть в задаче (2.5) условие на правом конце имеет вид

$$x(\bar{t}) = 1.$$

Из леммы 1 следует, что существует единственное значение $p_0 = p_0(\bar{t}, 1) \in (-\infty, u_0'(1)]$, определяющее характеристику $x(\cdot; \bar{t}, 1)$, $p(\cdot; \bar{t}, 1)$ — решение системы (1.8), (1.9) такое, что $x(0; \bar{t}, 1) = 1$, $p(0; \bar{t}, 1) = p_0$ и $\bar{t} = t^*(p_0)$. Из леммы 3 следует, что в точке $t = \bar{t}$ функцию $x(\cdot; \bar{t}, 1)$ можно непрерывным образом доопределить, положив $x(\bar{t}; \bar{t}, 1) = 1$, и при этом будет $\dot{x}(\bar{t}; \bar{t}, 1) = 0$.

Заметим также, что существует точка $\tau = \tau(p_0)$ такая, в которой функция $x(\cdot; \bar{t}, 1)$ достигает минимума и для которой справедливо

$$\dot{x}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau), \quad \dot{x}(\tau) = 0.$$

Определим функции $x^\Delta(\cdot) = x^\Delta(\cdot; \bar{t}, 1)$ и $x^*(\cdot) = x^*(\cdot; \bar{t}, 1, \Delta)$ следующим образом:

$$x^\Delta(t) = x(t - \Delta; \bar{t}, 1), \quad t \in [\Delta, \bar{t} + \Delta],$$

$$x^*(t) = \begin{cases} x(t; \bar{t}, 1), & t \in [0, \tau], \\ x(\tau; \bar{t}, 1), & t \in [\tau, \tau + \Delta], \\ x^\Delta(t), & t \in [\tau + \Delta, \bar{t} + \Delta]. \end{cases}$$

Обозначим

$$I(\bar{t}) = \int\limits_0^{\bar{t}} H^*\big(x(s; \bar{t}, 1), \dot{x}(s; \bar{t}, 1)\big)ds.$$

В силу теоремы 3 и из определения функции $x^*(\cdot)$ имеем

$$I(\bar t+\Delta)\ge\int\limits_0^{\bar t+\Delta}H^*(x^*(s),\dot x^*(s))ds=I(\bar t)+H^*(x^*(\tau),\dot x^*(\tau))\Delta. \tag{2.12}$$

Из (2.12) получаем

$$\frac{I(\bar t+\Delta)-I(\bar t)}{\Delta}\ge H^*(x^*(\tau),\dot x^*(\tau))=H^*(x(\tau;\bar t,1),0)=-H(x(\tau;\bar t,1),p(\tau;\bar t,1)).$$

Вдоль характеристики гамильтониан $H(\cdot)$ (1.2) сохраняет постоянное значение, поэтому

$$H(x(\tau;\bar t,1),p(\tau;\bar t,1))=H(1,p_0)=1-f(1)-e^{2p_0}<1-f(1).$$

Таким образом,

$$\frac{I(\bar t+\Delta)-I(\bar t)}{\Delta}\ge f(1)-1.$$

Устремляя Δ к нулю, получим следующую оценку для производной $I'(\cdot)$:

$$I'(\bar t)\ge 1-f(1),\quad \bar t\in(0,T]. \tag{2.13}$$

Обозначим через $x(\cdot;p_0)$, $p(\cdot;p_0)$ решение характеристической системы (1.8), (1.9), удовлетворяющее начальному условию $x(0)=1$, $p(0)=p_0$. Введем также обозначение

$$I(t;p_0)=\int\limits_0^t H^*\big(x(s;p_0),\dot x(s;p_0)\big)ds,\quad t\in[0,t^*(p_0)].$$

Пусть $p_0=p_0(\bar t,1)$, $p_0+\Delta p_0=p_0(\bar t+\Delta,1)$. Тогда

$$I(\bar t+\Delta)=I(\bar t+\Delta;p_0+\Delta p_0)=I(\bar t;p_0+\Delta p_0)$$

$$+\int\limits_{\bar t}^{\bar t+\Delta}H^*\big(x(s;p_0+\Delta p_0),\dot x(s;p_0+\Delta p_0)\big)ds+I(\bar t;p_0)-I(\bar t;p_0).$$

Поскольку $I(\bar t;p_0)=I(\bar t)$,

$$\frac{I(\bar t+\Delta)-I(\bar t)}{\Delta}=\frac{I(\bar t;p_0+\Delta p_0)-I(\bar t;p_0)}{\Delta p_0\dfrac{\Delta}{\Delta p_0}}+\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\bar t}^{\bar t+\Delta}H^*\big(x(s;p_0+\Delta p_0),\dot x(s;p_0+\Delta p_0)\big)ds.$$

Применяя теорему о среднем в определенном интеграле, получаем

$$\frac{I(\bar t+\Delta)-I(\bar t)}{\Delta}=\frac{I(\bar t;p_0+\Delta p_0)-I(\bar t;p_0)}{\Delta p_0\dfrac{\Delta}{\Delta p_0}}+H^*\big(x(\theta;p_0+\Delta p_0),\dot x(\theta;p_0+\Delta p_0)\big),$$

где $\theta\in[\bar t,\bar t+\Delta]$. В этом равенстве устремим величину Δp_0 к нулю и перейдем к пределу. Заметим, что если $\Delta p_0\to 0$, то $\Delta\to 0$. Рассмотрим

$$\lim_{\Delta p_0\to 0}\frac{\Delta}{\Delta p_0}=\lim_{\Delta p_0\to 0}\frac{t^*(p_0+\Delta p_0)-t^*(p_0)}{\Delta p_0}. \tag{2.14}$$

Из теоремы 2 следует, что

$$0<t^*(p_0+\Delta p_0)-t^*(p_0)<\frac{1}{2\sqrt{M_2^2+1}}\delta(p_0,\Delta p_0),$$

где
$$\delta(p_0,\Delta p_0)=\ln\frac{|e^{2p_0}+M_2-\sqrt{M_2^2+1}|}{e^{2p_0}+M_2+\sqrt{M_2^2+1}}-\ln\frac{|e^{2(p_0+\Delta p_0)}+M_2-\sqrt{M_2^2+1}|}{e^{2(p_0+\Delta p_0)}+M_2+\sqrt{M_2^2+1}}.$$
Используя правило Лопиталя, вычислим
$$\lim_{\Delta p_0\to 0}\frac{\delta(p_0,\Delta p_0)}{\Delta p_0}=\frac{4e^{2p_0}\sqrt{M_2^2+1}}{e^{4p_0}+2M_2e^{2p_0}-1}.$$
Таким образом, значение предела (2.14) конечно и положительно. Обозначим это значение символом K. Тогда, учитывая это и полунепрерывность сверху функции $H^*(\cdot)$, получим
$$I'(\bar t)\le\frac{1}{K}\lim_{\Delta p_0\to 0}\frac{I(\bar t;p_0+\Delta p_0)-I(\bar t;p_0)}{\Delta p_0}+H^*(1,0)$$
или
$$I'(\bar t)\le\frac{1}{K}\frac{\partial I(\bar t;p_0)}{\partial p_0}+f(1)-1. \tag{2.15}$$

Произведем следующие преобразования:
$$\frac{\partial I(\bar t;p_0)}{\partial p_0}=\frac{\partial I(0;p_0)}{\partial p_0}+\int\limits_0^{\bar t}\frac{d}{dt}\frac{\partial I(t;p_0)}{\partial p_0}dt$$
$$=\int\limits_0^{\bar t}\frac{\partial}{\partial p_0}\frac{dI(t;p_0)}{dt}dt=\int\limits_0^{\bar t}\frac{\partial}{\partial p_0}\Big[p(t;p_0)\dot x(t;p_0)-H(x(t;p_0),p(t;p_0))\Big]dt$$
$$=\int\limits_0^{\bar t}\Big[\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0}H_p(x(t;p_0),p(t;p_0))+p(t;p_0)\frac{\partial}{\partial p_0}\frac{dx(t;p_0)}{dt}$$
$$-H_x(x(t;p_0),p(t;p_0))\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}-\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0}H_p(x(t;p_0),p(t;p_0))\Big]dt$$
$$=\int\limits_0^{\bar t}\Big[p(t;p_0)\frac{d}{dt}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}+\frac{dp(t;p_0)}{dt}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}\Big]dt=\int\limits_0^{\bar t}\frac{d}{dt}\Big[p(t;p_0)\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}\Big]dt$$
$$=\lim_{t\to\bar t}p(t;p_0)\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}-p_0\frac{\partial x(0,p_0)}{\partial p_0}=\lim_{t\to\bar t}p(t;p_0)\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}.$$
Итак, мы установили, что
$$\frac{\partial I(\bar t;p_0)}{\partial p_0}=\lim_{t\to\bar t}p(t;p_0)\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}. \tag{2.16}$$

Известно [17], что производные $\dfrac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}$ и $\dfrac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0}$ удовлетворяют следующей системе уравнений в вариациях:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}&=H_{px}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}+H_{pp}\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0}&=-H_{xx}\frac{\partial x(t;p_0)}{\partial p_0}-H_{xp}\frac{\partial p(t;p_0)}{\partial p_0},\end{aligned} \tag{2.17}$$

где H_{px}, H_{pp}, H_{xp}, H_{pp} — частные производные второго порядка по соответствующим переменным гамильтониана $H(\cdot)$, вычисленные в точке $(x(t;p_0),p(t;p_0))$. Например,

$$H_{px}=H_{px}(x(t;p_0),p(t;p_0))=\frac{\partial^2 H(x(t;p_0),p(t;p_0))}{\partial p\,\partial x}.$$

Продифференцировав уравнения характеристической системы (1.8), (1.9) вдоль ее решений, заметим, что производные $\dot{x},\dot{p}$ компонент характеристик тоже удовлетворяют системе (2.17).

Сведем уравнение для $\dfrac{\partial x(t,p_0)}{\partial p_0}$ к уравнению второго порядка. Обозначим

$$y_1=\frac{\partial x(t,p_0)}{\partial p_0},\quad y_2=\frac{\partial p(t,p_0)}{\partial p_0}.$$

Таким образом, первое уравнение системы (2.17) запишется в виде

$$\dot{y_1}=H_{px}y_1+H_{pp}y_2. \tag{2.18}$$

Отсюда

$$y_2=\frac{1}{H_{pp}}\dot{y_1}-\frac{H_{px}}{H_{pp}}y_1. \tag{2.19}$$

Продифференцируем (2.18)

$$\ddot{y_1}=\frac{d}{dt}(H_{xp})y_1+H_{xp}\dot{y_1}+\frac{d}{dt}(H_{pp}y_2)+H_{pp}\dot{y_2}.$$

Учитывая (2.19), получим

$$\ddot{y_1}=\frac{\frac{dH_{pp}}{dt}}{Hpp}\dot{y_1}+\left[\frac{d}{dt}(H_{xp})-\frac{d}{dt}(H_{pp})\cdot\frac{H_{xp}}{H_{pp}}-H_{xx}H_{pp}+(H_{xp})^2\right]y_1. \tag{2.20}$$

Пусть $W(\cdot)$ — определитель Вронского для двух частных решений дифференциального уравнения (2.20). По формуле Остроградского — Лиувилля

$$W(t)=W(t_*)e^{\int\limits_{t_*}^{t}\frac{\frac{d}{d\tau}H_{pp}}{H_{pp}}d\tau},\quad t_*\in[0,T),\quad t\in[t_*,T). \tag{2.21}$$

Произведя следующие выкладки:

$$e^{\int\limits_{t_*}^{t}\frac{\frac{d}{d\tau}H_{pp}}{H_{pp}}d\tau}=e^{\int\limits_{t_*}^{t}\frac{d}{d\tau}\ln H_{pp}d\tau}=e^{\ln H_{pp}(t)-\ln H_{pp}(t_*)}=\frac{H_{pp}(t)}{H_{pp}(t_*)},$$

получим из (2.21)

$$W(t)=W(t_*)\frac{H_{pp}(t)}{H_{pp}(t_*)}. \tag{2.22}$$

Здесь $H_{pp}(t)=H_{pp}\big((x(t;p_0),p(t;p_0)\big)$. Поскольку производная фазовой компоненты $x(\cdot)=x(\cdot;p_0)$ характеристики также является частным решением уравнения (2.20), справедливо соотношение

$$W(t)=\begin{vmatrix}\dot{x}(t) & y_1(t)\\ \ddot{x}(t) & \dot{y}_1(t)\end{vmatrix}=\dot{x}(t)\dot{y}_1(t)-\ddot{x}(t)y_1(t).$$

Отсюда получаем

$$y_1(t)=\dot{y}_1(t)\frac{\dot{x}(t)}{\ddot{x}(t)}-\frac{W(t)}{\ddot{x}(t)}.$$

Заметим также, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_1(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{W(t)}{(\dot{x}(t))^2},$$

откуда

$$y_1(t) = \dot{x}(t)\int\limits_{t_*}^{t} \frac{W(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau. \tag{2.23}$$

Используя (2.22), оценим выражение для интеграла в (2.23), переписав

$$\int\limits_{t_*}^{t} \frac{W(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau = \frac{W(t_*)}{H_{pp}(t_*)}\int\limits_{t_*}^{t} \frac{H_{pp}(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau. \tag{2.24}$$

Величина $\dfrac{W(t_*)}{H_{pp}(t_*)}$ конечна. Введем обозначения

$$a(t) = (1 + x(t))e^{2p(t)}, \quad b(t) = (1 - x(t))e^{-2p(t)}.$$

Из (1.8), (1.9) имеем

$$\int\limits_{t_*}^{t} \frac{H_{pp}(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau = -2\int\limits_{t_*}^{t} \frac{a(\tau) + b(\tau)}{(b(\tau) - a(\tau))^2}d\tau$$

$$= -2\int\limits_{t_*}^{t} \frac{a(\tau) + b(\tau)}{(a(\tau) + b(\tau))^2 - 4a(\tau)b(\tau)}d\tau = \int\limits_{t_*}^{t} \frac{d\tau}{(a(\tau) + b(\tau)) - 4\dfrac{a(\tau)b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}}. \tag{2.25}$$

Заметим, что

$$a(t)b(t) = (1 + x(t))e^{2p(t)}(1 - x(t))e^{-2p(t)} = 1 - x^2(t).$$

Кроме того, поскольку гамильтониан $H(\cdot)$ (1.2) вдоль характеристики сохраняет постоянное значение, имеем

$$-\frac{1}{2}(a(t) + b(t)) + 1 - f(x(t)) = H(x(t), p(t)) = H(1, p_0) = 1 - f(1) - e^{2p_0},$$

$$a(t) + b(t) = 2\big(e^{2p_0} + f(1) - f(x(t))\big).$$

Таким образом, из (2.25) получаем, что интеграл

$$\int\limits_{t_*}^{\bar{t}} \frac{H_{pp}(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau = \lim_{t\to\bar{t}}\int\limits_{t_*}^{t} \frac{H_{pp}(\tau)}{(\dot{x}(\tau))^2}d\tau$$

конечен. Учитывая (2.23), (2.24) и тот факт, что при $t \to \bar{t}$ величина $\dot{x}(t)$ стремится к нулю эквивалентно величине $e^{2p(t)}$, получаем

$$\lim_{t\to\bar{t}} p(t; p_0)\frac{\partial x(t, p_0)}{\partial p_0} = 0. \tag{2.26}$$

Учитывая (2.26) и (2.16), получаем из (2.15) оценку

$$I'(\bar{t}) \le f(1) - 1, \quad \bar{t} \in (0, T]. \tag{2.27}$$

Из оценок (2.27) и (2.13) следует

$$I'(\bar{t}) = f(1) - 1, \quad \bar{t} \in (0, T]. \tag{2.28}$$

Поскольку $I(0) = 0$, из (2.28) получаем

$$I(\bar{t}) = (f(1) - 1)\bar{t}, \quad \bar{t} \in (0, T].$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Для любой граничной точки* $(\bar{t}, 1)$, $0 < \bar{t} \le T$ *области* G_T^+ *максимум функционала* (2.5), (2.6) *достигается на функции* $x(\cdot; \bar{t}, 1)$. *При этом*

$$I(x(\cdot; \bar{t}, 1)) = (f(1) - 1)\bar{t}.$$

Пусть в задаче (2.11) условие на правом конце имеет вид $x(\bar{t}) = -1$. Из леммы 2 следует, что существует единственное значение $p_0 = p_0(\bar{t}, -1) \in [u_0'(-1), \infty)$, определяющее характеристику $x(\cdot; \bar{t}, -1)$, $p(\cdot; \bar{t}, 1)$ — решение системы (1.8), (1.9) такое, что $x(0; \bar{t}, 1) = -1$, $p(0; \bar{t}, 1) = p_0$ и $\bar{t} = t^*(p_0)$. Из леммы 4 следует, что в точке $t = \bar{t}$ функцию $x(\cdot; \bar{t}, 1)$ можно непрерывным образом доопределить, положив $x(\bar{t}; \bar{t}, 1) = -1$, и при этом будет $\dot{x}(\bar{t}; \bar{t}, 1) = 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любой граничной точки* $(\bar{t}, -1)$, $0 < \bar{t} \le T$, *области* G_T^- *максимум функционала* (2.11), (2.6) *достигается на функции* $x(\cdot; \bar{t}, -1)$. *При этом*

$$I(x(\cdot; \bar{t}, -1)) = (f(-1) - 1)\bar{t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

2.5. Структура обобщенного решения

Пусть выполнены условия **A**, **B1**, **B2**. Предлагается следующая конструкция непрерывного на множестве $\overline{\Pi}_T = [0, T] \times [0, 1]$ обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3), опирающаяся на изложенные выше результаты.

В области Ω_T^0 (1.13) решение определяется с помощью соотношения (1.14) и согласно результатам [1] является субдифференцируемой функцией.

Определим теперь решение в области G_T^- (1.15). Рассмотрим фазовые $x^-(\cdot; p_0)$ и импульсные $p^-(\cdot; p_0)$ характеристики — решения системы (1.8), (1.9), соответствующие начальным данным

$$x^-(0, p_0) = -1, \quad p^-(0, p_0) = p_0, \quad p_0 \in [u_0'(-1), +\infty).$$

Из леммы 2 следует, что для любой внутренней точки (t_*, x_*) области G_T^- существует единственный параметр $p_0 \in [u_0'(-1), +\infty)$, $p_0 = p_0(t_*, x_*)$ такой, что $x^-(t_*, p_0(t_*, x_*)) = x_*$.

Пусть $(t_*, x_*) \in G_T^-$. Положим

$$u(t_*, x_*) = u_0(-1) + \int_0^{t_*} \big[p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))\big]\, d\tau, \tag{2.29}$$

где $x(t) = x^-(t, p_0(t_*, x_*))$, $p(t) = p^-(t, p_0(t_*, x_*))$. Для граничных точек области G_T^- таких, что $x_* = -1$, $0 \le t_* \le T$, положим

$$u(t_*, -1) = u_0(-1) + (f(-1) - 1)t_*.$$

В области G_T^+ (1.15) обобщенное решение определяется с помощью решений $x^+(\cdot; p_0)$ и $p^+(\cdot; p_0)$ характеристической системы (1.8), (1.9), соответствующих начальным данным

$$x^+(0) = 1, \quad p^+(0) = p_0, \quad p_0 \in (-\infty, u_0'(-1)].$$

Из леммы 1 следует, что для любой внутренней точки (t^*, x^*) области G_T^+ существует единственный параметр $p_0 \in (-\infty, u_0'(-1)]$, $p_0 = p_0(t^*, x^*)$ такой, что $x^+(t^*, p_0(t^*, x^*)) = x^*$.

Пусть $(t^*, x^*) \in G_T^+$. Положим

$$u(t^*, x^*) = u_0(1) + \int\limits_0^{t^*} \big[p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))\big]\, d\tau, \tag{2.30}$$

где $x(t) = x^+(t, p_0(t^*, x^*)),\ p(t) = p^+(t, p_0(t^*, x^*))$. Для граничных точек области G_T^+ таких, что $x_* = 1,\ 0 \le t_* \le T$, положим

$$u(t_*, 1) = u_0(1) + (f(1) - 1)t_*.$$

З а м е ч а н и е 2. Значения функции $u(\cdot)$, задаваемые формулами (2.29), (2.30), совпадают со значениями ценовых характеристик $z(\cdot, y)$ (1.10), соответствующих начальным данным

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = p_0, \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y = \mp 1.$$

Применяя схему доказательства метода характеристик Коши [11], можно показать, что построенная таким образом функция $u(\cdot)$ является непрерывно дифференцируемой во внутренних точках (t, x) областей G_T^- и G_T^+, и ее градиент равен $(-H\,(x(t),\, p(t))\,, p(t))$, где $x(t)$ — соответственно $x^-(t, p_0(t, x))$ и $x^+(t, p_0(t, x))$, $p(t)$ — соответственно $p^-(t, p_0(t, x))$ и $p^+(t, p_0(t, x))$. Из доказанных в этом разделе теорем 1–4 следует, что функция $u(\cdot)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Pi}_T$, и для нее выполнены неравенства (1.5), (1.6). Таким образом, $u(\cdot)$ удовлетворяет определению 1 в точках множества $\Pi_T = (0, T) \times (-1, 1)$. Если $0 < t_* < T$, $x_* = -1$, то $\partial u(t_*, x_*) = \partial u(t_*, -1) = \{(-H(-1, \infty), \infty)\}$. Если $0 < t_* < T$, $x_* = 1$, то $\partial u(t_*, x_*) = \partial u(t_*, 1) = \{(-H(1, -\infty), -\infty)\}$. При этом $H(-1, \infty) = 1 - f(-1)$, $H(1, -\infty) = 1 - f(1)$. Итак, в точках множества Γ_T выполнено неравенство (1.7); таким образом, $u(\cdot)$ удовлетворяет определению 1 и является обобщенным решением задачи (1.1)-(1.3). По построению функция $u(\cdot)$ удовлетворяет условию (1.14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.** О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.
2. **Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.** Построение обобщенного решения уравнения, сохраняющего тип Беллмана в заданной области фазового пространства // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 243–256.
3. **Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.** Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 247–257.
4. **Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.** Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution // Phys. Rev. E (3). 2008. Vol. 78, no. 4, 041908. 6 p.
5. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // Мат. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 394–415.
6. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. **Subbotin A.I.** Generalized Solutions of First Order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
8. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
9. **Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.** Hamilton-Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, no. 2. P. 643–683.
10. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 832 с.
11. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.
12. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equations and its applications in dynamical optimization // J. Math. Sci. 2006. Vol. 135, no. 3. P. 2955–3091.
13. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013. 244 с.

14. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
15. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
16. **Ванько В.И, Ермошина О.В, Кувыркин Г.Н.** Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 488 с.
17. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.

Поступила 12.03.2015

Субботина Нина Николаевна
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
профессор кафедры прикладной математики,
ИМКН, Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: subb@uran.ru

Шагалова Любовь Геннадьевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: shag@imm.uran.ru