ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.938, 519.624.3

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ГРАММАТИКИ ХОМСКОГО[1] ДЛЯ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА[2]

А. А. Азамов, М. А. Бекимов

Обсуждаются одношаговые методы приближенного решения задачи Коши для динамических систем. Показывается, что в случае квадратичных систем можно предлагать алгоритм численного интегрирования высокой степени точности на основе формулы Тейлора. Дается явная оценка остаточного члена. Алгоритм основывается на порождающей грамматике Хомского для языка слагаемых формулы Тейлора.

Ключевые слова: динамическая система, квадратичная система уравнений, задача Коши, численное решение, формула Тейлора, остаточный член, оценка точности, алгоритм, КС-грамматика.

A. A. Azamov, M. A. Bekimov. An approximation algorithm for quadratic dynamic systems based on N. Chomsky's grammar for Taylor's formula.

Single-step methods for the approximate solution of the Cauchy problem for dynamic systems are discussed. It is shown that a numerical integration algorithm with a high degree of accuracy based on Taylor's formula can be proposed in the case of quadratic systems. An explicit estimate is given for the remainder term. The algorithm is based on N. Chomsky's generative grammar for the language of terms of Taylor's formula.

Keywords: dynamic system, quadratic system of equations, Cauchy problem, numerical solution, Taylor's formula, remainder term, error estimate, algorithm, context-free grammar.

В современной теории динамических систем многие результаты опираются на численное решение задачи Коши

$$dx/dt = f(x), \quad x(0) = x_0, \tag{0.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$ (см. [1;11–13]). Если оставить в стороне линейный случай, то наиболее простой, тем не менее, чрезвычайно важный класс динамических систем составляют квадратичные системы (см., например, [7], а также обзоры [10;17] по системам на плоскости), у которых компоненты f задаются в виде

$$f_i(x) = \sum_{j,k=1}^{d} a_i^{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^{d} b_i^j x_j + c_i, \tag{0.2}$$

где $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_d)$, все коэффициенты — константы. К этому классу относятся, например, модели Лотки — Вольтерры [14], системы Лоренца [1; 15] и Рёсслера [16]. Интерес к квадратичным системам обусловлен также 10-проблемой Гильберта [5].

При $d \geq 2$ система (0.2) за редкими исключениями не интегрируется. В связи с этим довольно часто ее свойства формулируются на основе численного решения. (Более того, в немалом количестве случаев строгое доказательство не предъявляется, поскольку авторы полагают достаточными выводы на основе численных экспериментов). Это обстоятельство обуславливает особое значение как удобства применяемого метода приближенного решения, так и порядка его точности. В большинстве случаев предпочитается одношаговый метод Рунге — Кутты, дающий численное решение с точностью h^N, $N = 2 \div 5$ (очень редко — порядка $N = 6$) на одном шаге [2; 8]. В принципе метод Рунге — Кутты применим для получения решения и с более высокой степенью точности, но на практике этого избегают, так как соответствующие формулы (уже для $N > 6$) становятся чрезмерно громоздкими.

---

[1] Noam Chomsky.

[2] Работа выполнена при поддержке ПФИ Республики Узбекистан (проект Ф4-ФА-Ф014).

В настоящей работе обсуждается схема приближенного решения задачи Коши для квадратичных систем, основанная на формуле Тейлора

$$x(t+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{(k)}(t)}{k!} h^k + R_{n+1}(t,\ h). \tag{0.3}$$

Формула (0.3) также не находит применения на практике, так как при $d \geq 2$ выражения $x^{(n)}$ через функцию f и ее производных являются еще более громоздкими по сравнению с методом Рунге — Кутты. Тем не менее оказывается, что в случае квадратичных систем ситуация резко упрощается. При этом для оценки остаточного члена удается вывести явную формулу, а для разложения Тейлора — предложить сравнительно простой алгоритм. Последний основан на том, что слагаемые в формуле для $x^{(n)}$ (которые здесь называются тейлоровыми слагаемыми) составляют язык над трехбуквенным алфавитом 0, 1, 2 с контекстно-свободной грамматикой Хомского [3; 9].

Предварительно разберем случай $d = 1$. Хотя в этом случае уравнение (0.1) решается в явном виде, рассуждения по вычислению тейлоровых слагаемых непосредственно переносятся к выводу оценки остаточного члена в общем случае.

В рассматриваемом случае для каждого x величины $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ являются числами, причем $f''(x) = \text{const}$. В дальнейшем эти выражения будем называть факторами и сокращенно будем писать в виде f, f', f'' за исключением случаев, когда это может привести к недоразумению.

Пусть числа D_n^k, где $n \geq 1$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]$ ($[a]$ обозначает целую часть a), определены рекуррентными соотношениями

$$D_n^0 = 1, \quad D_{n+1}^k = (n-2k+1)D_n^{k-1} + (n+1)D_n^k. \tag{0.4}$$

Легко установить, что $D_n^1 = 2^{n-1} - n$; кроме того, $2^{n-k} \leq D_n^k \leq 2^{n+k}$ при $n \geq 4$.

Предложение. *Имеет место формула*

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} D_n^k {f''}^k {f'}^{n-2k-1} f^{k+1}. \tag{0.5}$$

Доказывается аналогично формуле бинома Ньютона — индукцией по n на основе соотношений (0.4). При этом удобнее случаи четного и нечетного n рассматривать отдельно, так как при переходе от $x^{(n)}$ к $x^{(n+1)}$ в первом случае число тейлоровых слагаемых увеличивается на единицу, а во втором случае оно не меняется.

Для небольших значений n получим следующие формулы:

$$\dot{x} = f,\ \ \ddot{x} = f'f,\ \ x^{III} = f'^2 f,\ \ x^{IV} = f'^3 f + 4f''f'f^2,\ \ x^V = f'^4 f + 11f''f'^2 f^2 + 4f''^2 f^3,\ \ldots. \tag{0.6}$$

Отметим, что в каждом слагаемом степени f и f' однозначно определяются через n и степень f''.

Пусть теперь $d \geq 2$. В этом случае f является вектором, f' — матрицей Якоби (т. е. тензором $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ ранга $(1,1)$), а f'' — вектором из квадратичных форм (т. е. тензором $\dfrac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x^j \partial x^k}$ ранга $(1,2)$; [4; 6]). И в многомерном случае $f'' = \text{const}$. Однако на этот раз формула (0.5), вообще говоря, не имеет места. Например, выражение для x^{IV} будет иметь вид

$$x^{IV} = f'^3 f + 2f''f'ff + f''ff'f + f'f''ff,$$

а с учетом симметричности f'' по контравариантным индексам, т. е. соотношения $f''(u,v) = f''(v,u)$, — вид

$$x^{IV} = f'^3 f + 3f''f'ff + f'f''ff.$$

В общем случае $f''f'ff$ и $f'f''ff$ не обязательно совпадают. Например, для $f=(-y^2,\ x^2)$ окажется $f''f'ff=-4(x^3y^2,\ x^2y^3)$, $f'ff''f=-4(y^5,\ x^5)$.

Поэтому в формуле для $x^{(n)}$ тейлоровые слагаемые, содержащие фактор f''^k, не группируются в одночлены с коэффициентами D_n^k. Тем не менее схема доказательства предложения сохраняет силу для следующего утверждения.

Теорема 1. *Выражение для $x^{(n)}$ является суммой групп Δ_n^k тейлоровых слагаемых, $k=0,\,1,\,\ldots,[(n-1)/2]$. При этом группа Δ_n^k содержит D_n^k слагаемых, каждое из которых состоит из k, $n-2k-1$ и $k+1$ факторов f'',f',f соответственно.*

Пусть решение $x(t)$ задачи Коши $\dot{x}(t)=f(x)$, $x(0)=x_0$ существует на отрезке времени $[0,\ T]$ и удовлетворяет условию $x(t)\in K$, где T — заданное положительное число, K — заданное компактное множество в $\mathbb{R}^d$.

Положим

$$M_0=\max_{x\in K}|f(x)|\,,\quad M_1=\max_{x\in K}\left\|f'(x)\right\|,\quad M_2=\left\|f''(x)\right\|=\mathrm{const}$$

(нормы матрицы и квадратичной формы — евклидовы: $\|f'(x)\|=\max\limits_{|u|\le 1}|f'(x)u|\,,$ $\|f''(x)\|=\max\limits_{|u|\le 1,|v|\le 1,}f''(x)[u,v]$). Поэтому (см. [6; гл. 1, неравенство (1.8.2)])

$$\left|f'u\right|\le M_1\,|u|\,,\quad \left|f''[u,\ v]\right|\le M_2\,|u|\,|v|\,.$$

Отсюда следует, что каждое тейлоровое слагаемое из группы Δ_n^k допускает по норме оценку величиной ${M_2}^k{M_1}^{n-2k-1}{M_0}^{k+1}$. Поэтому справедлива

Теорема 2. *Для остаточного члена формулы Тейлора для решения задачи Коши для квадратичных систем имеет место*

$$|R_{n+1}|\le\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\sum_k D_{n+1}^k M_0^k M_1^{n-2k} M_2^k,\quad k=0,\,1,\,\ldots,\,[(n-1)/2].$$

Как уже было отмечено выше, в случае $d\ge 2$ для производных $x^{(n)}$ не удается вывести такую компактную формулу, как (0.5). Чтобы преодолеть эту сложность, выясним строение тейлоровых слагаемых в группах Δ_n^k. При этом удобно перейти к формальному языку, заменяя факторы f, f' и f'' цифрами 0, 1, 2 соответственно. Тогда каждое тейлоровое слагаемое превращается в слово над трехбуквенным алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$. Те слова, которые получаются из тейлоровых слагаемых после такой замены, чтобы отличить от слов вообще над алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$, будем называть d-словами. Совокупность d-слов образует язык (в смысле Н. Хомского), который обозначим $\mathcal{T}$. (Обычно в язык включают и пустое слово Λ, не содержащее символов.) В дальнейшем длину, т. е. число символов слова σ, будем обозначать $|\sigma|$. Язык $\mathcal{T}$ имеет простую порождающую грамматику: из правил $\dfrac{d}{dt}f(x)=f'(x)f(x)$ и $\dfrac{d}{dt}f'(x)u=f''(x)[f(x),\ u]$, где $u\in\mathbb{R}^d$, вытекает, что $\mathcal{T}$ порождается двумя правилами

$$0\to 10,\quad 1\to 20, \tag{0.7}$$

начиная со слова 0. Правила (0.7) означают, что если в d-слове σ вместо 0 подставить 10 или вместо единицы — 20, то снова получим d-слово (длины $|\sigma|+1$). Таким образом, язык $\mathcal{T}$ имеет контекстно-свободную грамматику.

На языке $\mathcal{T}$ формулы (0.6) запишутся более наглядно в виде дерева:

$$\begin{array}{c}
0\\
\downarrow\\
10\\
\swarrow\quad\searrow\\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}200\\ \swarrow\ \searrow\\ 2100\quad 2010\end{array} &
\begin{array}{c}110\\ \swarrow\ \downarrow\ \searrow\\ 2010\quad 1200\quad 1110\end{array}
\end{array}
\end{array}.$$

Один из основных вопросов математической лингвистики — дать критерий принадлежности слова над данным алфавитом к рассматриваемому языку. В случае языка $\mathcal{T}$ он имеет простой ответ.

Теорема 3. *Слово σ над алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$ принадлежит языку $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда*

a) *заканчивается цифрой* 0;

b) *число нулей на единицу больше числа цифр* 2;

c) *если занумеровать цифры* 2 *в порядке арабского письма (т. е. справа налево), то на правой стороне от j-й цифры* 2 *находится не менее $k+1$ цифр* 0.

Доказательство. То, что все d-слова обладают свойствами a)−c), непосредственно следует из правил (0.7). Проверим достаточность. Для слов длины 1 и 2 это очевидно. Пусть σ — слово над алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$ длины $n,\ n \geq 3$, обладающее свойствами a)−c). Тогда оно должно иметь вид $\sigma = \rho\varepsilon 0_k$, где 0_k — слово из $k,\ k \geq 1$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = 2$, ρ — подслово длины $n-k-1$. В случае $\varepsilon = 1$ в слове σ подслово 10_k заменим на подслово 0_k, а в случае $\varepsilon = 2$ (тогда необходимо $k \geq 2$) подслово 20_k — на подслово 10_{k-1}. Полученное слово σ' имеет длину $n-1$ и для него по-прежнему свойства a)−c) имеют место. Поэтому оно принадлежит $\mathcal{T}$. Поскольку σ получится из σ' по одному из правил (0.7), то $\sigma \in \mathcal{T}$.

Можно построить несложную процедуру $Extract(n,\ \sigma; x)$, позволяющую вычислить значение соответствующего d-слова σ длины n тейлорового слагаемого в точке x. Например,

$$Extract(1,0;x) = f(x),\ Extract(2,10;x) = f'(x)\,f(x),$$

$$Extract(7,1202010;x) = f'(x)f''(x)\{f(x), f''(x)[f(x), f'(x)f(x)]\}.$$

Язык $\mathcal{T}$ применяем к приближенному вычислению $x(t+h)$, исходя из заданного значения $x(t)$ с ошибкой на одном шаге порядка h^{N+1}. С целью описания соответствующего алгоритма введем следующую операцию. Пусть L — некоторый список (массив) d-слов. Заменив каждое слово $\sigma \in L$ набором d-слов длины $|\sigma|+1$ путем применения правил (0.7) ко всем цифрам 0 и 2 в слове σ по одному разу, получим новый список, который обозначим DL.

Приняв $n = 0,\ L = \langle 0\rangle,\ H = h,\ S = x(t)$, вычислим $\Sigma = \sum_{\sigma\in L} Extract(n,\ \sigma; x(t))$ и положим $S = x(t) + H\Sigma$. Затем перейдем к рассмотрению шага $n := n+1$. Если $n \geq N$, то вычисление завершается значением $x(t+h) = S$. В противном случае образуем список $L := DL$ и, положив $H := Hh/n$, перейдем к вычислению Σ и S. $\square$

Примечание. С языком $\mathcal{T}$ связан специальный фрактал в гильбертовом пространстве l_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аносов Д.В.** Лоренца аттрактор // Математическая энциклопедия / ред. И. М. Виноградов. М.: Советская энциклопедия, 1982. Т. 3. С. 451.
2. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1973. 632 с.
3. **Гладкий А.В.** Формальные грамматики и языки. М.: Наука, 1973. 368 с.
4. **Зорич В.А.** Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.
5. **Ильяшенко Ю.С.** Избранные задачи теории динамических систем. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 124 с.
6. **Картан А.** Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
7. **Artes J.C., Llibre J.** Quadratic Hamiltonian vector fields // J. Diff. Equations. 1994. Vol. 107. P. 80–95.
8. **Butcher J.C.** Numerical methods for ordinary differential equations. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons Ltd., 2008. 482 p.
9. **Chomsky N.** Three models for the description of language // IRE Transactions on Information Theory. 1956. Vol. 2. P. 113–124.

10. **Coppel W.A.** A survey of quadratic systems // J. Diff. Equations. 1966. Vol. 2. P. 293–304.
11. **Guckenheimer J.** Computational environments for exploring dynamical systems // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 1991. Vol. 1, no. 2. P. 269–276.
12. **Guckenheimer J.** Numerical analysis of dynamical systems // Handbook of Dynamical Systems. Amsterdam, 2002. Vol. 2. P. 345–390.
13. **Guckenheimer J.** Phase portraits of planar vector fields: computer proofs // Experiment. Math. 1995. Vol. 4, no. 2. P. 153–165.
14. Lotka-Volterra and related systems / eds. Sh. Ahmad, I.M. Stamova. Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2013. 236 p.
15. **Pchelintsev A.N.** Numerical and physical modelling of the dynamics of Lorenz system // Numerical analysis and Applications. 2014. Vol. 7, no. 2. P. 159–167.
16. **Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.** Rössler attractor // Chaos and fractals: New frontiers of science. New York: Springer, 2004. P. 636–646.
17. **Reyn J.W.** A bibliography of the qualitative theory of quadratic systems of differential equations in the plane. Report. Delft: Delft University of Technology, 1987. 223 p.
URL: http://ta.twi.tudelft.nl/DV/Staff/Reyn/ .

Азамов Абдулла Азамович
Поступила 16.02.2015
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com

Бекимов Мансур Адамбаевич
старший науч. сотрудник-соискатель
Институт математики Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека
e-mail: mansu@mail.ru