ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.955

О СВЯЗИ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ С НЕКОТОРЫМИ СИСТЕМАМИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. С. Розанова

Мы показываем, что с уравнением Гамильтона — Якоби при некоторых условиях на гамильтониан может быть ассоциирована квазилинейная система уравнений первого порядка, которая сводится к векторному уравнению Хопфа. Найдена связь между системой инвариантов Римана и специально конструируемым уравнением Гамильтона — Якоби. Результат иллюстрирован примерами системы уравнений изэнтропической газовой динамики и системы уравнений хроматографии. Показано, что при помощи метода стохастического возмущения вдоль характеристик с уравнением Гамильтона — Якоби можно связать некоторую систему законов сохранения.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона — Якоби, уравнение Хопфа, система инвариантов Римана, вязкостная регуляризация, стохастическая регуляризация.

O. S. Rozanova. On the connection of the Hamilton–Jacobi equation with some systems of quasilinear equations.

We show that the Hamilton–Jacobi equation with some conditions on the Hamiltonian can be associated with a quasilinear system of equations of the first order, which can be reduced to the vector Hopf equation. We find relations between the system of Riemann invariants and a specially constructed Hamilton–Jacobi equation. The result is illustrated with examples of a system of isentropic gas dynamics equations and a system of equations of chromatography. It is shown that the method of stochastic perturbations along characteristics allows to associate with the Hamilton–Jacobi equation a system of conservation laws.

Keywords: Hamilton–Jacobi equation, Hopf equation, system of Riemann invariants, viscous regularization, stochastic regularization.

1. Введение

Связь между уравнениями Гамильтона — Якоби (ГЯ) и квазилинейными системами уравнений первого порядка совершенно естественна: такие системы получаются как дифференциальное следствие уравнения ГЯ, где в качестве неизвестного выступает градиент решения уравнения ГЯ. Определения классических и обобщенных решений, а также формулы для представления решений уравнения ГЯ и дифференциальных следствий из них связаны. Таким образом, если для некоторой квазилинейной системы уравнений удается найти уравнение ГЯ такое, что система является дифференциальным следствием этого уравнения, то решение ее можно выразить через решение уравнения ГЯ и наоборот.

Самым известным примером такого рода связей является уравнение Гамильтона — Якоби

$$\Psi_t + \frac{|\nabla_x \Psi|^2}{2} = 0, \quad \Psi = \Psi(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

и его дифференциальное следствие, многомерное уравнение Хопфа для потенциальной вектор-функции $q = q(t,x) = \nabla_x \Psi(t,x)$, $q \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(q_i)_t + \sum_{j=1}^{n} q_j \, (q_i)_{x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

или, в более короткой записи,

$$q_t + (q, \nabla_x)\, q = 0. \tag{1.2}$$

Последнее уравнение описывает скорость свободно движущихся частиц и играет важную роль в различных математических и физических задачах. Оно появляется при описании неравновесных процессов различного масштаба. На микроуровне это молекулярные явления, на мезоуровне — движение жидкости со свободными границами, на макроуровне — процессы эволюции галактик [1]. Самой интересной чертой уравнения Хопфа является возникновение особенностей первоначально гладкого решения, в частности, структура этих особенностей.

В случае одной пространственной переменной уравнение (1.2) имеет очень простой вид и считается “эталонным” уравнением, которое представляется в виде закона сохранения,

$$q_t + \frac{(q^2)_x}{2} = 0. \tag{1.3}$$

Для него вводится понятие обобщенного решения в виде ударной волны, возникают условие Ранкина — Гюгонио на ударной волне и условие устойчивости (допустимости) разрыва [2]. Также хорошо известно [3; 4], что обобщенное решение (1.3) может быть получено при помощи метода исчезающей вязкости (или вязкостной регуляризации). Этот метод состоит в том, что вместо гиперболического уравнения (1.3) рассматривается уравнение параболического типа

$$q_t + \frac{(q^2)_x}{2} = \mu q_{xx}, \quad \mu = \text{const} > 0, \tag{1.4}$$

сводящееся к уравнению теплопроводности

$$z_t = \mu z_{xx}.$$

Поэтому решение его оказывается бесконечное число раз дифференцируемым, задача Коши для (1.4) в классе функций, растущих на бесконечности не более чем линейным образом, допускает явное интегральное представление и в пределе при $\mu \to 0$ сходится к устойчивому обобщенному решению (1.3). В процессе сведения возникает уравнение

$$\Psi_t + \frac{\Psi_x^2}{2} = \mu \Delta_x \Psi, \quad \Psi_x = q, \tag{1.5}$$

решение которого переводится в уравнение теплопроводности при помощи замены Коула — Хопфа $\Psi = -2\mu \ln z$. В пределе решение задачи Коши для (1.5) с начальными данными, имеющими не более чем квадратичный рост на бесконечности, при $\mu \to 0$ сходится к обобщенному (слабому) решению уравнения ГЯ $\Psi_t + \Psi_x^2/2 = 0$, так что (1.5) является вязкостной регуляризацией соответствующего уравнения ГЯ. Более того, то же слабое решение является минимаксным решением [5; 6], оно также может быть получено на основе вариационного принципа [7, с. 100].

Теория построения обобщенных решений уравнений ГЯ общего вида на основе вязкостной регуляризации, состоящей в добавлении малого диффузионного члена, существует с середины 70-х годов [8–11]. В случае одной пространственной переменной эта теория практически эквивалентна ранее возникшей теории гиперболических законов сохранения, развитой в 50-е годы [3; 12; 13]. Для случая многих пространственных переменных эти теории расходятся. Тем не менее в некоторых специальных случаях параллели между ними по-прежнему существуют. Уравнения (1.1) и (1.2) — очевидный пример этого. Действительно, система (1.2) может быть записана в консервативной форме

$$q_t + \nabla_x \Big(\frac{|\nabla_x \Psi|^2}{2} \Big) = 0, \tag{1.6}$$

что дает возможность определить ее обобщенное решение в смысле интегрального тождества стандартным образом [2; 14]. Дальнейшая процедура регуляризации абсолютно аналогична случаю одной пространственной переменной. А именно после добавления в правую часть члена со вторыми производными мы получим уравнение Бюргерса

$$q_t + (q, \nabla_x)\, q = \mu \Delta_x q, \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \quad q \in \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

и с учетом потенциальности q регуляризованное уравнение Гамильтона — Якоби

$$\Psi_t + \frac{|\nabla_x \Psi|^2}{2} = \mu \Delta_x \Psi,$$

которое при помощи замены Коула — Хопфа переводится в уравнение теплопроводности

$$z_t = \mu \Delta_x z$$

и, следовательно, допускает явное представление решения для произвольных интегрируемых начальных данных с не более чем линейным ростом на бесконечности по пространственным переменным [15]. Обобщенное решение в смысле интегрального тождества системы (1.2) (и, соответственно, уравнения (1.1)) может быть найдено как поточечный предел при $\mu \to 0$ решения уравнения (1.7).

Случай уравнения Хопфа и соответствующего ему уравнения ГЯ кажется очень специальным. На первый взгляд, получить явную асимптотическую формулу для представления решения для уравнений ГЯ более общего вида, равно как и для систем квазилинейных уравнений более общего вида, не представляется возможным.

Мы собираемся показать, что это не так и асимптотические представления обобщенных решений задачи Коши могут быть получены для широкого класса уравнений ГЯ с выпуклым по градиенту решения гамильтонианом. Среди квазилинейных систем уравнений первого порядка, для которых, как следствие, может быть получено явное асимптотическое представление обобщенного решения, — любая система, обладающая инвариантами Римана и дополнительным законом сохранения.

Практически все результаты этой статьи могут быть названы "вариациями на тему векторного уравнения Хопфа". Идея состоит в том, чтобы найти классы уравнений, которые при помощи дополнительных соображений сводятся к уравнению Хопфа и поэтому к ним можно применить уже существующий аппарат представления решения. Самым приятным следствием возможности сведения к уравнению Хопфа является то, что нам не надо заново выстраивать доказательство трудного факта того, что решение регуляризованного уравнения сходится при стремлении параметра вязкости к нулю к обобщенному решению исходного уравнения.

Мы также покажем, что при построении стохастического возмущения решений уравнения ГЯ вдоль характеристик также возникает система квазилинейных уравнений, но на совершенно иных принципах. Это система уравнений баланса (или, в предельном случае, система уравнений законов сохранения), связанная с уравнением Колмогорова — Фоккера — Планка для плотности распределения некоторых случайных величин. На этом пути также можно получить формулу для представления решения, правда, только классического.

2. Уравнение Гамильтона — Якоби: вязкостная регуляризация и асимптотическое представление решения задачи Коши

Рассмотрим задачу

$$u_t + H(\nabla_x u, x) = 0, \quad u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad u(x,0) = u^0(x). \tag{2.1}$$

Обозначим $p = \nabla_x u$. Будем считать, что начальное данное является липшицевой функцией, а гамильтониан — гладкой функцией такой, что

$$\det H_{pp}(p,x) = \det\Big(\frac{\partial^2 H(p,x)}{\partial p_i \partial p_j}\Big) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{2.2}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} H_{p_j}\, H_{p_i x_j} = \sum_{j=1}^{n} H_{p_i p_j}\, H_{x_j}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

Ниже будем обозначать как H_p и H_x векторы частных производных функции $H(p,x)$ по аргументам p и x, а как $\nabla_x \Phi$ вектор полных производных некоторой функции $\Phi(u,p,x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть гамильтониан $H(p,x)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является функцией класса $\mathcal{C}^2$, удовлетворяющей условиям (2.2) и (2.3), существует функция $\Phi(u,p,x)$ такая, что $H_p = \nabla_x \Phi$, а начальное данное $u^0(x)$ таково, что*

$$|H_p(\nabla_x u^0(x), x)| = o(|x|), \quad |x| \to \infty. \tag{2.4}$$

Тогда обобщенное решение задачи Коши (2.1) может быть получено как предел при $\mu \to 0$ функции

$$u_\mu(t,x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} H_{pp}^{-1}\, q_\mu(t,\xi)\, d\xi_i \right),$$

где

$$q_\mu(t,x) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\dfrac{x-\xi}{t}\Big) \exp\Big(-\dfrac{\lambda(t,x,\xi)}{2\mu}\Big)\, d\xi}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\dfrac{\lambda(t,x,\xi)}{2\mu}\Big)\, d\xi}, \tag{2.5}$$

$$\lambda(t,x,\xi) = \Phi(0,\xi) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{2t}. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В предположении достаточной гладкости решения взятие градиента от (2.1) приводит к системе

$$p_t + H_p(p,x)\, p_x + H_x(p,x) = 0, \tag{2.7}$$

т. е.

$$(p_i)_t + \sum_{j=1}^{n} H_{p_j}(p,x)\, (p_i)_{x_j} + H_{x_i}(p,x) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

с начальными данными

$$p(x,0) = p^0(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Здесь мы использовали свойство $(p_j)_{x_i} = (p_i)_{x_j}$.

Зададимся вопросом о том, при каких дополнительных условиях на гамильтониан существует гладкая невырожденная замена переменных $q = G(p,x)$ такая, что в новых переменных система (2.7) совпадет с уравнением Хопфа (1.6), где $q = \nabla_x \Phi$. Последнее требование существенно, только если число пространственных переменных более одной. Тогда есть возможность найти обратимую замену $p = G^{-1}(q,x)$ и решение задачи (2.1) восстанавливается как потенциал этого векторного поля.

Подстановка $q = G(p,x)$ в (1.2) дает

$$G_p p_t + G\,(G_p\, p_x + G_x) = 0, \tag{2.8}$$

где матрицы G_p и G_x определяются как $(G_p)_{ij} = \dfrac{\partial G_i}{\partial p_j}$ и $(G_x)_{ij} = \dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}$. Умножим (2.7) на G_p слева, получив

$$G_p p_t + G_p H_p\, p_x + G_p H_x = 0. \tag{2.9}$$

Сравнив (2.9) и (2.8), мы видим, что $G = H_p$, а

$$G\,G_x = G_p\,H_x,$$

что соответствует условию (2.3).

Таким образом, мы свели задачу к уравнению (1.6), условия (2.4) обеспечивают применимость стандартного интегрального представления для решения уравнения теплопроводности, к которому сведется соответствующее уравнение Бюргерса (1.7). Формулы (2.5), (2.6) получаются из этого представления при помощи элементарных выкладок. □

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно проверить, что условию (2.3) удовлетворяет любой гамильтониан вида

$$H(p,x) = \Phi(p_1 - \phi_1(x_1), \dots, p_n - \phi_n(x_n)),$$

где $\phi_i(x_i)$ — произвольные дифференцируемые функции одной переменной, $i = 1, \dots, n$, а Φ — произвольная дважды дифференцируемая функция n переменных. В частности, всякий достаточно гладкий гамильтониан, не зависящий от пространственных переменных, удовлетворяет условию (2.3).

З а м е ч а н и е 2. Условие потенциальности преобразованного векторного поля $G(p,x)$, имеющее вид $H_p = \nabla_x \Phi$, конечно, является очень ограничительным в пространстве многих переменных. Однако, как следует из результатов разд. 4, асимптотическую формулу для гладкого решения можно получить и без требования потенциальности.

3. Уравнение Гамильтона — Якоби, ассоциированное с системой инвариантов Римана

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений, записанную в инвариантах Римана, т. е.

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + f_i(r_1, \dots, r_n)\frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

для функций $r_i = r_i(t,x)$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Предположим, что заданы начальные условия

$$r(0,x) = r^0(x) = (r_1^0(x), \dots, r_n^0(x)) \tag{3.2}$$

такие, что

$$|f_i(r^0(x))| = o(|x|), \quad |x| \to \infty, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.3}$$

Пусть $f(r) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие

$$\det\Big(\frac{\partial f_i(r)}{\partial r_j}\Big) \neq 0, \quad i,j = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Хорошо известно, что всякая квазилинейная гиперболическая система $u_t + A(u)u_x = 0$, где $u = u(t,x)$ — это n-вектор $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, а $A(u)$ — $(n \times n)$-матрица с гладкими коэффициентами, может быть записана в инвариантах Римана в случае $n = 2$. При $n = 3$ это возможно тогда и только тогда, когда левый собственный вектор l_k матрицы A удовлетворяет условию $\operatorname{rot} l_k = 0$ либо $l_k \cdot \operatorname{rot} l_k = 0$ [16].

В [17] получен простой критерий наличия инвариантов Римана, который состоит в проверке тождественного равенства нулю некоторого тензора, включающего строящийся по матрице A так называемый тензор Нейенхейса [18].

Среди физически значимых систем квазилинейных уравнений, допускающих запись в инвариантах Римана, — уравнения изэнтропической газовой динамики, уравнения мелкой воды, уравнения электрофореза и хроматографии [19–21].

Отталкиваясь от (3.1), построим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k(q_1, \ldots, q_n) \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.5}$$

где $q_i(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим соответствующие начальные данные

$$q(0, x) = q^0(x) = (q_1^0(x), \ldots, q_n^0(x)). \tag{3.6}$$

Предположим, что x_i, $i = 1, \ldots, n$, в свою очередь, являются функциями от одной переменной $\bar{x} \in \mathbb{R}$. В этом случае система (3.5) перепишется как

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k(q_1, \ldots, q_n) \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \frac{d x_k(\bar{x})}{d \bar{x}} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Положим

$$q_i(t, 0, \ldots, \underbrace{\bar{x}}_{i\text{-е место}}, \ldots, 0) := r_i(t, \bar{x}) \tag{3.7}$$

и

$$q_i^0(0, \ldots, \underbrace{\bar{x}}_{i\text{-е место}}, \ldots, 0) := r_i^0(\bar{x}), \tag{3.8}$$

$i, m = 1, \ldots, n$. Тогда $\dfrac{\partial q_i}{\partial x_m} = 0$, $i \neq m$, и вектор-функция $r(t, \bar{x})$ является решением задачи (3.1), (3.2).

Сведем (3.5) к уравнению Хопфа (1.2) подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Векторное уравнение (3.5) имеет вид

$$\partial_t q + (f(q), \nabla) q = 0, \tag{3.9}$$

где $q(t, x) = (q_1, \ldots, q_n)$ — вектор-функция $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f(q)$ — невырожденное в силу (3.4) отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, его якобиан удовлетворяет условию $\det \dfrac{\partial f_i(q)}{\partial q_j} \neq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Умножив (3.9) слева на матрицу $\dfrac{\partial f_i(q)}{\partial q_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, получим уравнение Хопфа для вектор-функции $f(q)$:

$$\partial_t f(q) + (f(q), \nabla_x) f(q) = 0.$$

Для того чтобы иметь возможность построить вязкостную регуляризацию обобщенного решения уравнения (3.5) на основе преобразования Коула — Хопфа, надо предположить, что векторное поле $f(q)$ потенциально, т. е. существует скалярная функция $\psi(t, x)$ такая, что $\nabla_x \psi = f(q)$. Легко видеть, что конструкция (3.7) сводит это условие к условию потенциальности векторного поля $f(r)$, т. е. $f(r) = \nabla_r \Psi(r)$.

Тогда решение задачи (3.5), (3.6) может быть получено как предел при $\mu \to 0$ выражения

$$q_\mu(t, x) = f^{-1}(Y), \quad Y = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{x - \xi}{t}\right) \exp\left(-\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu}\right) d\xi}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\lambda(t, x, \xi)}{2\mu}\right) d\xi}, \tag{3.10}$$

$$\lambda(t, x, \xi) = \psi(0, \xi) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{2t}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Уравнение ГЯ, дифференциальным следствием которого является система (3.5), имеет вид

$$u_t + \Psi(\nabla_x u) = 0, \quad \nabla_x u = q, \tag{3.12}$$

от задачи (3.5), (3.6), (3.8) наследуются начальные данные

$$u^0(x) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} r_i^0(\eta)\, d\eta. \tag{3.13}$$

Наши рассуждения подытоживает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3.3),(3.4) *и существует скалярная функция* $\Psi(r)$ *такая, что* $\nabla_r \Psi(r) = f(r)$. *Тогда решение задачи Коши* (3.1), (3.2) *имеет следующий вид*:

$$r_i(t, \bar{x}) = q_i(t, x)|_{\{x_j = 0,\, x_i = \bar{x}\}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \neq i,$$

где вектор-функция $q = \nabla_x u$, u *— решение задачи* (3.12), (3.13).

Вектор-функция $q(t, x)$ *может быть найдена как следующий предел*:

$$q(t, x) = \lim_{\mu \to 0} q_\mu(t, x),$$

где $q_\mu(t, x)$ *задана формулами* (3.10), (3.11), (3.8) *и* $\psi(0, \xi) = \Psi(q^0(\xi))$. □

Обратим внимание, что после образования разрыва решения предел $q(t, x) = \lim\limits_{\mu \to 0} q_\mu(t, x)$ тоже задает решение системы (3.1), (3.2). Система (3.1) имеет неконсервативный вид, поэтому для получения условий Ранкина — Гюгонио на разрывах приходится использовать расширенную систему (3.5).

З а м е ч а н и е 3. Нетрудно проверить, что потенциальность вектора $f(r)$ означает существование закона сохранения

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i \Big)_t + ((\Psi(r))_x = 0.$$

З а м е ч а н и е 4. Интегральную формулу, которая дает асимптотическое представление *гладкого* решения произвольной системы инвариантов Римана без требования потенциальности векторного поля $f(r)$, можно получить, основываясь на идее стохастического возмущения решения вдоль характеристик [22]. Такой метод применим для систем уравнений, которые могут быть сведены к уравнению Хопфа без требования потенциальности поля скоростей. Неудивительно, что он перестает работать (дает решение другой системы) после момента образования особенности. Действительно, если поле скоростей в уравнении Хопфа не потенциально, то это уравнение нельзя записать в дивергентной форме и, следовательно, нельзя определить обобщенное решение в смысле интегрального тождества. Однако решение уравнения, полученного в результате добавления вязкого регуляризирующего члена, стремится при исчезновении вязкости именно к этому обобщенному решению в смысле интегрального тождества исходной системы. Поэтому необходимо привлекать дополнительные соображения, чтобы иметь возможность включить нужное решение в систему некоторых законов сохранения и на их основе строить обобщенное решение. Подробнее об этом можно прочитать в [23]. В разд. 4 мы построим асимптотическую формулу для гладкого решения уравнения ГЯ, основываясь на методе стохастических возмущений.

3.1. Пример 1: уравнения изэнтропической газовой динамики

Как известно, уравнения движения политропного газа в случае постоянной энтропии представляют собой законы сохранения массы и момента. Они имеют вид (см. [19, с. 154])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$P = \frac{K^2}{\gamma}\rho^\gamma.$$

Здесь $\rho(t,x)$ — плотность, $v(t,x)$ — скорость, $P(t,x)$ — давление, K — положительная константа, константа $\gamma > 1$ — показатель адиабаты. Эта система может быть записана в инвариантах Римана следующим образом [19, с. 175]:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial \rho s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial \rho r}{\partial x} = 0, \tag{3.14}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4},$$

$$s = v - \phi(\rho) = v - \frac{2}{\gamma - 1}c(\rho), \quad r = v - \phi(\rho) = v + \frac{2}{\gamma - 1}c(\rho), \quad c^2(\rho) = P'(\rho).$$

Исходные переменные восстанавливаются по инвариантам Римана как

$$v = \frac{r+s}{2}, \quad c(\rho) = \frac{\gamma - 1}{4}(r - s).$$

В данной ситуации $G_1 = \alpha s + \beta r$, $G_2 = \alpha r + \beta s$, $\dfrac{\partial G_1}{\partial r} = \dfrac{\partial G_2}{\partial s} = \beta$, поэтому $H_p = (G_1, G_2)$, $p = (s,r)$, $H(s,r) = \alpha\dfrac{s^2 + r^2}{2} + \beta sr$, $H_{pp} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $|H_{pp}| \neq 0$. Таким образом, с системой (3.14) ассоциировано уравнение Гамильтона — Якоби для функции $u(t,x,y)$:

$$u_t + \alpha\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \beta u_x u_y = 0, \quad u_x = s, \quad u_y = r.$$

Нетрудно проверить, что вязкостной резуляризацией, допускающей явное представление для исходной системы (3.14), является стандартное добавление члена со вторыми производными:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial s}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial r}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

3.2. Пример 2: уравнения нелинейной хроматографии

Уравнения, описывающие прохождение n-компонентной смеси веществ по хроматографической колонке в пренебрежении диффузией и временем установления сорбционного равновесия, имеют вид законов сохранения количества вещества для каждой из компонент [19, с. 661; 21; 24]:

$$V_0(c_i)_x + (c_i + a_i(c))_t = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь V_0 — скорость движения газа-носителя, предполагаемая постоянной, $c_i = c_i(,t)$ — концентрация i-й компоненты смеси в газе-носителе (неотрицательная величина), $a_i(c)$ — концентрация сорбированной i-й компоненты. Перейдя к новой независимой переменной $\tau = V_0 t - x$, получим

$$(c_i)_x + (a_i(c))_\tau = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Для того чтобы система приняла замкнутый вид, необходимо задать изотерму сорбции, т. е. явный вид зависимости $a_i(c)$. Чтобы получить явное выражение для инвариантов Римана, предположим [25], что

$$a_i = \frac{\Gamma_i c_i}{\Big(1 + \sum_{k=1}^n (\Gamma_k c_k)^{1/\lambda}\Big)^{\lambda}}, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.16}$$

где Γ_i — константы, предполагающиеся различными. При $\lambda = 1$ эта зависимость соответствует простейшей и наиболее изученной классической изотерме Ленгмюра. Отметим, что иногда изотерму Ленгмюра представляют в несколько ином виде, вводя новые обозначения. Мы следуем работе [25], где доказано, что система (3.15), (3.16) допускает запись в инвариантах Римана $R_i(t,x)$:

$$(R_i)_t + \frac{1}{R_i}\bigg(\frac{\prod_{k=1}^n \Gamma_k}{\prod_{k=1}^n R_k}\bigg)^{\lambda}(R_i)_x = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.17}$$

причем

$$c_i = \mu_i \bigg(\frac{\prod_{k=1}^n (R_k - \Gamma_i)}{\prod_{k=1}^n R_k}\bigg)^{\lambda}, \quad \mu_i = \frac{1}{\Gamma_i}\bigg(-\prod_{k=1,\, k\neq i}^{n}\Big(1 - \frac{\Gamma_i}{\gamma_k}\Big)\bigg)^{-\lambda}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Инварианты Римана не обращаются в ноль, поэтому запись системы (3.17) корректна.

В [25] рассмотрены случаи других изотерм, также допускающих запись в инвариантах Римана, которые мы здесь не будем рассматривать.

Следует отметить, что приведение к инвариантам Римана возможно лишь в той области изменения переменных, где система (3.15) является гиперболической, что требует дополнительного условия на коэффициенты. Ниже мы будем считать, что эти условия выполнены.

Таким образом, $R = (R_1, \dots, R_n)$,

$$G_i(R) = \frac{1}{R_i}\bigg(\frac{\prod_{k=1}^n \Gamma_k}{\prod_{k=1}^n R_k}\bigg)^{\lambda}.$$

Легко проверить, что $\dfrac{\partial G_i}{\partial R_j} = \dfrac{\partial G_j}{\partial R_i}$, $i \neq j$, поэтому существует функция $H(p)$, где $p = R$, такая, что $H_p = (G_1, \dots, G_n)$, $H(p) = -\dfrac{1}{\lambda}(\prod_{k=1}^n \Gamma_k)^{\lambda}/(\prod_{k=1}^n p_k)^{\lambda}$. Кроме того, можно проверить, что $|H_{pp}| = \det H_{R_i\,R_j} = \det\Big(\dfrac{\partial G_i(R)}{\partial R_j}\Big) \neq 0$. Таким образом, с системой (3.17) ассоциировано уравнение Гамильтона — Якоби для функции $u(t,x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$u_t - \frac{1}{\lambda}\frac{(\prod_{k=1}^n \Gamma_k)^{\lambda}}{(\prod_{k=1}^n u_{x_k})^{\lambda}} = 0.$$

Если мы хотим получить асимптотическую формулу для представления решения исходной системы инвариантов Римана, то соответствующая вязкостная регуляризация будет иметь вид

$$(R_i)_t + \frac{1}{R_i}\bigg(\frac{\prod_{k=1}^n \Gamma_k}{\prod_{k=1}^n R_k}\bigg)^{\lambda}(R_i)_x = \mu H^{-1}_{R_i\,R_j}\,(G_j(R))_{xx},$$

$$H^{-1}_{R_i\,R_j} = \Big(\frac{\partial G_i(R)}{\partial R_j}\Big)^{-1}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

З а м е ч а н и е 5. В теории электрофореза возникают уравнения, очень тесно связанные с уравнениями хроматографии (см. [20;26]), также допускающие запись в инвариантах Римана.

4. Метод стохастических возмущений для уравнения Гамильтона — Якоби

В этом разделе мы применим к уравнению ГЯ метод стохастических возмущений, использованный ранее для исследования свойств решений задачи Коши для уравнения Хопфа [23; 27; 28].

Снова рассмотрим задачу (2.1). Будем считать, что $H(p,x) \in \mathcal{C}^2$, обозначим $p = \nabla_x u$, $p^0(x) = \nabla_x u^0(x)$.

Первый путь состоит в том, чтобы воспользоваться результатами теоремы 1, в которой указаны условия на гамильтониан, позволяющие свести задачу к решению уравнения Хопфа (1.2) без условия потенциальности, а затем применить результаты, касающиеся стохастической регуляризации этого уравнения [23]. На этом пути возникнет пара законов сохранения массы и момента, где в роли "скорости" выступает вектор $q = G(p,x)$. Это хорошо известная система газовой динамики "без давления". Введение стохастического возмущения до момента образования особенности гладкого решения аналогично введению вязкости, а после момента образования особенности к вязкости добавляется еще и некоторый интегральный член, аналогичный давлению. Асимптотическое представление, полученное на этом пути, сходится при стремлении к нулю параметра стохастического возмущения к решению уравнения Хопфа только до момента возникновения особенности, а потом является частью решения другой задачи. Если "скорость" q оказывается потенциальной, конечно же, предпочтительнее применение метода, описанного в разд. 2, поскольку этот метод дает асимптотическую формулу также и для обобщенного решения.

Продемонстрируем второй путь. Запишем систему $2n+1$ стохастических дифференциальных уравнений, представляющую собой стохастическое возмущение характеристических уравнений:

$$dX = H_p(P,X)\,dt + \sigma\,dW, \quad dP = -H_x(P,X)\,dt,$$
$$dU = \big((P,\,H_p(P,X)) - H(P,X)\big)\,dt + \sigma\,dW,$$
$$X(0) = x, \quad P(0) = p, \quad U(0) = u, \quad (x,p,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Здесь X, P — n-мерные случайные величины, U — одномерная случайная величина, W — n-мерное броуновское движение, σ — положительная константа. Уравнение Колмогорова—Фоккера—Планка [29] для функции $F(t,x,p,u)$ (совместной плотности распределения вероятностей случайных величин (X,P,U)) имеет вид

$$F_t + (H_p(p,x)\,,\,F_x) - (H_x(p,x)\,,\,F_p) + \big((p\,,\,H_p(p,x)) - H(p,x)\big)\,F_u$$
$$= \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\Delta_x F + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,F_{uu}. \tag{4.1}$$

Поставим начальное условие

$$F(0,x,v,u) = \rho^0(x)\,\delta(p - p^0(x))\,\delta(u - u^0(x)), \tag{4.2}$$

где $\rho^0(x)$ — произвольная непрерывная функция, имеющая смысл плотности начального распределения случайной величины X и поэтому предполагаемая интегрируемой по $\mathbb{R}^n$, $p^0(x) = \nabla_x u^0(x)$.

4.1. Представление гладкого решения уравнения Гамильтона — Якоби

Для произвольного гамильтониана $H(p,x)$ решить задачу (4.1), (4.2) удается не всегда, однако если зависимость от x отсутствует, то явное представление решения этой задачи Коши существует. Для его нахождения нужно сделать преобразование Фурье по переменным x и u, решить полученное уравнение и сделать обратное преобразование Фурье. Мы не будем приводить выкладки, они совершенно аналогичны тем, что проведены в [22] или [30].

Рассмотрим функцию вида

$$u_\sigma(x,t) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} u\,F(t,x,p,u)\,dp\,du}{\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} F(t,x,p,u)\,dp\,du} \tag{4.3}$$

(условное математическое ожидание U при фиксированных X и P). Очевидно, что $u_\sigma(0,x) = u^0(x)$. Подстановка решения задачи (4.1), (4.2) в (4.3) даст следующее интегральное представление:

$$u_\sigma(x,t) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^0(s)\Big[u^0(s) + \Big((p^0(s), H_p(p^0(s))) - H(p^0(s))\Big)\,t\Big]\,e^{-\frac{|s-x+tH_p(p^0(s))|^2}{2t\sigma^2}}ds}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^0(s)\,e^{-\frac{|s-x+tH_p(p^0(s))|^2}{2t\sigma^2}}ds}. \tag{4.4}$$

Нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что предельное выражение

$$\bar{u}(t,x) = \lim_{\sigma\to 0} u_\sigma(x,t)$$

удовлетворяет уравнению ГЯ $u_t + H(p) = 0$ в случае, если $p(t,x)$ остается непрерывной. Для этой проверки надо иметь в виду, что вектор-функция $s = s(t,x)$ неявно задается системой уравнений

$$s - x + tH_p(p^0(s)) = 0. \tag{4.5}$$

З а м е ч а н и е 6. Отметим, что для получения формулы (4.4) не нужно требовать выпуклости гамильтониана.

З а м е ч а н и е 7. Как следует из исследования возможности выразить вектор-функцию $s(t,x)$ из уравнения (4.5), если матрица $C = C_{ij} = \sum_{k=1}^n H_{p_i p_k}(p^0(x))(p_k^0)_{x_j}$, $i,j = 1,\dots,n$, имеет хотя бы одно собственное значение, отрицательное в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$, то решение задачи (2.1) не может быть классическим в течение всего времени $t > 0$, даже в случае $u^0(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Это происходит потому, что матрица $E + tC$, где E — единичная матрица, перестает быть обратимой в некоторый момент времени $t = t_*(u^0)$.

4.2. Ассоциированная система законов сохранения

Покажем, что со всяким уравнением ГЯ

$$u_t + H(\nabla_x u) = 0, \quad u = u(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.6}$$

можно связать замкнутую систему законов сохранения.

Введем следующие величины:

$$\rho_\sigma(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} F(t,x,p,u)\,dp\,du, \tag{4.7}$$

$$p_\sigma(t,x) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} pF(t,x,p,u)\,dp\,du}{\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} F(t,x,p,u)\,dp\,du}, \tag{4.8}$$

$$v_\sigma(t,x) = \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} H_p F(t,x,p,u)\,dp\,du}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} F(t,x,p,u)\,dp\,du}. \tag{4.9}$$

Будем предполагать, что интегралы существуют в смысле Лебега. Величина (4.7) — скалярная, величины (4.8) и (4.9) — векторные. Если решение задачи (4.1), (4.2) известно, то для каждой из величин (4.7), (4.8), (4.9) можно получить формулу, подобную (4.4). Например,

$$p_\sigma(x,t) = \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^0(s)\,p^0(s)\,e^{-\frac{|s-x+tH_p(p^0(s))|^2}{2t\sigma^2}}ds}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^0(s)\,e^{-\frac{|s-x+tH_p(p^0(s))|^2}{2t\sigma^2}}ds}.$$

Следующие два предложения отвечают на вопрос о том, какой системе уравнений удовлетворяет тройка функций $(\rho_\sigma, p_\sigma, v_\sigma)$ и их предел $(\bar\rho, \bar p, \bar v)$. Эти предложения совершенно аналогичны тем, которые были получены в [30] для случая скалярного закона сохранения, поэтому мы не будем их здесь доказывать, а отошлем заинтересованного читателя к работе [30].

Предложение 1. *Функции ρ_σ, u_σ, v_σ, заданные выражениями* (4.7), (4.8) *и* (4.9), *при $t \geq 0$ удовлетворяют следующей системе $2n+1$ уравнений в частных производных:*

$$\frac{\partial \rho_\sigma}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho_\sigma v_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \rho_\sigma}{\partial x_k^2}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial(\rho_\sigma p_{\sigma,i})}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho_\sigma\, p_{\sigma,i}\, v_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(\rho_\sigma p_{\sigma,i})}{\partial x_k^2} - I^p_{\sigma,i}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial(\rho_\sigma v_{\sigma,i})}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho_\sigma v_{\sigma,i}\, v_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(\rho_\sigma v_{\sigma,i})}{\partial x_k^2} - I^v_{\sigma,i}, \tag{4.12}$$

где

$$I^p_{\sigma,i} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (p_i - p_\sigma)\big((v - v_\sigma(t,x)), \nabla_x F(t,x,p,u)\big)\,dp\,du,$$

$$I^v_{\sigma,i} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (v_i(p) - v_{\sigma,i}(t,x)\big((v(p) - v_\sigma(t,x)), \nabla_x F(t,x,p,u)\big)\,dp\,du,$$

$i = 1, \ldots, n.$

Предложение 2. *До момента времени $t_*(u^0)$ потери гладкости решением задачи Коши* (2.1) *при $H = H(p)$ тройка функций $(\bar\rho, \bar p, \bar v)$, представляющая собой предел при $\sigma \to 0$ тройки функций $(\rho_\sigma, u_\sigma, v_\sigma)$, является решением следующей замкнутой системы законов сохранения:*

$$\partial_t \bar\rho + \operatorname{div}_x(\bar\rho \bar v) = 0, \tag{4.13}$$

$$\partial_t(\bar\rho \bar p) + \operatorname{Div}_x(\bar\rho \bar p \otimes \bar v) = 0, \tag{4.14}$$

$$\partial_t(\bar\rho \bar v) + \operatorname{Div}_x(\bar\rho \bar v \otimes \bar v) = 0, \tag{4.15}$$

где Div *обозначает дивергенцию тензора.*

З а м е ч а н и е 8. Пара уравнений (4.13), (4.15) представляет собой так называемую систему газовой динамики "без давления", где в роли плотности выступает ρ, а в роли скорости — v. Эта система не является строго гиперболической, у ее характеристической матрицы нет полного набора собственных векторов. Характерной ее чертой является образование в компоненте плотности сильной сингулярости (дельтаобразной особенности), тогда как в компоненте скорости образуется обычный разрыв. Тем не менее до момента образования особенности конкретный вид функции $\rho^0(x)$ не играет роли, а $\rho(t,x)$ выполняет вспомогательную роль. Целью является нахождение вектора градиента p, и если предположить, что ρ и v найдены, то он находится из линейного по p уравнения (4.14). Отметим, что выпуклости гамильтониана для построения классических решений здесь не требуется.

З а м е ч а н и е 9. Фактически предложение 2 означает, что интегральные члены I^p_σ и I^v_σ уравнений (4.11), (4.12) стремятся к нулю при $\sigma \to 0$ в случае, если решения задачи Коши (2.1) дважды дифференцируемы. После момента образования особенности они не исчезают и образуют некий аналог давления в правой части уравнений (4.14) и (4.15) [23]. Это означает, что вектор p, найденный из этой системы, более не будет градиентом решения задачи (2.1) при $H = H(p)$. Существует процедура "пересчета" решения, полученного при предельном переходе при $\sigma \to 0$ в системе (4.10)–(4.12) к решению системы (4.13)–(4.15) после момента потери гладкости. Существенно используется сохранение интегральных величин, которое задается уравнениями (4.13)–(4.15). Для случая уравнений газовой динамики "без давления" (т. е. системы (4.13), (4.15)) для одной пространственной переменной такая процедура описана в [23].

З а м е ч а н и е 10. Из наших рассуждений следует, что для того чтобы решить уравнения газовой динамики "без давления", надо найти решение уравнения ГЯ (4.6), затем найти $H(p)$ и поле скорости $v = H_p$. Плотность затем найдется из уравнения (4.13), линейного по ρ. Таким образом, ρ оказывается "пассивным скаляром", т. е. все поведение системы диктуется только полем скорости. Для гладкого решения это правильно, так как уравнения (4.13) и (4.15) имеют следствием уравнение Хопфа $v_t + (v, \nabla_x)v = 0$. С другой стороны, как мы видели, в случае потенциального поля скорости, когда можно ввести закон сохранения, связанный только со скоростью, плотность тоже ведет себя как "пассивный скаляр". О переносе массы на разрывах в этом случае идет речь, например, в [31].

Тем не менее поведение *разрывного* решения и перенос массы на разрыве диктуется именно нашим выбором законов сохранения. Нетрудно показать, что уже в одномерном случае поведение разрывов решений зависит как от скорости, так и от плотности, если в качестве законов сохранения выбраны (4.13) и (4.15), а не (4.13) и (1.1). Точно такая же ситуация с решением уравнения (4.6), которое представляет собой закон сохранения $p_t = -\nabla_x H(p)$. Если при построении обобщенного решения мы будем отталкиваться от пары (4.13), (4.6), мы получим другой результат, чем если бы мы отталкивались от (4.13) и (4.15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bec J., Khanin K.** Burgers turbulence // Phys. Rep. 2007. Vol. 447. P. 1–66.
2. **Лакс П.Д.** Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ин-т компьютерных исследований, 2010. 296 с.
3. **Hopf E.** The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. Vol. 3. P. 201–230.
4. **Cole J.D.** On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. Vol. 9. P. 225–236.
5. **Субботин А. И.** Минимаксные решения уравнений Гамильтона — Якоби // Итоги науки и техники. Темат. обзоры. М.: ВИНИТИ, 1999. Т. 64. С. 222–231. (Соврем. математика и ее приложения).
6. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of PDEs of the first order: the dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
7. **Эванс Л.К.** Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 560 с.

8. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Мат. сб. 1975. Vol. 98(140), № 3(11). С. 450–493.
9. **Lions P.-L.** Generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. Boston: Pitman, 1982. 317 p. (Research Notes in Mathematics; vol. 69).
10. **Crandall M.G, Ishii H., Lions P.-L.** User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 27. P. 1–67.
11. **Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282. P. 487–502.
12. **Lax P.** Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math. 1954. Vol. 7. P. 159–193.
13. **Олейник О.А.** О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 3. С. 451–454.
14. **Dafermos C.M.** Hyperbolic conservation laws in continuum physics. 3rd ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 691 p.
15. **Frisch U., Bec J.** Burgulence // New trends in turbulence. Turbulence: nouveaux aspects (Les Houches, 2000) / eds. M. Lesieur, A. Yaglom, F. David. Berlin: Springer, 2001. P. 341–383.
16. **Cartan H.** Differential forms. Mineola; New-York: Dover, 2006. 176 p.
17. **Haantjes A.** On X_{n-1}-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae. 1955. Vol. 17. P. 158–162.
18. **Nijenhuis A.** X_{n-1}-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae. 1951. Vol. 13. P. 200–212.
19. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений. Москва: Физматлит, 1979. 591 с.
20. **Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Юдович В.И.** Математическая теория электрофореза. Применение к методам фракционирования биополимеров. Киев: Наукова думка, 1983. 204 с.
21. The mathematical understanding of chemical engineering systems: selected papers of Neal R. Amundson / eds. R. Aris, A. Varma. Oxford; New York; Toronto; Sydney; Paris; Frankfurt: Pergamon Press, 1980. 829 p.
22. **Rozanova O.** Stochastic perturbations method for a system of Riemann invariants // Math. Commun. 2014. Vol. 19, no. 3. P. 573–580.
23. **Albeveriio S., Korshunova A., Rozanova O.** A probabilistic model associated with the pressureless gas dynamics // Bulletin des Sciences Mathematiques. 2013. Vol. 137, no. 7. P. 902–922.
24. **Киперман С.Л.** Основы химической кинетики в гетерогенном катализе. М.: Химия, 1979. 349 с.
25. **Ферапонтов Е. В., Царев С. П.** Системы гидродинамического типа, возникающие в газовой хроматографии. Инварианты Римана и точные решения // Мат. моделирование. 1991. Т. 3, № 2. С. 82–91.
26. **Жуков М.Ю., Юдович В.И.** Математическая теория изотахофореза // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 334–338.
27. **Albeverio S., Rozanova O.** The non-viscous Burgers equation associated with random positions in coordinate space: a threshold for blow up behavior // Math. Models Methods Appl. Sci. 2009. Vol. 19, no. 5. P. 749–767.
28. **Albeverio S., Rozanova O.** Suppression of unbounded gradients in a SDE associated with the Burgers equation // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. Vol. 138, no. 1. P. 241–251.
29. **Risken H., Frank, T.** The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications. 2nd ed. Berlin: Springer, 1996. 472 p.
30. **Albeveriio S., Rozanova O.** A representation of solutions to a scalar conservation law in several dimensions // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 405, no. 2. P. 711–719.
31. **Khanin K, Sobolevski A.** Particle dynamics inside shocks in Hamilton–Jacobi equations// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2010. Vol. 368, no. 1916. P. 1579–1593.

Розанова Ольга Сергеевна
д-р физ.-мат. наук
доцент
Московский государственного университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: rozanova@mech.math.msu.su

Поступила 15.02.2015