ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

О СТРУКТУРЕ СИНГУЛЯРНОГО МНОЖЕСТВА КУСОЧНО-ГЛАДКОГО МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ — БЕЛЛМАНА[1]

А. С. Родин

В данной работе изучаются свойства минимаксного кусочно-гладкого решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Известно, что необходимыми и достаточными условиями для точек недифеференцируемости (сингулярности) минимаксного решения являются условия Ранкина — Гюгонио. В работе получено обобщение этого условия и описание размерности гладких многообразий, из которых состоит сингулярное множество кусочно-гладкого решения, в терминах пришедших на него характеристик. Получены новые структурные свойства сингулярного множества в случае, когда гамильтониан зависит только от импульсной переменной.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, минимаксное решение, сингулярное множество, кусочно-гладкое решение, касательное пространство, условие Ранкина — Гюгонио.

A. S. Rodin. On the structure of the singular set of a piecewise smooth minimax solution to the Hamilton–Jacobi–Bellman equation.

The properties of a minimax piecewise smooth solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation are studied. It is known the Rankine–Hugoniot conditions are necessary and sufficient conditions for the points of nondifferentiability (singularity) of the minimax solution. We generalize this condition and describe the dimension of smooth manifolds contained in the singular set of the piecewise smooth solution in terms of state characteristics that come to this set. New structural properties of the singular set are obtained in the case when the Hamiltonian depends on the impulse variable only.

Keywords: Hamilton–Jacobi–Bellman equation, minimax solution, singular set, piecewise smooth solution, tangent space, Rankine–Hugoniot conditions.

Введение

Как известно [1–3], задачам теории оптимального управления сопоставляются уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона — Якоби — Беллмана. В данной работе изучаются свойства предложенного А. И. Субботиным обобщенного (минимаксного) решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Ранее Е. А. Колпаковой [4;5] были получены необходимые и достаточные условия принадлежности точки фазового пространства сингулярному множеству минимаксного решения, т. е. множеству точек недифференцируемости. В настоящей работе эти результаты получили развитие. Изучены свойства сингулярного множества минимаксного кусочно-гладкого решения, и получена связь размерности сингулярных подмногообразий и пришедших на них фазовых характеристик. Получена также связь структуры гамильтониана и структуры сингулярного множества в случае, когда гамильтониан зависит только от импульсной переменной.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00168) и программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления".

1. Кусочно-гладкое решение уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана и его сингулярное множество

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + H(t,x,D_x\varphi(t,x)) = 0, \quad \varphi(T,x) = \sigma(x), \tag{1.1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $D_x\varphi(t,x) = \Big(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_n}\Big) = s$.

Обозначим $\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T]\,, x \in \mathbb{R}^n\}$.

Задача (1.1) рассматривается при следующих предположениях:

A1) функция $H(t,x,s)$ непрерывно дифференцируема по переменным t,x,s, вогнута по переменной s;

A2) функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема;

A3) выполнены условия подлинейного роста: существуют такие $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что выполняются условия

$$\|D_xH(t,x,s)\| \le \alpha(1 + \|x\| + \|s\|), \quad \|D_sH(t,x,s)\| \le \beta(1 + \|x\| + \|s\|)$$

для любой точки $(t,x,s) \in \Pi_T \times \mathbb{R}^n$. Здесь символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму конечномерного вектора.

Целью работы является изучение структуры решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1).

1.2. Обобщенное решение задачи (1.1)

При сделанных предположениях классическое решение задачи (1.1) $\varphi(\cdot)$ может существовать лишь локально в некоторой окрестности краевого многообразия

$$C^T = \{(t,x,z)\colon t = T, x = \xi, z = \sigma(\xi);\ \xi \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

Это решение $\varphi(\cdot)$ может быть построено с помощью метода характеристик Коши [6]. Выпишем характеристическую систему с краевыми условиями при $t = T$ для задачи (1.1):

$$\dot{\tilde{x}} = D_sH(t,\tilde{x},\tilde{s}), \quad \dot{\tilde{s}} = -D_xH(t,\tilde{x},\tilde{s}), \quad \dot{\tilde{z}} = \langle\tilde{s}, D_sH(t,\tilde{x},\tilde{s})\rangle - H(t,\tilde{x},\tilde{s}), \tag{1.2}$$

$$\tilde{x}(T,\xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T,\xi) = D_x\sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T,\xi) = \sigma(\xi) \ \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение.

Решения $\tilde{x}$, $\tilde{s}$, $\tilde{z}$ называются, соответственно, *фазовыми, импульсными, ценовыми характеристиками* уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана (1.1).

Заметим, что при выполнении условий A1–A3 решение характеристической системы существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0,T]$, для $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Согласно методу Коши [6] при условии, что якобиан $\frac{\partial\tilde{x}(t,\xi)}{\partial(t,\xi)}$ отличен от нуля, справедливы формулы $x = \tilde{x}(t,\xi)$, $\quad \varphi(t,x) = \tilde{z}(t,\xi)$, $\quad D_x\varphi(t,x) = \tilde{s}(t,\xi)$.

В дальнейшем будут рассматриваться неклассические, негладкие решения задачи (1.1). При этом воспользуемся одним из полезных инструментов негладкого анализа, следующим обобщением понятия дифференцируемости функции [7].

О п р е д е л е н и е 1. Супердифференциалом функции $\varphi(\cdot)\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ в точке (t,x) называется множество

$$D^+\varphi(t_0,x_0) = co\Big\{(\alpha,s) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \limsup_{t\to t_0, x\to x_0} \frac{\varphi(t,x) - \varphi(t_0,x_0) - \langle(\alpha,s),(\Delta t,\Delta x)\rangle}{|\Delta t| + \|\Delta x\|} \le 0\Big\}.$$

В точках дифференцируемости функции $\varphi(\cdot)$ супердифференциал состоит из единственного элемента, градиента этой функции.

Напомним определение обобщенного решения задачи (1.1) [4; 5].

О п р е д е л е н и е 2. Обобщенным решением задачи (1.1) называется локально липшицевая супердифференцируемая функция $\Pi_T \ni (t,x) \mapsto \varphi(t,x) \in \mathbb{R}$ такая, что для любой точки $(t_0,x_0) \in \Pi_T$ существуют $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ и решения системы (1.2), (1.3) $\tilde{x}(\cdot,\xi_0)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_0)$, $\tilde{z}(\cdot,\xi_0)$, удовлетворяющие условию

$$\tilde{x}(t_0,\xi_0) = x_0, \quad \tilde{z}(t_0,\xi_0) = \varphi(t_0,x_0) \quad \text{и} \quad \tilde{z}(t,\xi_0) = \varphi(t,\tilde{x}(t,\xi_0)) \ \ \forall t \in [t_0,T].$$

Из результатов работ [4, с. 32; 5, с. 97; 8, с. 42; 9, с. 11; 10, с. 203] вытекает следующее утверждение о связи определения 2 с определениями минимаксного и вязкостного решений.

Утверждение 1. *Если в задаче* (1.1) *выполнены условия A1–A3, то существует и единственно обобщенное решение задачи* (1.1) *в смысле определения* 2, *причем определение* 2 *эквивалентно определениям минимаксного и вязкостного решений задачи* (1.1).

1.3. Сингулярное множество

Напомним определение сингулярного множества для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1).

О п р е д е л е н и е 3. Сингулярным множеством Q для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) называется множество точек $(t,x) \in \Pi_T$, в которых функция φ недифференцируема.

Согласно работам [4, с. 157; 5, с. 97] справедливы следующие утверждения.

Утверждение 2. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия A1–A3. Для того чтобы точка $(t,x) \in Q$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, $\xi_1 \neq \xi_2$, для которых выполнены соотношения*

$$\tilde{x}(t,\xi_1) = \tilde{x}(t,\xi_2) = x, \quad \tilde{z}(t,\xi_1) = \tilde{z}(t,\xi_2) = \varphi(t,x), \quad \tilde{s}(t,\xi_1) \neq \tilde{s}(t,\xi_2),$$

где $\tilde{x}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{z}(\cdot,\xi_i)$, $i=1,2$, — решения характеристической системы (1.2), (1.3).

Утверждение 3. *Если множество сингулярности Q содержит кривую, описываемую дифференцируемой функцией $t \mapsto x(t)$, $0 < t_0 < t \leq T$, то справедливо соотношение*

$$\left\langle \tilde{s}(t,\xi_1) - \tilde{s}(t,\xi_2), \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_1)) - H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_2)) \quad \forall t \in (t_0,T]\,.$$

Это соотношение обобщает известное условие Ранкина — Гюгонио на случай n-мерной фазовой переменной x.

1.4. Класс кусочно-гладких функций

В данной работе рассматриваются обобщенные решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) из класса кусочно-гладких функций(например, [8, с. 55]).

О п р е д е л е н и е 4. Функция $\varphi(\cdot) : \Pi_T \to \mathbb{R}$ называется кусочно-гладкой в Π_T, если

$$\Pi_T = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad M_i \cap M_j = \varnothing, \quad \text{если} \quad i \neq j, \quad i,j \in I, \quad I = \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

где M_i — дифференцируемые подмногообразия в Π_T.

Введем обозначения:

$$J := \{i \in I : M_i - (n+1) - \text{мерное многообразие}\},$$

$$J(x) := \{j \in J : x \in \overline{M}_j\}, \quad \text{где} \quad \overline{M}_j - \text{замыкание множества} \quad M_j.$$

Предполагается, что для любых $x_1, x_2 \in M_i$, $i \in I$, выполнено $J(x_1) = J(x_2)$.

Сужение кусочно-гладкой функции $\varphi(\cdot,\cdot)$ на $\overline{M}_j$, где $j \in J$, является непрерывно дифференцируемой функцией.

Поясним определение 4. Многообразия M_i, $i \in J \subset I$, имеющие размерность $n+1$, являются открытыми, и при этом $\bigcup_{i\in J} \overline{M}_i = \Pi_T$. Все остальные многообразия M_i, $i \in I \setminus J$, имеющие размерность меньше чем $n+1$, принадлежат границе замыкания многообразий, имеющих размерность $n+1$. Причем справедливо следующее свойство: для любых двух точек x_1, x_2, принадлежащих одному и тому же многообразию, выполнено $J(x_1) = J(x_2)$; это значит, что для любой точки $x \in M_i$, $i \in I$, выполнено следующее $x \in \overline{M}_{j_1} \cap \ldots \cap \overline{M}_{j_k}$, где $j_1, \ldots, j_k \in J(x)$, при этом $x \notin \overline{M}_j$, когда $j \in J \setminus J(x)$.

2. Характеристики и размерность сингулярного многообразия

2.1. Структура сингулярного многообразия

Рассмотрим минимаксное решение $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) из класса кусочно-гладких функций.

Фиксируем многообразие M_i, $i \in I$, размерность которого равна $(n+1-k)$, где $k \in \overline{1,n}$, и обозначим его символом $M_{[k]}$ для упрощения дальнейшего изложения.

Пусть $L_{[k]}(t,x)$ — касательное подпространство к многообразию $M_{[k]}$ в точке (t,x). Проекцию супердифференциала функции $\varphi(\cdot)$ на кокасательное пространство, ортогональное касательному подпространству в точке (t,x), обозначим как

$$S^+_{[k]}(t,x) := \left\{q^+ \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists p \in L_{[k]}(t,x), p + q^+ \in D^+\varphi(t,x), \left\langle q^+, (1,f)\right\rangle = 0 \ \forall (1,f) \in L_{[k]}(t,x)\right\}.$$

Для точки $(t,x) \in Q$ определим множество $Index(t,x)$, состоящее из индексов характеристик, которые обладают следующими свойствами:

$$\tilde{x}(t,\xi_i) = x, \quad \tilde{z}(t,\xi_i) = \varphi(t,x), \quad \tilde{s}(t,\xi_i) \neq \tilde{s}(t,\xi_j), \quad i \neq j, \quad \forall i,j \in Index(t,x). \tag{2.1}$$

Согласно утверждению 2, это множество непусто для всех $(t,x) \in Q$.

Символом $|Index(t,x)|$ обозначим мощность множества $Index(t,x)$.

Лемма. *Если супердифференциал $D^+\varphi(t,x)$ кусочно-гладкого минимаксного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) в точке $(t,x) \in \Pi_T$ состоит не из единственного элемента, то разность двух элементов d^* и d_* этого супердифференциала принадлежит кокасательному пространству в точке (t,x). Если размерность кокасательного пространства равна k, где $1 \leq k \leq n$, то найдутся k попарно различных линейно независимых векторов вида $d^* - d_*$, где $d^*, d_* \in D^+\varphi(t,x)$.*

Доказательство леммы следует из свойств кусочно-гладкого минимаксного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1). В работе [8, с. 60] показано, что всякий элемент $d = (\alpha, s)$, лежащий в супердифференциале $D^+\varphi(t,x)$, представим в виде суммы элементов $p+q^+$, где p принадлежит касательному пространству к сингулярному множеству в точке (t,x), а q^+ — кокасательному пространству в точке (t,x). При этом проекция p определяется единственным образом для всех элементов из супердифференциала $D^+\varphi(t,x)$. □

Как известно [4;8], супердифференциал локально липшицевого минимаксного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1.1) есть замкнутое, ограниченное множество и оно имеет вид

$$D^+\varphi(t,x) := co\{d(t,\xi_i) \in \mathbb{R}^{n+1} : i \in Index(t,x)\}, \quad d(t,\xi_i) = (-H(t,\tilde{x}(t,\xi_i),\tilde{s}(t,\xi_i)),\tilde{s}(t,\xi_i)).$$

Пусть касательное пространство к сингулярному множеству в точке (t,x) имеет размерность $n+1-k$. Рассмотрим вектора $d(t,\xi_i) - d(t,\xi_1)$, где $i \in Index(t,x)$, $i \neq 1$. Нетрудно видеть, что $d(t,\xi_i)-d(t,\xi_1)=q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$. Из того что $q_i^+\in S^+_{[k]}(t,x)$, $i\in Index(t,x)$, получаем, что вектора $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Index(t,x)$, также лежат в кокасательном пространстве $S^+_{[k]}(t,x)$ размерности k. Следовательно, найдутся k таких $q^+(t,\xi_i)$, где $i\in Index(t,x)$, $i\neq 1$, что вектора $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$ являются линейно независимыми, эти вектора образуют базис в подпространстве $S^+_{[k]}(t,x)$.

Фиксируем точку $(t,x)\in M_{[k]}\subset Q$.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия* A1–A3 *и* $(t,x)\in Q$. *Тогда для того чтобы* $(t,x)\in M_{[k]}$, *где* $\dim M_{[k]}=n+1-k$, $k\in\overline{1,n}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали решения* $\tilde{x}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{z}(\cdot,\xi_i)$, $i\in Index(t,x)$, *системы* (1.2), (1.3) *такие, что выполнено* (2.1) *и матрица* D *вида*

$$D=\begin{pmatrix} -(H_2-H_1) & s_2^1-s_1^1 & s_2^2-s_1^2 & \dots & s_2^n-s_1^n\\ -(H_3-H_1) & s_3^1-s_1^1 & s_3^2-s_1^2 & \dots & s_3^n-s_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -(H_{i+1}-H_1) & s_{i+1}^1-s_1^1 & s_{i+1}^2-s_1^2 & \dots & s_{i+1}^n-s_1^n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

имеет ранг k, *где* $k\le|Index(t,x)|$. *Здесь* $(s_i^1,s_i^2,\dots,s_i^n)=\tilde{s}(t,\xi_i)$, $H_i=H(t,\tilde{x}(t,\xi_i),\tilde{s}(t,\xi_i))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $(t,x)\in M_{[k]}\subset Q$. Отметим, что размерность касательного пространства $L_{[k]}(t,x)$ совпадает с размерностью многообразия $M_{[k]}$.

Так как $\dim L_{[k]}(t,x)=n+1-k$, то размерность кокасательного пространства $S^+_{[k]}(t,x)$ равна $n+1-(n+1-k)=k$.

Из леммы следует, что найдутся $q^+(t,\xi_i)\in S^+_{[k]}(t,x)$, $i\in\overline{1,k+1}$, такие, что вектора $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i,j\in\overline{1,k+1}$, $i\neq j$, будут линейно независимыми.

Обозначим символом $Basic_{[k]}(t,x)$ множество, состоящее из k индексов таких, что вектора $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Index(t,x)$, $i\neq 1$, являются линейно независимыми.

Следовательно, матрица D, которая состоит из строк вида $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Index(t,x)$, имеет ранг k.

Добавлением к матрице, состоящей из строк вида $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Basic_{[k]}(t,x)$, строки вида $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Index(t,x)$, ранг матрицы не изменится.

Достаточность. Пусть ранг матрицы

$$D=\begin{pmatrix} -(H_2-H_1) & s_2^1-s_1^1 & s_2^2-s_1^2 & \dots & s_2^n-s_1^n\\ -(H_3-H_1) & s_3^1-s_1^1 & s_3^2-s_1^2 & \dots & s_3^n-s_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -(H_{i+1}-H_1) & s_{i+1}^1-s_1^1 & s_{i+1}^2-s_1^2 & \dots & s_{i+1}^n-s_1^n \end{pmatrix}$$

равен k, $k\le|Index(t,x)|$. Строки этой матрицы суть элементы $d(t,\xi_i)-d(t,\xi_1)$, где $d(t,\xi_i)\in D^+\varphi(t,x)$, $2\le i\le|Index(t,x)|$. Кроме того, они могут рассматриваться как нормали к гиперплоскостям размерности n. При этом k из этих нормалей являются линейно независимыми.

В силу леммы из того, что вектора $d(t,\xi_i)-d(t,\xi_1)=q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i\in Basic_{[k]}(t,x)$, принадлежат кокасательному пространству и являются его базисом, следует, что размерность кокасательного пространства в точке (t,x) равна k, а размерность касательного равна $n+1-k$, т. е. $(t,x)\in M_{[k]}$.

З а м е ч а н и е. Из того что $(t,x)\in Q$, $d(t,\xi_i)\in D^+\varphi(t,x)$, $i\in Index(t,x)$, согласно [5] следует, что выполнены условия Ранкина—Гюгонио для кривой $x(\cdot)$, лежащей на $M_{[k]}$:

$$\left\langle \tilde{s}(t,\xi_i)-\tilde{s}(t,\xi_1),\frac{dx(t)}{dt}\right\rangle = H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_i))-H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_1)),\quad i\in Index(t,x). \tag{2.3}$$

Перепишем условие (2.3) в виде

$$\left\langle\Big(-\big(H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_i))-H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_1))\big),\tilde{s}(t,\xi_i)-\tilde{s}(t,\xi_1)\Big),(1,\dot{x})\right\rangle$$

$$= \left\langle q^+(t,\xi_i) - q^+(t,\xi_1), (1,\dot{x}) \right\rangle = 0, \quad i \in Index(t,x). \tag{2.4}$$

Из условия (2.4) видно, что вектор $(1,\dot{x})$ ортогонален всем векторам вида $q^+(t,\xi_i)-q^+(t,\xi_1)$, $i \in Index(t,x)$, а значит, этот вектор ортогонален и всем векторам $q^+(t,\xi_i) - q^+(t,\xi_1)$, $i \in Basic_{[k]}(t,x)$, составляющим базис пространства $S^+_{[k]}(t,x)$. Отсюда делаем вывод, что вектор $(1,\dot{x})$ принадлежит касательному пространству $L_{[k]}(t,x)$. Теорема доказана.

2.2. Свойство супердифференциала

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия* A1–A3, $(t,x) \in Q$, $(t,x) \in M_{[k]}$, *где* $\dim M_{[k]} = n+1-k$ *и* $1 \le k \le n$, *и гамильтониан* H *зависит только от переменной* s *и является вогнутым по ней. Тогда для любых* $k+1$ *характеристик* $\tilde{s}(\cdot)$, *удовлетворяющих условию* (2.1) *и условию, что матрица* D *вида* (2.2), *построенная на этих характеристиках, имеет ранг* k, *не существует характеристики, также удовлетворяющей условию* (2.1), *которая представима в виде выпуклой комбинации этих* $k+1$ *характеристик.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем удобное обозначение

$$q_{i,j}(t,x) = q^+(t,\xi_i) - q^+(t,\xi_j) = d(t,\xi_i) - d(t,\xi_j) = \Big(-\big(H(\tilde{s}(t,\xi_i)) - H(\tilde{s}(t,\xi_j))\big),\ \ \tilde{s}(t,\xi_i) - \tilde{s}(t,\xi_j) \Big),$$

$$i \ne j, \quad \xi_i \ne \xi_j.$$

Предположим, что утверждение этой теоремы неверно и существует характеристика $\tilde{x}(t,\xi_{k+2})$, $\tilde{z}(t,\xi_{k+2})$, $\tilde{s}(t,\xi_{k+2})$, удовлетворяющая условию (2.1), что $\tilde{s}(t,\xi_{k+2})$ является выпуклой комбинацией $\tilde{s}(t,\xi_i)$, $i \in \overline{1,k+1}$, т. е.

$$\tilde{s}(t,\xi_{k+2}) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot \tilde{s}(t,\xi_i), \quad \alpha_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1. \tag{2.5}$$

Из теоремы 1 и из того, что $(t,x) \in M_{[k]}$, следует: ранг матрицы $\tilde{D}$, полученной путем добавления к матрице D строки вида $q_{k+2,1}(t,x)$, останется равным k, т. е добавленная строка $q_{k+2,1}(t,x)$ является линейной комбинацией всех остальных строк. Это можно записать так: существуют такие $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,k}$, что

$$q_{k+2,1}(t,x) = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot q_{i+1,1}(t,x).$$

Отсюда следует, что $q_{k+2,1}(t,x)$ принадлежит подпространству размерности k, порожденному векторами $q_{i,1}(t,x)$, $i \in \overline{2,k+1}$.

Из этого условия вытекает, что

$$d(t,\xi_{k+2}) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i\Big) \cdot d(t,\xi_1) + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot d(t,\xi_{i+1}). \tag{2.6}$$

Поскольку равенство (2.6) применимо ко всем компонентам вектора $d(t,\xi_{k+2})$, данное равенство перепишем в виде двух равенств, а именно

$$H(\tilde{s}(t,\xi_{k+2})) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i\Big) \cdot H(\tilde{s}(t,\xi_1)) + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot H(\tilde{s}(t,\xi_{i+1})), \tag{2.7}$$

$$\tilde{s}(t,\xi_{k+2}) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i\Big) \cdot \tilde{s}(t,\xi_1) + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot \tilde{s}(t,\xi_{i+1}). \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) следует, что функция H обладает следующим свойством:

$$H\Big(\Big(1-\sum_{i=1}^{k} b_i\Big)\cdot \tilde{s}(t,\xi_1)+\sum_{i=1}^{k} b_i\cdot \tilde{s}(t,\xi_{i+1})\Big)=\Big(1-\sum_{i=1}^{k} b_i\Big)\cdot H(\tilde{s}(t,\xi_1))+\sum_{i=1}^{k} b_i\cdot H(\tilde{s}(t,\xi_{i+1})).$$

Заметим также, что сумма коэффициентов при $H(\tilde{s}_i(t,x))$ и $\tilde{s}_i(t,x)$ равна 1, $i\in\overline{1,k+1}$.

Для $\tilde{s}(t,\xi_{k+2})$ существуют два представления: формула (2.5) из условия задачи, что $\tilde{s}(t,\xi_{k+2})$ есть выпуклая комбинация $\tilde{s}(t,\xi_i)$, где $i\in\overline{1,k+1}$, и формула (2.8), полученная из линейной зависимости строки $q_{k+2,1}(t,x)$.

Вычтем из (2.8) (2.5), получим

$$0=\Big(\Big(1-\sum_{i=1}^{k} b_i\Big)-\alpha_1\Big)\cdot \tilde{s}(t,\xi_1)+\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot \tilde{s}(t,\xi_{i+1}). \tag{2.9}$$

Прибавим, вычтем в (2.9):

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot \tilde{s}(t,\xi_1),$$

сгруппировав, имеем

$$0=\Big(1-\alpha_1-\sum_{i=1}^{k}(b_i-b_i+\alpha_{i+1})\Big)\cdot \tilde{s}(t,\xi_1)+\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot\big(\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)\big).$$

Учитывая, что коэффициент при $\tilde{s}(t,\xi_1)$ равен 0, получим выражение

$$0=\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot\big(\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)\big). \tag{2.10}$$

Если $\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)$, $i\in\overline{1,k}$, линейно независимы, то тождество (2.10) будет верным только тогда, когда $b_i=\alpha_{i+1}$, $i\in\overline{1,k}$, а из условия $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i=1$ получим, что $\alpha_1=(1-\sum_{i=1}^{k} b_i)$.

Рассмотрим другой случай. Если, например, $\tilde{s}(t,\xi_2)-\tilde{s}(t,\xi_1)$ является линейной комбинацией $\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)$, где $i\in\overline{2,k}$, то, вспомнив условие Ранкина — Гюгонио (2.3), умножим скалярно на $\dot{x}$ каждую часть тождества (2.10). После преобразования получим, что

$$0=\sum_{i=1}^{k}(b_i-\alpha_{i+1})\cdot\big(H(\tilde{s}(t,\xi_1))-H(\tilde{s}(t,\xi_{i+1}))\big).$$

Отсюда делаем вывод, что $H(t,\xi_1)-H(t,\xi_2)$ есть линейная комбинация $H(\tilde{s}(t,\xi_1))-H(\tilde{s}(t,\xi_{i+1}))$, $i\in\overline{2,k}$, чего не может быть, так как в этом случае ранг матрицы D будет равен $k-1$, а не k. При скалярном умножении тождества на $\dot{x}=0$ из условия Ранкина — Гюгонио (2.3) получаем, что $H(t,\xi_1)-H(t,\xi_{i+1})=0$, $i\in\overline{1,k}$.

Это значит, что мы приходим к случаю, когда $\tilde{s}(t,\xi_{i+1})-\tilde{s}(t,\xi_1)$, $i\in\overline{1,k}$, линейно независимы. Следовательно, $b_i=\alpha_{i+1}$, $i\in\overline{1,k}$, а $\alpha_1=(1-\sum_{i=1}^{k} b_i)$.

В силу выпуклости функции $-H(s)$ точки $d(t,\xi_i)=(-H(\tilde{s}(t,\xi_i)),\tilde{s}(t,\xi_{i+1}))\in D^+\varphi(t,x)$, $i\in\overline{1,k+1}$, лежащие на графике функции $s\to -H(s)$, также являются вершинами симплекса размерности k. В силу гладкости функции $H(s)$ по переменной s опорная гиперплоскость к надграфику $-H(s)$ в точках $(-H(\tilde{s}(t,\xi_i)),\tilde{s}(t,\xi_i))$, где $i\in\overline{1,k+1}$, единственна и содержит данный симплекс. Обозначим вектор нормали к этой гиперплоскости символом $(-1,-N)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Из того, что

$$H(\tilde{s}(t,\xi_{k+2}))=\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\cdot H(\tilde{s}(t,\xi_i)),\quad \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i=1,\quad \alpha_i\geq 0,\quad i\in\overline{1,k+1},$$

следует, что точка $(-H(\tilde{s}(t,\xi_{k+2})), \tilde{s}(t,\xi_{k+2}))$, лежащая в симплексе, определяется как

$$\Big(-\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\cdot H(\tilde{s}(t,\xi_i)),\quad \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\cdot\tilde{s}(t,\xi_i)\Big)=\big(-H(\tilde{s}(t,\xi_{k+2})),\tilde{s}(t,\xi_{k+2})\big).$$

Отсюда следует, что

$$D_sH(\tilde{s}(t,\xi_i))=N=\mathrm{const},\quad i\in\overline{1,k+2}. \tag{2.11}$$

Поскольку гамильтониан H зависит только от переменной s, то $\dot{\tilde{s}}(t,\xi_i)=-D_xH(\tilde{s}(t,\xi_i))=0$, $i\in\overline{1,k+2}$, $t\le T$. Отсюда следует, что $\tilde{s}(t,\xi_i)\equiv D_x\sigma(\xi_i)=s_i^T$.

Из условия

$$x=x(t)=x_i^T-\int_t^T\frac{\partial H}{\partial s}(s_i^T)d\tau=x_i^T-\int_t^T Nd\tau,\quad i\in\overline{1,k+2},$$

и условия (2.1) следует, что

$$x(t)=x_i^T-\int_t^T\frac{\partial H}{\partial s}(s_i^T)d\tau=x_j^T-\int_t^T\frac{\partial H}{\partial s}(s_j^T)d\tau,\quad i,j\in\overline{1,k+2}.$$

Учитывая это и (2.11), получаем, что $x_i^T=x_j^T$, где $i,j\in\overline{1,k+2}$; это противоречит предположению о различии краевых данных $x_i^T=\xi_i$ и $x_j^T=\xi_j$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беллман Р.Э.** Динамическое программирование. Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
2. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби-Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
5. **Колпакова Е.А.** Обобщенный метод характеристик в теории уравнений Гамильтона — Якоби и законов сохранения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 95–98.
6. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 296 с.
7. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
8. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных исследований. М.: Ижевск, 2003. 336 с.
9. **Crandall G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
10. **Субботина Н.Н., Колпакова Е.А.** О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана в терминах классических характеристик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 202–218.

Родин Алексей Семёнович
ведущий математик
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
аспирант ИМКН УрФУ
e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com

Поступила 11.03.2015