ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 519.62

ОДНОШАГОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В. Г. Пименов, М. А. Паначев

Уравнения в частных производных первого порядка методом характеристик сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям; если же в исходном уравнении имеется эффект запаздывания, аналогичный прием сводит уравнение к смешанному функционально-дифферен-циальному уравнению, в котором есть эффекты влияния по пространственной переменной и наследственности по времени. В работе приводятся конструкции одношаговых многоэтапных методов (аналогов явных методов Рунге — Кутты) численного решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений с применением двумерной интерполяции вырожденными сплайнами. Исследуются порядки сходимости и приведены результаты численных экспериментов на тестовых примерах.

Ключевые слова: смешанные функционально-дифференциальные уравнения, численный алгоритм, двумерная интерполяция, экстраполяция, сходимость.

V. G. Pimenov, M. A. Panachev. One-step numerical methods for mixed functional differential equations.

First-order partial differential equations are reduced to ordinary differential equations by the method of characteristics. If there is a delay in the original equation, a similar method reduces the equation to a mixed functional differential equation with influence effects in the space variable and with time heredity. We present schemes of one-step multistage methods (analogs of explicit Runge–Kutta methods) for the numerical solution of mixed functional differential equations with the use of two-dimensional interpolation by degenerate splines. Orders of convergence are studied and results of numerical experiments on test examples are given.

Keywords: mixed functional differential equations, numerical algorithm, two-dimensional interpolation, extrapolation, convergence.

Введение

В смешанных функционально-дифференциальных уравнениях одна независимая переменная, играющая роль времени, отвечает за эволюцию, другая независимая переменная трактуется как пространственная. Математическая теория таких уравнений была развита, прежде всего, в трудах А. Д. Мышкиса [1]. Аналитическое исследование подобного рода объектов весьма затруднено, поэтому интерес представляют численные методы их решения; отсутствие алгоритмов и соответствующих программ препятствует, на наш взгляд, широкому распространению таких объектов в математическом моделировании. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения имеют самостоятельное значение. Кроме того, их важность обусловлена тем, что если к уравнениям в частных производных первого порядка с наследственностью применить метод характеристик, то они сводятся как раз к смешанным функционально-дифференциальным уравнениям.

В данной статье конструируются одношаговые многоэтапные методы (аналоги явных методов Рунге — Кутты) численного решения, основанные на идее разделения конечномерной и бесконечномерной составляющих в структуре фазового состояния, идее построения сеточных методов только по конечномерной составляющей и идее применения интерполяции и экстраполяции (в данном случае по двум переменным) с заданными свойствами для учета бесконечномерной составляющей. Эти идеи ранее применялась для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с обыкновенными [2] и частными [3] производными. Ранее в

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00089) и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

работе [4] для смешанных функционально-дифференциальных уравнений был построен простейший метод первого порядка — аналог метода Эйлера с двумерной кусочно-постоянной интерполяцией. В работах [5; 6] для этого же объекта были построены многошаговые численные алгоритмы, в том числе эффективный класс бесстартовых процедур. Однако одношаговые методы высокого порядка по сравнению с многошаговыми имеют несомненное преимущество — в них достаточно просто и эффективно организуются процедуры с переменным и автоматическим выбором шага [2; 7], без которых трудно представить современные пакеты прикладных программ.

В настоящей работе доказана теорема сходимости для аналогов методов Рунге — Кутты, изучены факторы, влияющие на порядок сходимости. Предложен способ двумерной интерполяции дискретной предыстории модели, обладающий нужными свойствами, а также способ экстраполяции по времени двумерной дискретной предыстории модели. Сконструирован эффективный аналог метода Рунге — Кутты четвертого порядка с кусочно-бикубической интерполяцией. Приведены результаты численных экспериментов на тестовом примере с различными видами эффекта наследственности по временной переменной и эффекта влияния по пространственной переменной. Статья продолжает продолжает и развивает результаты, намеченные в книге [8].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = f(x, t, u(x,t), u_{x,t}). \tag{1.1}$$

Здесь $u(x,t)$ — искомая функция, $x \in [a,b]$, $t \in [0,T]$ — независимые переменные, $u_{x,t} = \{u(x+\xi, t+s), -\eta \le \xi \le \eta, -\tau \le s \le 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t, зависящая также от пространственного аргумента из зоны влияния $[x-\eta, x+\eta]$, $\tau > 0$ — величина запаздывания, $\eta > 0$ — величина, характеризующая зону влияния.

Обозначим $\Pi = [a,b] \times [0,T]$, $D = [-\eta, \eta] \times [-\tau, 0]$, $\Omega_0 = [a,b] \times [-\tau, 0]$, $\Omega_1 = [a-\eta, a] \times [-\tau, T]$, $\Omega_2 = [b, b+\eta] \times [-\tau, T]$, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$. Пусть на множестве Ω определена функция (продолжающая) $\varphi(x,t)$, требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1.2}$$

это условие играет роль начальных и граничных условий.

Обозначим через P банахово пространство регулярных, т. е. ограниченных, измеримых по первому аргументу и непрерывных по второму функций $w(\xi, s)$, определенных на D, с нормой $\|w\|_P = \sup_{(\xi,s)\in D} |w(\xi,s)|$. Будем предполагать, что функционал $f(x,t,u,w)$ определен на $\Pi \times \mathbb{R} \times P$ и удовлетворяет вместе с функцией $\varphi(x,t)$ условиям, гарантирующим существование и единственность решения задачи (1.1), (1.2) (см. [1, с. 20]), в том числе липшицевости $f(x,t,u,w)$ по двум последним аргументам: существуют такие константы L и M, что для любых $(x,t) \in \Pi$, $u^{(1)} \in \mathbb{R}$, $u^{(2)} \in \mathbb{R}$, $w^{(1)} \in D$, $w^{(1)} \in D$ выполняется

$$|f(x,t,u^{(1)},w^{(1)}) - f(x,t,u^{(2)},w^{(2)})| \le L|u^{(1)} - u^{(2)}| + M\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_P.$$

2. Семейство численных методов

Проведем дискретизацию задачи. Пусть пространственный шаг $h > 0$ такой, что $\eta/h = K$ — целое и временной шаг $\Delta > 0$ такой, что $\tau/\Delta = m$ — целое. Обозначим через $x_i = a + ih \in [a-\eta, b+\eta], i = -K, \dots, N+K$, через $t_j = j\Delta \in [-\tau, T], j = -m, \dots, J$. Без ограничения общности будем считать, что $N = (b-a)/h$, $J = T/\Delta$. Сеткой назовем набор таких пар $\{x_i, t_j\}$.

Приближения функции $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки будем обозначать u^i_j. Дискретным влиянием (двумерной предысторией модели) для узла $\{x_i, t_j\} \in \Pi$ назовем набор значений $\{u^n_l\}^i_j = \{u^n_l,\ i - K \leqslant n \leqslant i + K,\ j - m \leqslant l \leqslant j\}$.

Для построения адекватной исходной задаче численной модели в плане учета предыстории введем интерполяцию дискретной предыстории модели.

Определение 1. Оператором двумерной интерполяции II назовем отображение $\{u^k_l\}^i_j \to v_{x_i,t_j} = \{v(x_i + \xi, t_j + s),\ -\eta \leqslant \xi \leqslant \eta,\ -\tau \leqslant s \leqslant 0\} \in P$.

Для рассматриваемых ниже методов потребуется также экстраполяция по времени вперед при заданном параметре $\alpha > 0$. Обозначим $D_\alpha = [-\eta, \eta] \times [0, \alpha\Delta]$, через P_α — множество ограниченных, измеримых по первому аргументу и непрерывных по второму функций $w(\xi, s)$, определенных на D_α.

Определение 2. Оператором двумерной экстраполяции EE назовем отображение $\{u^k_l\}^i_j \to v_{x_i,t_j} = \{v(x_i + \xi, t_j + s),\ -\eta \leqslant \xi \leqslant \eta,\ 0 \leqslant s \leqslant \alpha\Delta\} \in P_\alpha$.

Определение 3. Для натурального k назовем одношаговым k-этапным явным методом типа Рунге — Кутты — ЯРК-методом (с заданной двумерной интерполяцией II и двумерной экстраполяцией EE) — численную модель вида

$$u^i_{j+1} = u^i_j + \Delta \sum_{l=1}^{k} \sigma_l\, h_l(u^i_j, v_{x_i,t_j}), \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, J-1, \tag{2.1}$$

$$h_1(u^i_j, v_{x_i,t_j}) = f(x_i, t_j, u^i_j, v_{x_i,t_j}), \tag{2.2}$$

$$h_l(u^i_j, v_{x_i,t_j}) = f\Big(x_i, t_j + a_l\Delta, u^i_j + \Delta \sum_{n=1}^{l-1} b_{ln} h_n(u^i_j, v_{x_i,t_j}), v_{x_i,t_j+a_l\Delta}\Big) \tag{2.3}$$

с начальными условиями $u^i_j = \varphi(x_i, t_j)$ при $\{x_i, t_j\} \in \Omega_0$, и краевыми условиями $u^i_j = \varphi(x_i, t_j)$ при $\{x_i, t_j\} \in \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Здесь предыстория модели определяется соотношениями

$$v_{x_i,t_j}(\xi, s) = \begin{cases} \varphi(x_i + \xi, t_j + s) & \text{при } t_j + s \leqslant 0, \text{ или } x_i + \xi \leqslant a, \\ & \text{или } x_i + \xi \geqslant b, \\ II(\{u^n_l\}^i_j) & \text{при } -\tau \leqslant s < 0, \\ EE(\{u^n_l\}^i_j) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant \alpha\Delta, \end{cases}$$

$$\alpha = \max\{|a_l|, 1 \leqslant l \leqslant k\}.$$

Числа $\alpha_l, \sigma_l, b_{ln}$ являются коэффициентами метода. Будем обозначать также $\sigma = \max_l\{|\sigma_l|\}$, $b = \max_{l,n}\{|b_{ln}|\}$.

Рассмотрим вопрос о величине погрешности метода $\varepsilon^i_j = u(x_i, t_j) - u^i_j$.

Определение 4. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует такая константа C, что выполняется неравенство: $|\varepsilon^i_j| \leqslant C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \ldots, N$ и $j = 0, \ldots, J$.

Порядок сходимости метода зависит от трех факторов: порядка невязки, порядка интерполяции и порядка экстраполяции.

Определение 5. Невязкой (погрешностью аппроксимации ЯРК-метода) назовем сеточную функцию

$$\psi^i_j = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \sum_{l=1}^{k} \sigma_l\, h_l(u(x_i, t_j), u_{x_i,t_j}).$$

О п р е д е л е н и е 6. Будем говорить, что невязка имеет порядок Δ^q, если существует константа C такая, что выполняется неравенство $|\psi_j^i| \leqslant C\Delta^q$ для всех $i = 1, \ldots, N-1$ и $j = 0, \ldots, J-1$.

Заметим, что невязка определена на точном решении $u(x,t)$ и не зависит от интерполяции и экстраполяции.

О п р е д е л е н и е 7. Будем говорить, что оператор двумерной интерполяции II имеет порядок $h^p + \Delta^q$ на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех $i = 1, \ldots, N-1$, $j = 0, \ldots, J$, $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j - \tau, t_j]$ выполняется неравенство

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leqslant C_1 \max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K,\ j-m\leqslant n\leqslant j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| + C_2(h^p + \Delta^q).$$

О п р е д е л е н и е 8. Будем говорить, что оператор двумерной экстраполяции EE имеет порядок $h^p + \Delta^q$ на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех $i = 1, \ldots, N-1$, $j = 0, \ldots, J$, $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j, t_j + \alpha\Delta]$ выполняется неравенство

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leqslant C_1 \max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K,\ j-m\leqslant n\leqslant j} |u(x_l, t_n) - u_n^l| + C_2(h^p + \Delta^q).$$

3. Теорема сходимости

Сформулируем теорему о порядках сходимости.

Теорема 1. *Если* ЯРК-*метод* (2.1)–(2.3) *имеет порядок невязки* Δ^{q_1}, *двумерная интерполяция предыстории модели имеет порядок* $h^{p_2} + \Delta^{q_2}$, *двумерная экстраполяция имеет порядок* $h^{p_3} + \Delta^{q_3}$ ($p_i > 0, q_i > 0, i = 1, 2, 3$), *то метод сходится с порядком* $h^p + \Delta^q$, *где* $p = \min\{p_2, p_3\}$, $q = \min\{q_1, q_2, q_3\}$.

Для доказательства теоремы рассмотрим два вспомогательных утверждения. В этих утверждениях и их доказательствах, а также в доказательстве самой теоремы, индекс i меняется от 1 до $N-1$.

Лемма 1. *Функционалы* h_l, $l = 1, \ldots, k$, *определяемые в* (2.2), (2.3), *липшицевы в следующем смысле: найдутся такие константы* L_l *и* M_l, *что*

$$|h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}) - h_l(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j})|$$

$$\leqslant L_l|u_j^i - u(x_i,t_j)| + M_l \sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta, t_j-\tau\leqslant t\leqslant t_j+\alpha\Delta} |v(x,t) - u(x,t)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем индукцией по l.

При $l = 1$ функционал $h_1(u_j^i, v_{x_i,t_j}) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_{x_i,t_j})$ и, следовательно, по предположению разд. 1 липшецев, причем $L_1 = L$, $M_1 = M$.

Предположим, что для индексов $n \leqslant l-1$ функционалы h_n липшицевы с константами L_n, M_n. Докажем липшицевость функционала h_l:

$$\big|h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}) - h_l(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j})\big| = \bigg|f\Big(x_i, t_j + a_l\Delta, u_j^i + \Delta\sum_{n=1}^{l-1} b_{ln}h_n(u_j^i, v_{x_i,t_j}), v_{x_i,t_j+a_l\Delta}\Big)$$

$$- f\Big(x_i, t_j + a_l\Delta, u(x_i,t_j) + \Delta\sum_{n=1}^{l-1} b_{ln}h_n(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j}), u_{x_i,t_j+a_l\Delta}\Big)\bigg|$$

$$\leqslant L|u_j^i - u(x_i,t_j)| + L\Delta b\sum_{n=1}^{l-1}\big|h_n(u_j^i, v_{x_i,t_j}) - h_n(u(x_i,t_j), u_{x_i,t_j})\big|$$

$$+M\sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta,t_j-\tau\leqslant t\leqslant t_j+\alpha\Delta}|v(x,t)-u(x,t)|\leqslant L|u_j^i-u(x_i,t_j)|$$

$$+L\Delta b\sum_{n=1}^{l-1}\Big(L_n|u_j^i-u(x_i,t_j)|+M_n\sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta,t_l-\tau\leqslant t\leqslant t_l+\alpha\Delta}|v(x,t)-u(x,t)|\Big)$$

$$+M\sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta,t_l-\tau\leqslant t\leqslant t_l+\alpha\Delta}|v(x,t)-u(x,t)|.$$

Таким образом, функционал h_l липшицев с константами

$$L_l=L+L\Delta b\sum_{n=1}^{l-1}L_n,\quad M_l=M+L\Delta b\sum_{n=1}^{l-1}M_n.$$

Лемма 2. *Если оператор двумерной интерполяции имеет порядок $h^{p_2}+\Delta^{q_2}$, оператор двумерной экстраполяции имеет порядок $h^{p_3}+\Delta^{q_3}$, то найдутся такие константы $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$, что выполняется неравенство*

$$|h_l(u_j^i,v_{x_i,t_j})-h_l(u(x_i,t_j),u_{x_i,t_j})|$$

$$\leqslant\hat{C}_1\max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K,j-m\leqslant n\leqslant j}|u(x_l,t_n)-u_n^l|+\hat{C}_2(h^{\min\{p_2,p_3\}}+\Delta^{\min\{q_2,q_3\}}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, объединяя определения порядков операторов двумерной интерполяции и экстраполяции, получаем, что найдутся константы C_1 и C_2, такие, что для всех $i=0,\dots,N$, $j=0,\dots,J$, $x\in[x_i-\eta,x_i+\eta]$ и $t\in[t_j,t_j-\tau+\alpha\Delta]$ выполняется неравенство

$$|u(x,t)-v(x,t)|\leqslant C_1\max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K,j-m\leqslant n\leqslant j}|u(x_l,t_n)-u_n^l|+C_2(h^{\min\{p_2,p_3\}}+\Delta^{\min\{q_2,q_3\}}).$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает

$$\big|h_l(u_j^i,v_{x_i,t_j})-h_l(u(x_i,t_j),u_{x_i,t_j})\big|\leqslant L_l|u_j^i-u(x_i,t_j)|+M_l\sup_{x_i-\eta\leqslant x\leqslant x_i+\eta,t_l-\tau\leqslant t\leqslant t_l+\alpha\Delta}|v(x,t)-u(x,t)|$$

$$\leqslant L_l\|u_j^i-u(x_i,t_j)\|+M_l\Big(C_1\max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K,j-m\leqslant n\leqslant j}|u(x_l,t_n)-u_n^l|+C_2\big(h^{\min\{p_2,p_3\}}+\Delta^{\min\{q_2,q_3\}}\big)\Big).$$

Взяв $\hat{C}_1=\max_{1\leqslant l\leqslant k}M_lC_1+\max_{1\leqslant l\leqslant k}L_l$, $\hat{C}_2=\max_{1\leqslant l\leqslant k}M_lC_2$, получим утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Выразим величину модуля погрешности $|\varepsilon_{j+1}^i|$ через $|\varepsilon_j^i|$, при этом точное решение $u(x_i,t_{j+1})$ подставим из определения невязки, а приближенное u_{j+1}^i — из определения метода (2.1)–(2.3). С использованием леммы 2 получаем

$$|\varepsilon_{j+1}^i|=\big|u(x_i,t_{j+1})-u_{j+1}^i\big|=\Big|u(x_i,t_j)+\Delta\psi_j^i-u_j^i+\Delta\sum_{l=1}^k\sigma_l\left(h_l(u(x_i,t_j),u_{x_i,t_j})-h_l(u_j^i,v_{x_i,t_j})\right)\Big|$$

$$\leqslant|\varepsilon_j^i|+\Delta|\psi_j^i|+\Delta\sum_{l=1}^k|\sigma_l|\left(\hat{C}_1\max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K,j-m\leqslant n\leqslant j}|\varepsilon_n^i|+\hat{C}_2(h^{\min\{p_2,p_3\}}+\Delta^{\min\{q_2,q_3\}})\right)$$

$$\leqslant|\varepsilon_j^i|+\Delta k\sigma\hat{C}_1\max_{i-K\leqslant l\leqslant i+K,j-m\leqslant n\leqslant j}|\varepsilon_n^i|+\Delta k\sigma\hat{C}_2(h^{\min\{p_2,p_3\}}+\Delta^{\min\{q_2,q_3\}})+C\Delta^{q_1+1}.$$

Введем послойную норму погрешности $\epsilon_j=\|\varepsilon_j^i\|_j=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}|\varepsilon_j^i|$, тогда выведенную оценку можно переписать как

$$\epsilon_{j+1}\leqslant\epsilon_j+\Delta C_3\max_{j-m\leqslant n\leqslant j}\epsilon_n+C_4\Delta(h^p+\Delta^q),\tag{3.1}$$

где $C_3 = k\sigma\hat{C}_1$, $C_4 = k\sigma\hat{C}_2 + C$, $p = \min\{p_2, p_3\}$, $q = \min\{q_1, q_2, q_3\}$.

Индукцией по j докажем оценку

$$\epsilon_j \leqslant (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4(h^p + \Delta^q). \tag{3.2}$$

База индукции выполняется, так как $\epsilon_0 = 0$.

Шаг индукции. Пусть оценка (3.2) выполняется для индексов $\leqslant j$, покажем ее справедливость для $j + 1$.

Пусть max в правой части оценки (3.1) достигается на индексе $n_0 \leqslant j$, тогда, применяя индуктивное предположение к ϵ_j и ϵ_{n_0}, получаем

$$\epsilon_{j+1} \leqslant \epsilon_j + \Delta C_3 \epsilon_{n_0} + C_4\Delta(h^p + \Delta^q) \leqslant (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4(h^p + \Delta^q)$$

$$+ \Delta C_3(1 + \Delta(C_3 + 1))^{n_0} C_4(h^p + \Delta^q) + C_4(h^p + \Delta^q) \leqslant (1 + \Delta(C_3 + 1))^j C_4(h^p + \Delta^q)(1 + C_3\Delta + \Delta).$$

Оценка (3.2) доказана.

Так как $j \leqslant J = T/\Delta$, то из (3.2) вытекает оценка

$$\epsilon_j \leqslant (1 + \Delta(C_3 + 1))^{T/\Delta} C_4(h^p + \Delta^q) \leqslant e^{(C_3+1)T} C_4(h^p + \Delta^q),$$

которая содержит утверждение теоремы. □

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос о построении эффективных алгоритмов, с учетом факторов, обеспечивающих порядок сходимости методов. Для обеспечения методов с высоким порядком невязки можно конструировать полные аналоги известных для обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений алгоритмов. При этом для определения порядка невязки используются тейлоровские разложения точного решения и правой части исходного уравнения с использованием техники i-гладкого анализа [2]. Главной проблемой обеспечения нужного порядка сходимости метода является подбор соответствующего способа двумерных интерполяции и экстраполяции.

4. Двумерные интерполяция и экстраполяция

Опишем двумерную интерполяцию, основанную на интерполяции по каждой переменной функциями, кусочно составленными из многочленов p-й степени и q-й степени соответственно, где p и q — произвольные натуральные числа. Таким образом, по каждой переменной будет произведена интерполяция вырожденными сплайнами p-й и q-й степени соответственно. Без ограничения общности будем предполагать, что $\dfrac{2K}{p} = k_p$ — целое, в противном случае можно выбирать $2K$ (это число определяет шаг h) кратным p. Аналогично будем предполагать, что $\dfrac{m}{q} = k_q$ — целое, в противном случае можно выбирать m кратным q.

Сначала опишем одномерную интерполяцию по времени t. Зафиксируем индекс i, $1 \leqslant i \leqslant N - 1$, и соответственно пространственную координату узла x_i. Одномерной предысторией модели для узла $\{x_i, t_j\} \in \Pi$ назовем набор значений $\{u_l^i\}_j^i = \{u_l^n,\ j - m \leqslant l \leqslant j\}$.

Разобьем отрезок $[t_j - \tau, t_j]$ справа на k_q подотрезков $[t_{j_{n+1}}, t_{j_n}]$, $n = 0, 1, \ldots, k_q - 1$, длиной $q\Delta$ таким образом, что $t_{j_0} = t_j$, $t_{j_1} = t_{j-q}$, …. На каждом отрезке $[t_{j_{n+1}}, t_{j_n}]$ построим интерполяционный многочлен $L_q(t) = L_q^n(t)$ степени q по данным $u^i_{j_n-q}$, $u^i_{j_n-q+1}, \ldots, u_{j_n}$ в форме Лагранжа:

$$L_q^n(t) = \sum_{l=0}^{q} u^i_{j_n-l} \prod_{k=j_n-q;\ k\neq j_n-l}^{j_n} \frac{t - t_k}{t_{j_n-l} - t_k}. \tag{4.1}$$

О п р е д е л е н и е 9. Оператором интерполяции одномерной предыстории модели вырожденными сплайнами q-й степени назовем отображение

$$I : \{u_l^i\}_j^i \to w^i(t) = \begin{cases} L_q^n(t), & t_{j_{n+1}} \le t < t_{j_n},\ n = 0, \ldots, j - 1, \\ \varphi(x_i, t), & t \in [t_j - \tau, 0]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Теорема 2 [2, теорема 3.2]. *Пусть точное решение $u(x,t)$ обладает непрерывными частными производными $q+1$-го порядка по t на отрезке $[-\tau, T]$ при фиксированном $x = x_i$, тогда оператор интерполяции* (4.1), (4.2) *вырожденными сплайнами q-й степени имеет погрешность интерполяции $q+1$, то есть найдутся постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $j = 0, 1, \ldots, J$ и $t \in [t_j - \tau, t_j]$ выполняется неравенство*

$$|u(x_i,t) - w^i(t)| \le C_1 \max_{j-m\le n\le j} |u(x_i,t_n) - u^i_n| + C_2\Delta^{q+1}.$$

Доказательство приведено в [2, с. 98], при этом $C_1 = (q+1)!$, $C_2 = \dfrac{M_{t,q+1}}{q+1}$, где

$$M_{t,q+1} = \max_{-\tau\le t\le T,\ a\le x\le b} \left| \frac{\partial^{q+1}}{(\partial t)^{q+1}} u(x,t) \right|.$$

Отметим, что константы C_1 и C_2 не зависят от $x = x_i$. □

Теперь, считая, что при фиксированных i, j $(1 \leqslant i \leqslant N-1, 0 \leqslant i \leqslant J-1)$ построены функции $w^k(t)$, при $t_j - \tau \leqslant t \leqslant t_j$ и $i - K \leqslant k \leqslant i+K, 1 \leqslant k \leqslant N-1$, построим при фиксированном $t \in [t_j - \tau, t_j]$ вырожденные сплайны p-й степени по x на отрезке $[x_i - \eta, x_i + \eta]$.

Разобьем отрезок $[x_i - \eta, x_i + \eta]$ на k_p подотрезков $[x^{n-1}, x^n]$, $n = 1, 2, \ldots, k_p$, длиной ph таким образом, что $x^0 = x_i - \eta = x_{i-K}$, $x^1 = x^0 + ph = x_{i-K+p}$, …, $x^n = x_{i-K+np}$, …, $x^{k_p} = x_i + \eta = x_{i+K}$. На каждом отрезке $[x^{n-1}, x^n]$ построим интерполяционный многочлен $L_p(x) = L^n_p(x,t)$ степени p по данным $w^{i-K+(n-1)p}(t)$, $w^{i-K+(n-1)p+1}(t)$, …, $w^{i-K+np}(t)$:

$$L^n_p(x,t) = \sum_{l=0}^{p} w^{i-K+(n-1)p+l}(t) \prod_{k=i-K+(n-1)p;\ k\ne i-K+(n-1)p+l}^{i-K+np} \frac{x - x_k}{x_{i-K+(n-1)p+l} - x_k}. \tag{4.3}$$

Определение 10. Оператором интерполяции двумерной предыстории модели вырожденными сплайнами q-й степени по переменной $t \in [t_j - \tau, t_j]$ и вырожденными сплайнами p-й степени по переменной $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ назовем отображение

$$II : \{u^k_l\}^i_j \to v(x,t) = \begin{cases} L^n_p(x,t), & x^{n-1} \le x < x^n,\ n = 1, \ldots, k_p, \\ \varphi(x,t), & x \in [a-\eta, a] \cup [b, b+\eta]. \end{cases} \tag{4.4}$$

Теорема 3. *Пусть точное решение $u(x,t)$ обладает непрерывными частными производными $q+1$-го порядка по t и непрерывными частными производными $p+1$-го порядка по x на множестве $\Pi \cup \Omega$, тогда оператор интерполяции II вида* (4.3), (4.4) *имеет порядок $h^{p+1} + \Delta^{q+1}$ на точном решении.*

Доказательство. Возьмем согласно определению порядка оператора двумерной интерполяции II индексы $i = 1, \ldots, N-1$, $j = 0, \ldots, J$ и числа $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ и $t \in [t_j - \tau, t_j]$. Пусть x лежит в подотрезке $[x^{n-1}, x^n]$. Тогда

$$|u(x,t) - v(x,t)| = |u(x,t) - L^n_p(x,t)| \le |u(x,t) - \hat{L}^n_p(x,t)| + |L^n_p(x,t) - \hat{L}^n_p(x,t)|,$$

где $\hat{L}^n_p(x,t)$ — функция, являющаяся при фиксированном t интерполяционным многочленом p-й степени по x, построенным по значениям $u(x_l, t)$ на отрезке $[x^{n-1}, x^n]$:

$$\hat{L}^n_p(x,t) = \sum_{l=0}^{p} u(x_{i-K+(n-1)p+l}, t) \prod_{k=i-K+(n-1)p;\ k\ne i-K+(n-1)p+l}^{i-K+np} \frac{x - x_k}{x_{i-K+(n-1)p+l} - x_k}.$$

Погрешность интерполяции точного решения вычисляется по формуле

$$|R_p(x,t)| = |u(x,t) - L^n_p(x,t)| = \left| \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial^{p+1}}{(\partial x)^{p+1}} u(\xi,t) \prod_{j=0}^{p} (x - x_{i-K+(n-1)p+l}) \right|,$$

где $\xi \in [x_{i-K+(n-1)p}, x_{i-K+np}]$. Таким образом, если $x \in [x_{i-K+(n-1)p}, x_{i-K+np}]$, то

$$\Bigg| \prod_{k=i-K+(n-1)p;\ k\neq i-K+(n-1)p+l}^{i-K+np} \frac{x-x_k}{x_{i-K+(n-1)p+l}-x_k} \Bigg| \le h\cdot h\cdot(2h)\cdots(ph) = h^{p+1}p!$$

и

$$|R_p(x,t)| \le \frac{M_{x,p+1}}{(p+1)!}\, p!\, h^{p+1} = \frac{M_{x,p+1}}{p+1}\, h^{p+1}, \tag{4.5}$$

где $M_{x,p+1} = \max\limits_{-\tau\le t\le,\ a-K\le x\le b+K} \Big| \dfrac{\partial^{p+1}}{(\partial x)^{p+1}} u(x,t) \Big|$. Кроме того, имеем оценку

$$\big| L_p^n(x,t) - \hat{L}_p^n(x,t) \big|$$

$$\le \sum_{l=0}^{p} \big| u(x_{i-K+(n-1)p+l}, t) - w^{i-K+(n-1)p+l}(t) \big| \prod_{k=i-K+(n-1)p;\ k\neq i-K+(n-1)p+l}^{i-K+np} \frac{|x-x_k|}{|x_{i-K+(n-1)p+l}-x_k|}$$

$$\le \max_{i-K\le n\le i+k,\ t_j-\tau\le t\le t_j} |u(x_n,t) - w^n(t)|\,(p+1)!. \tag{4.6}$$

Из оценки (4.6) и теоремы 2 вытекает

$$|L_p^n(x,t) - \hat{L}_p^n(x,t)| \le (p+1)!(q+1)! \max_{i-K\le n\le i+k,\ j-m\le k\le j} |u(x_n,t_k) - u_k^n| + C_2\Delta^{q+1}. \tag{4.7}$$

Из (4.5) и (4.7) получаем

$$|u(x,t) - v(x,t)| \le C_3 \max_{i-K\le n\le i+k,\ j-m\le k\le j} |u(x_n,t_k) - u_k^n| + C_4 h^{p+1} + C_2\Delta^{q+1},$$

где $C_3 = (p+1)!(q+1)!$, $C_2 = \dfrac{M_{t,q+1}}{q+1}$, $C_4 = \dfrac{M_{x,p+1}}{p+1}$. Эта оценка доказывает утверждение теоремы. □

Примером описанного способа двумерной интерполяции является кусочно-линейная интерполяция по каждой переменной (билинейная), которая при соответствующих условиях гладкости точного решения имеет порядок $h^2 + \Delta^2$.

Опишем способ экстраполяции продолжением.

Пусть проведена одномерная интерполяция (4.1), (4.2) вырожденными сплайнами q-й степени. Один из способов задания оператора E одномерной экстраполяции – экстраполяция продолжением интерполяционного многочлена

$$E : \{u_l^i\}_j^i \to w^i(t) = L_p^0(t), \quad t \in [t_j, t_j + \alpha\Delta], \tag{4.8}$$

где $L_p^0(t)$ — интерполяционный многочлен p-й степени вида (4.1), построенный на отрезке $[t_{j-p}, t_j]$. Таким образом, при фиксированных i, j $(1 \leqslant i \leqslant N-1, 0 \leqslant i \leqslant J-1)$ построены функции $w^k(t)$, при $t_j \leqslant t \leqslant t_j + \alpha\Delta$ и $i-K \leqslant k \leqslant i+K, 1 \leqslant k \leqslant N-1$, поэтому, также как в случае двумерной интерполяции, построим при фиксированном $t \in [t_j, t_j+\alpha\Delta]$ вырожденные сплайны p-й степени по x на отрезке $[x_i - \eta, x_i + \eta]$.

Определение 11. Оператором экстраполяции двумерной предыстории модели вырожденными сплайнами q-й степени по переменной $t \in [t_j, t_j+\alpha\Delta]$ и вырожденными сплайнами p-й степени по переменной $x \in [x_i - \eta, x_i + \eta]$ назовем отображение

$$EE : \{u_l^k\}_j^i \to v(x,t) = \begin{cases} L_p^n(x,t), & x^{n-1} \le x < x^n,\ n = 1,\dots,k_p, \\ \varphi(x,t), & x \in [a-\eta, a] \cup [b, b+\eta], \end{cases} \tag{4.9}$$

где функции $L_p^n(x,t)$ определяются по формуле (4.3), но в отличие от интерполяции эти функции определяются при $t \in [t_j, t_j + \alpha\Delta]$.

Аналогично теореме 3 проверяется следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть точное решение $u(x,t)$ обладает непрерывными частными производными $q+1$-го порядка по t и непрерывными частными производными $p+1$-го порядка по x на множестве $\Pi \cup \Omega$, тогда оператор экстраполяции EE вида (4.3), (4.8), (4.9) имеет порядок $h^{p+1} + \Delta^{q+1}$ на точном решении.*

5. Численный эксперимент

Рассмотрим следующее семейство смешанных функционально-дифференциальных уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u(x,t) + \beta u(x,t-\tau) + \int\limits_{-\eta}^{\eta} u(x+\xi,t)d\xi + R(x,t), \tag{5.1}$$

где $u(x,t) = \phi(x,t)$ при $(x,t) \in [a-\eta,a) \times [0,T] \cup [a,b] \times [-\tau,0) \cup (b,b+\eta] \times [0,T]$; $\alpha, \beta, R(x,t)$ — параметры семейства.

Требуется вычислить $u(x,t)$ при $(x,t) \in [a,b] \times [0,T]$.

Опишем схему численного решения любого уравнения из семейства (5.1) в виде четырехэтапного явного метода типа Рунге — Кутты, имеющего невязку порядка Δ^4.

Для интерполяции значений сосредоточенного запаздывания по времени и распределенного влияния по пространству будем использовать по каждой переменной вырожденные кубические сплайны. Совокупная погрешность выбранного способа кусочно-бикубической интерполяции имеет порядок $h^4 + \Delta^4$ на точном решении.

Для численного интегрирования будем использовать составную формулу Ньютона — Котеса (метод Симпсона):

$$I(x_i,t_j) = \int\limits_{-\eta}^{\eta} u(x+\xi,t)d\xi \approx \frac{h}{3}\Big(u_j^{i-K} + u_j^{i+K} + 4\sum_{k=1}^{K} u_j^{i-K+2k-1} + 2\sum_{k=1}^{K} u_j^{i-K+2k}\Big) = I_j^i.$$

О п р е д е л е н и е 12. Методом Рунге — Кутты четвертого порядка для решения уравнений из семейства (5.1) назовем следующий алгоритм.

Ш а г 1.1. Прогноз $u_{j+0.5}^i$:

$$h_1 = \alpha u_j^i + \beta u_{j-m}^i + I_j^i + R(t_j,x_i),$$

$$u_{j+0.5}^i = u_j^i + \frac{\Delta}{2}h_1.$$

Шаг 1.2. Интерполяция $u_{j+0.5-m}^i$:

$$L_3(t_{j+0.5-m}) = \sum_{l=0}^{3} u_{m-l}^i \prod_{k=m-3;\ k\neq m-l}^{m} \frac{t_{j+0.5-m} - t_k}{t_{m-l} - t_k},$$

$$u_{j+0.5-m}^i = \begin{cases} \varphi(x_i,t), & t_{j+0.5-m} < 0, \\ L_3(t), & t_{j+0.5-m} \geq 0. \end{cases}$$

Ш а г 2. Коррекция $u_{j+0.5}^i$:

$$h_2 = \alpha u_{j+0.5}^i + \beta u_{j+0.5-m}^i + I_{j+0.5}^i + R(t_{j+0.5},x_i),$$

$$u_{j+0.5}^i = u_j^i + \frac{\Delta}{2}h_2.$$

Ш а г 3. Прогноз u^i_{j+1}:

$$h_3 = \alpha u^i_{j+0.5} + \beta u^i_{j+0.5-m} + I^i_{j+0.5} + R(t_{j+0.5}, x_i),$$
$$u^i_{j+1} = u^i_j + \Delta h_3.$$

Ш а г 4. Коррекция u^i_{j+1}:

$$h_4 = \alpha u^i_{j+1} + \beta u^i_{j+1-m} + I^i_{j+1} + R(t_{j+1}, x_i),$$
$$u^i_{j+1} = u^i_j + \frac{\Delta}{6}(h_1 + 2(h_2 + h_3) + h_4).$$

Согласно теореме 1 представленный метод сходится с порядком $h^4 + \Delta^4$.

В заключение рассмотрим пример численного решения уравнения из семейства (5.1):

$$\alpha = 1 - \frac{2}{\pi}\sqrt{2-\sqrt{2}}; \quad \beta = 1; \quad R(x,t) = -\frac{\pi}{2}e^{t-1.25}\cos\frac{\pi x}{2},$$

$$\eta = 0.25; \quad \tau = 0.25; \quad a = -1; \quad b = 1; \quad T = 1,$$

$$\varphi(x,t) = \frac{\pi}{2}e^{t-1}\cos\frac{\pi x}{2}.$$

При указанных параметрах уравнение из семейства (5.1) будет иметь единственное решение

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2}e^{t-1}\cos\frac{\pi x}{2} \equiv \varphi(x,t).$$

На рис. 1, рис. 2 представлены графики, отражающие динамику абсолютной погрешности метода $|\varepsilon^i_j| = |u(x_i,t_j) - u^i_j|$ при $j = 0,\ldots,J$; $i = 0,\ldots,N$. Приведены сравнительные результаты по трем экспериментам, в которых шаги по переменным согласованы: $h = \Delta = 0.01$; 0.02; 0.03.

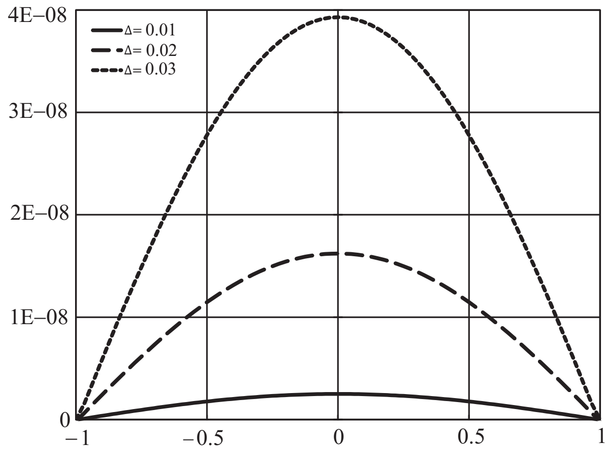

Рис. 1. Динамика развития $\epsilon_j = \max\limits_{i=0,\ldots,N}|\varepsilon^i_j|$.

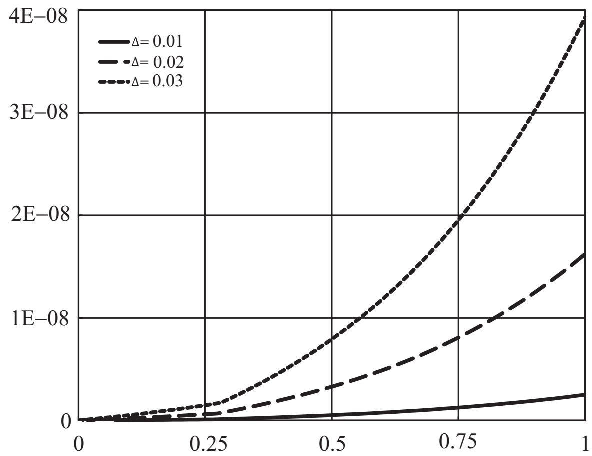

Рис. 2. График величины $\varepsilon^i_T = |u(x_i,T) - u^i_J|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мышкис А.Д.** Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.
2. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: РХД, 2004. 256 с.
3. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178–189.
4. **Пименов В.Г., Паначев М.А.** Численные алгоритмы и программы для решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Теория управления и математическое моделирование: тр. конф. Ижевск: Изд. ИжГТУ, 2012. С. 60–61.
5. **Пименов В.Г., Паначев М.А.** Решение уравнения переноса с запаздыванием путем использования численных методов для смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Вест. Тамб. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5-2. С. 2637–2638.
6. **Panachev M.A.** Startingless multistep methods approach for the numerical solution of the mixed functional differential equations // AIP Conf. Proc. 2014. Vol. 1631, iss. 1. P. 224–229.
7. **Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
8. **Пименов В.Г.** Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 132 с.

Пименов Владимир Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Поступила 3.02.2015

Паначев Максим Александрович
ассистент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: max.panachev@live.ru