ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

# МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В РЕКУРРЕНТНОМ ПРИМЕРЕ Л. С. ПОНТРЯГИНА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

**Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева**

Рассматривается обобщенный нестационарный пример Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков и фазовыми ограничениями на состояния убегающего. Граница фазовых ограничений не является “линией смерти” для убегающего. Множество допустимых управлений — шар с центром в нуле, терминальные множества — начало координат. Получены достаточные условия многократной поимки группой преследователей одного убегающего при условии, что некоторые функции, отвечающие начальным данным и параметрам игры, являются рекуррентными.

Ключевые слова: преследователь, убегающий, фазовые ограничения, пример Л. С. Понтрягина, групповое преследование.

N. N. Petrov, N. A. Solov'eva. Multiple capture in Pontryagin's recursive example with phase constraints.

We consider Pontryagin's generalized nonstationary example with identical dynamic and inertial capabilities of the players and state constraints on the evader's states. The boundary of the phase constraints is not a “death line” for the evader. The set of admissible controls is a ball centered at the origin, and the terminal sets are the origin. We obtain sufficient conditions for a multiple capture of one evader by a group of pursuers in the case when some functions corresponding to the initial data and parameters of the game are recursive.

Keywords: pursuer, evader, phase restrictions, Pontryagin's example, group pursuit.

## Введение

Рассматривается обобщенный нестационарный пример Л. С. Понтрягина [1–6] со многими участниками при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков. Задача простого группового преследования с равными возможностями всех участников впервые рассматривалась Б. Н. Пшеничным [7], были получены необходимые и достаточные условия поимки одного убегающего. Однократная поимка в примере Понтрягина рассматривалась, в частности, в работах [8–10].

Для задачи с простым движением и равными возможностями всех участников Н. Л. Григоренко [11] были представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования рассматривалась А. И. Благодатских [12]. В работе [13] Н. Н. Петровым получены достаточные условия многократной поимки в стационарном примере Понтрягина с фазовыми ограничениями. В работе А. И. Благодатских [14] получены достаточные условия многократной поимки в нестационарном примере Понтрягина при условии, что некоторые функции являются почти-периодическими, а терминальные множества — начало координат.

В данной работе рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего при равных динамических и инерционных возможностях игроков. Предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества, терминальные множества — начало координат. При условии, что некоторые функции, определяемые начальными условиями и параметрами игры, являются рекуррентными, получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Работа примыкает к исследованиям [15–17].

[1]Работа выполнена при поддержке Минобранауки в рамках базовой части.

## 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, B)$ $n+1$ лиц: $n$ преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающий $E$.

Движение каждого преследователя $P_i$ описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{1.1}$$

закон движения убегающего $E$ имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2(t)y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y = v, \quad v \in V, \tag{1.2}$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, функции $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$, $V$ — выпуклый компакт. В момент $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 - y^0 \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

Дополнительно предполагается, что убегающий не покидает пределы выпуклого множества

$$B = \{y \colon y \in \mathbb{R}^k, (p_c, y) \leq \mu_c, c = 1, 2, \ldots, r\}$$

с непустой внутренностью, где $(a, b)$ — скалярное произведение векторов $a$ и $b$, $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа.

Вместо (1.1)–(1.3) рассмотрим уравнение

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)z_i = u_i - v \tag{1.4}$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q. \tag{1.5}$$

Через $\varphi_q(t, s)$ $(t \geq s \geq t_0)$ обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(q-1)}(s) = 0,\ \omega^{(q)}(s) = 1,\ \omega^{(q+1)}(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_i^0 + \varphi_1(t, t_0)z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_i^{l-1},$$
$$\eta(t) = \varphi_0(t, t_0)y^0 + \varphi_1(t, t_0)y^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)y^{l-1}.$$

Считаем, что $\xi_i(t) \neq 0$ для всех $i, t \geq t_0$, ибо если $\xi_i(\tau) = 0$ при некоторых $i, \tau$, то преследователь $P_i$ ловит убегающего $E$, полагая $u_i(t) = v(t)$.

Определение 1. Будем говорить, что задана квазистратегия $U_i$ преследователя $P_i$, если определено отображение $U_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0$, моменту $t$ и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего $E$ такой, что $y(t) \in D$ для всех $t \geq t_0$, измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в $V$.

Определение 2. В игре $\Gamma(n, D)$ происходит $m$-кратная поимка (при $m = 1$ поимка), если существуют момент $T(z^0)$, квазистратегии $U_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, U_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V$, $y(t) \in D$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ существуют моменты $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [t_0, T(z^0)]$, попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_m \in I$, такие, что $z_{i_s}(\tau_s) = 0, s = 1, \ldots, m$.

О п р е д е л е н и е 3 [18]. Функция $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a+T(\varepsilon)]$ для которых справедливо неравенство $\|f(t+\tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon$.

Функция $f\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *рекуррентной на* $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Обозначим через $\mathrm{Int}X$, $\mathrm{co}X$ внутренность и выпуклую оболочку множества $X$,

$$\Omega(p) = \{(i_1, \ldots, i_p) | i_1, \ldots, i_p \in I \text{ и попарно различны}\},$$

$$r(t,s) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s) \geq 0, \\ -1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s) < 0, \end{cases} \quad (t_0 \leq s \leq t),$$

$$\lambda(v, \mu, b_i) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda\mu b_i \cap (V - v) \neq \varnothing\},$$

$$G_i(t, v(\cdot), b_i) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \lambda(v(s), r(t,s), b_i)) ds, \quad F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| ds.$$

## 2. Условия поимки

**Предположение 1.** 1. $n \geq m + k - 1$.
2. *Функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными на* $[t_0, \infty)$.
3. *Функция* $\eta(t)$ *ограничена на* $[t_0, \infty)$.
4. $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = \infty$.
5. $V = D_1(0)$, *где* $D_r(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z - a\| \leq r\}$.

Отметим, что условие 2 будет, в частности, выполнено, если функции $a_i(t)$ являются постоянными, а корни характеристического уравнения (1.4) являются простыми и чисто мнимыми.

**Предположение 2.** *Существуют моменты* $\tau_i^0 \in [t_0, \infty)$ *такие, что для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$ *выполнено включение*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{\xi_j(\tau_j^0), j \in \Lambda, p_1, \ldots, p_r\}.$$

**Лемма 1.** *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда существуют* $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon) > 0$ *для которых справедливы следующие утверждения*:

1. $0 \notin D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *и каждый набор* $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $h_i \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$, *обладает свойством*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{h_j, j \in \Lambda, p_1, \ldots, p_r\} \text{ для всех } \Lambda \in \Omega(n - m + 1).$$

2. *Для каждого* $t \geq t_0$ *найдется момент* $\tau_i(t) \in [t, t+T(\varepsilon)]$ *такой, что* $\xi_i(\tau_i(t)) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$.

Справедливость первого утверждения следует из свойства открытых множеств, а справедливость второго утверждения — из свойства рекуррентных функций.

Выберем и зафиксируем $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon) > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 1.

Обозначим через

$$D = D_\varepsilon(\xi_1(\tau_1^0)) \times D_\varepsilon(\xi_2(\tau_2^0)) \times \cdots \times D_\varepsilon(\xi_n(\tau_n^0)),$$

$$\delta = \min_{h \in D} \min_{r \in \{-1,1\}} \min_{v \in V} \max \big\{ \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, r, h_j), \max_s (p_s, v) \big\}.$$

**Лемма 2.** *Пусть* $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^k$, $b_j \neq 0$, $V = D_1(0)$. *В этом случае*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{b_1, \ldots, b_n, p_1, \ldots, p_r\} \tag{2.1}$$

*тогда и только тогда, когда*

$$\delta_0 = \min_{v \in V} \max \big\{ \max_j \lambda(v, 1, b_j), \max_s (p_s, v) \big\} > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (2.1). Предположим, что $\delta_0 = 0$. Тогда существует $v_0 \in V$ для которого $\lambda(v_0, 1, b_j) = 0$, $(p_s, v_0) \le 0$ для всех $j, s$. Так как [4, с. 56]

$$\lambda(v, 1, b_j) = \frac{(b_j, v) + \sqrt{(b_j, v)^2 + \|b_j\|^2(1 - \|v\|^2)}}{\|b_j\|^2},$$

то получаем, что $\|v_0\| = 1$ и для всех $j$ верно неравенство $(b_j, v_0) \le 0$. Следовательно, множество $\mathrm{co}\{b_1, \dots, b_n, p_1, \dots, p_r\}$ отделимо от нуля. Получили противоречие.

Пусть $\delta_0 > 0$. Докажем (2.1). Предположим, что условие (2.1) не выполняется. Тогда множество $\mathrm{co}\{b_1, \dots, b_n, p_1, \dots, p_r\}$ отделимо от нуля. Поэтому существует $v_0 \in V$, $\|v_0\| = 1$ и такой, что $(b_j, v_0) \le 0$, $(p_s, v_0) \le 0$ для всех $j, s$. Отсюда $\delta_0 = 0$. Получили противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть $V = D_1(0)$ и выполнено предположение 2. Тогда $\delta > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $h \in D$. Пусть

$$\delta^+(h) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, +1, h_j),$$

$$\delta^-(h) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, -1, h_j).$$

Докажем, что $\delta^+(h) > 0$, $\delta^-(h) > 0$. Предположим, что $\delta^+(h) = 0$. Тогда существует $v \in V$, что для каждого $\Lambda \in \Omega(m)$ найдется номер $p \in \Lambda$, для которого $\lambda(v, +1, h_p) = 0$ и, кроме того, $\max\limits_s (p_s, v) \le 0$. Построим множество $\Lambda_0 \in \Omega(n - m + 1)$ по следующему правилу. Выберем $p_1 \in L_1 = \{1, 2, \dots, m\} \in \Omega(m)$ и $h_{p_1}$ — из условия $\lambda(v, 1, h_{p_1}) = 0$, $p_2 \in L_2 = \big(L_1 \cup \{m + 1\}\big) \setminus \{p_1\}$ и $h_{p_2}$ — из условия $\lambda(v, 1, h_{p_2}) = 0$ и так далее. На последнем шаге построим множество $L_{n-m+1} = \big(L_{n-m} \cup \{n\}\big) \setminus \{p_{n-m}\}$ и выберем $p_{n-m+1} \in L_{n-m+1}$ и $h_{p_{n-m+1}}$, для которых $\lambda(v, 1, h_{n-m+1}) = 0$. По построению множества $\Lambda_0$ имеем $\max\{\max\limits_{j \in \Lambda_0} \lambda(v, 1, h_j), \max\limits_s (p_s, v)\} = 0$. Поэтому из леммы 2 следует, что $0 \notin \mathrm{Intco}\{h_j, j \in \Lambda_0, p_1, \dots p_r\}$, что противоречит предположению 1. Значит, $\delta^+(h) > 0$ для всех $h \in D$. Аналогично доказывается, что $\delta^-(h) > 0$ для всех $h \in D$. Так как $V$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то в силу леммы 1.3.13 [4, с. 30] функции $\lambda(v, \pm 1, h)$ непрерывны по $(v, h)$. Осталось применить теорему Вейерштрасса. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k, n \ge k$, выполнено включение (2.1) и $b_1, \dots, b_k$ линейно независимы. Тогда существуют такие $p \in \mathbb{R}^k, \mu \in \mathbb{R}^1$, что $B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \le \mu\}$ и $0 \in \mathrm{Intco}\{b_1, \dots, b_n, p\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (2.1) [19] следует, что существуют $\alpha_i > 0, \beta_j > 0$ такие, что $0 = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r$. Пусть $x \in \mathbb{R}^k$. Тогда существуют $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ такие, что $x = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k$. Поэтому при любом $d \in \mathbb{R}^1$ справедливо равенство

$$x = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k + d(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r).$$

Полагаем $p = \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r$. Возьмем $d > 0$ таким, чтобы для всех $i$ выполнялись неравенства $\gamma_i + d\alpha_i > 0$. Получаем $x = \gamma_1^0 b_1 + \dots + \gamma_n^0 b_n + dp$, причем $\gamma_i^0 > 0$. Следовательно, $0 \in \mathrm{Intco}\{b_1, \dots, b_n, p\}$ [19]. Рассмотрим множество $B_1 = \{x \mid (p, x) \le \mu\}$, где $\mu = \beta_1 \mu_1 + \dots \beta_r \mu_r$. Тогда $B \subset B_1$. Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Пусть $V = D_1(0)$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k, n \ge m + k - 1$, и выполнены следующие условия:*

1. $0 \in \mathrm{Intco}\{b_j, j \in \Lambda, p_1, \dots, p_r\}$ *для любого* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$.
2. $\min\limits_{v \in \overline{\mathrm{co} V_1}} \max\limits_s (p_s, v) > 0$, *где* $V_1 = \{v \in V \mid \max\limits_{J \in \Omega(m)} \min\limits_{j \in J} \lambda(v, 1, b_j) = 0\}$.

*Тогда существуют $p \in \mathbb{R}^k, \mu \in \mathbb{R}^1$ такие, что:*

1. $B \subset B_1 = \{z \in \mathbb{R}^k \mid (p, z) \le \mu\}$.
2. $0 \in \mathrm{Intco}\{b_j, j \in \Lambda, p\}$ *для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Боннебласта, Карлина, Шепли [20, с. 33] существуют неотрицательные вещественные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $\gamma_1 + \dots + \gamma_s = 1$ такие, что верно неравенство $\inf\limits_{v \in \mathrm{co} V_1} \sum_{s=1}^{r} \gamma_s (p_s, v) > 0$. Полагаем $p = \gamma_1 p_1 + \dots + \gamma_s p_s$, $\mu = \gamma_1 \mu_1 + \dots + \gamma_s \mu_s$. Считаем, что $p \neq 0$. Получаем $B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leq \mu\}$ и $(p, v) > 0$ для всех $v \in \overline{\mathrm{co}\, V_1}$. Докажем далее второе утверждение леммы. Предположим, что существует $\Lambda_0 \in \Omega(n - m + 1)$ для которого $0 \notin \mathrm{Intco}\{b_j, j \in \Lambda_0, p\}$. Тогда в силу леммы 2

$$\min_{v \in V} \max\{\max_{j \in \Lambda_0} \lambda(v, 1, b_j), (p, v)\} = 0.$$

Следовательно, существует $v_0 \in V$, для которого $\max\limits_{j \in \Lambda_0} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$, $(p, v_0) \leq 0$. Поэтому $\lambda(v_0, 1, b_j) = 0$ для всех $j \in \Lambda_0$. Отсюда для любого $J \in \Omega(m)$ $\min\limits_{j \in J} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$. Следовательно, $\max\limits_{J \in \Omega(m)} \min\limits_{j} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$. Получили, что $v_0 \in V_1$ и поэтому $(p, v_0) > 0$. Получили противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Пусть выполнены предположения 1, 2, $r = 1$. Тогда существует момент $T > t_0$ такой, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего $E$, любого набора $h \in D$ найдется такое множество $\Lambda \in \Omega(m)$, что*

$$\min_{j \in \Lambda} G_j(T, v(\cdot), h_j) \geq 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in D$. Тогда в силу леммы 3 $\delta > 0$. Так как управление $v(t)$ убегающего $E$ допустимо, то для всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $(p_1, y(t)) \leq \mu_1$. Отсюда

$$\int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds \leq \mu(t) = \mu_1 - (p_1, \eta(t)).$$

Определим множества

$$T^+(t) = \{\tau \colon \tau \in [t_0, t], \varphi_{l-1}(t, \tau) \geq 0\}, \quad T^-(t) = \{\tau \colon \tau \in [t_0, t], \varphi_{l-1}(t, \tau) < 0\},$$
$$T_1^+(t) = \{\tau \colon \tau \in T^+(t), (p_1, v(\tau)) \geq \delta\}, \quad T_2^+(t) = \{\tau \colon \tau \in T^+(t), (p_1, v(\tau)) < \delta\},$$
$$T_1^-(t) = \{\tau \colon \tau \in T^-(t), (-p_1, v(\tau)) \geq \delta\}, \quad T_2^-(t) = \{\tau \colon \tau \in T^-(t), (-p_1, v(\tau)) < \delta\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds = \int\limits_{T^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds + \int\limits_{T^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds$$

$$= \int\limits_{T_1^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds + \int\limits_{T_2^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds + \int\limits_{T_1^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds$$

$$+ \int\limits_{T_2^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds \geq \delta \int\limits_{T_1^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)\, ds - \int\limits_{T_2^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)\, ds$$

$$+ \delta \int\limits_{T_1^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))\, ds - \int\limits_{T_2^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))\, ds = \delta \int\limits_{T_1^+(t) \cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds - \int\limits_{T_2^+(t) \cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds.$$

Получаем

$$\delta \int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \;-\; \int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \le \mu(t),$$

$$\int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \;+\; \int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds = F(t).$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \ge \frac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}.$$

Далее имеем

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda} G_j(t,v(\cdot),h_j) = \max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\lambda(v(s),r(t,s),h_j)\,ds$$

$$\ge \max_{\Lambda\in\Omega(m)}\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\min_{j\in\Lambda}\lambda(v(s),r(t,s),h_j)ds$$

$$\ge \frac{1}{C_n^m}\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\sum_{\Lambda\in\Omega(m)}\Big(\min_{j\in\Lambda}\lambda(v(s),r(t,s),h_j)\Big)ds$$

$$\ge \frac{1}{C_n^m}\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(v(s),r(t,s),h_j)ds$$

$$\ge \frac{1}{C_n^m}\int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(v(s),r(t,s),h_j)ds$$

$$\ge \frac{\delta}{C_n^m}\int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|ds \ge \frac{\delta}{C_n^m}\Big[\frac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}\Big].$$

Так как $F(t)\to\infty$, $\mu(t)$ ограничена, то существует момент $T$ такой, что $\dfrac{\delta}{C_n^m}\Big[\dfrac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}\Big]\ge 1$ для всех $t\ge T$, откуда получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Определим число

$$T_0=\min\{t\ge t_0 \mid \min_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda} G_j(t,v(\cdot),h_j)\ge 1\}.$$

В силу леммы 6 $T_0<+\infty$.

**Предположение 3.** *Существуют моменты $\tau_i\ge T_0$ такие, что*:
1. $\xi_i(\tau_i)\in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* $i$.
2. $\inf\limits_{v(\cdot)}\max\limits_{\Lambda\in\Omega(m)}\min\limits_{j\in\Lambda} G_j(\tau_j,v(\cdot),\xi_j(\tau_j))\ge 1$.

З а м е ч а н и е 1. $a$) существование $\tau_i$ в п. 1 предположения 3 гарантировано предположением о рекуррентности функций $\xi_i(t)$;

$b$) если в предположении 3 все $\tau_i=\tau$, то п. 2 данного предположения выполнен автоматически в силу леммы 6.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены предположения* 1, 2, 3, $r = 1$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* $m$*-кратная поимка.*

Доказательство. Пусть $\tau_j$ — моменты, удовлетворяющие предположению 3, $v(s)$, $s \in [t_0, T_1]$ — произвольное допустимое управление убегающего $E$, где $T_1 = \max\limits_i \tau_i$. Рассмотрим функцию

$$H(t) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j)) ds.$$

Обозначим через $\tau_0 \geq t_0$ — первый корень данной функции. Отметим, что момент $\tau_0$ существует в силу предположения 3. Кроме того, существует множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что $\tau_0 \leq \tau_j$ для всех $j \in \Lambda_0$ и

$$1 - \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^{\tau_0} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j)) ds \leq 0$$

для всех $j \in \Lambda_0$. Поэтому существуют моменты $t_j \leq \tau_0, j \in \Lambda_0$, для которых

$$1 - \int_{t_0}^{t_j} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j)) ds = 0. \tag{2.2}$$

Для $j \notin \Lambda_0$ также обозначим через $t_j$ моменты времени, для которых выполнено условие (2.2), если такие моменты существуют. В силу леммы Филиппова [21] для каждого $i$ существуют измеримые функции $u_i(s)$, $s \in [t_0, T_1]$, являющиеся при каждом фиксированном $s$ решением уравнения

$$\lambda(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i)) \xi_i(\tau_i) = u_i - v(s).$$

Задаем управления преследователей $P_i$, полагая $u_i(t) = v(t) - \lambda\big(v(t), r(\tau_i, t), \xi_i(\tau_i)\big) \xi_i(\tau_i)$, $t \in [t_0, \min\{t_i, T_1\}]$, $u_i(t) = v(t)$, $t \in (\min\{t_i, T_1\}, T_1]$. Тогда

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i) + \int_{t_0}^{\tau_i} \varphi(\tau_i, s)(u_i(s) - v(s)) ds = \xi_i(\tau_i) - \int_{t_0}^{\tau_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda\big(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i)\big) \xi_i(\tau_i) ds$$

$$= \xi_i(\tau_i)(1 - \int_{t_0}^{t_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i)) ds.$$

Из (2.2) следует, что $z_j(\tau_j) = 0$ для всех $j \in \Lambda_0$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть* $m = 1$ *и выполнены предположения* 1, 2, 3. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Доказательство. Из предположения 2 и леммы 4 следует, что существуют $p \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{\xi_i(\tau_i^0), i \in I, p\} \quad \text{и} \quad B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leq \mu\}.$$

Из теоремы 1 следует, что в игре $\Gamma(n, B_1)$ происходит поимка. Поэтому поимка происходит и в игре $\Gamma(n, B)$. Теорема доказана.

**Предположение 4.** *Существуют* $p \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^1$, *моменты* $\tau_i^0 \in [t_0, \infty)$ *такие, что*:
1. $B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leq \mu\}$.
2. *Для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$ *выполнено включение* $0 \in \operatorname{Intco}\{\xi_j(\tau_j^0), j \in \Lambda, p\}$.

З а м е ч а н и е 2. Если выполнены предположение 2 и условия леммы 5, то предположение 4 выполнено.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены предположения* 1, 3, 4. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* $m$*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы и теоремы 1 следует, что $m$-кратная поимка происходит в игре $\Gamma(n, B_1)$. Следовательно, поимка произойдет и в игре $\Gamma(n, B)$.

## 3. Примеры

П р и м е р 1. Пусть $r = 1$, система $(1.4), (1.5)$ имеет вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \ z_i(0) = z_i^0.$$

**Утверждение 1.** *Пусть* $V = D_1(0)$ *и* $0 \in \operatorname{Intco}\{z_j^0, j \in \Lambda, p_1\}$ *для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* $m$*-кратная поимка.*

П р и м е р 2. Пусть в системе $(1.4), (1.5)$ $l = 1$, $t_0 = 0$, функция $a_1(t)$ имеет вид

$$a_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \in [0, 2\pi], \\ \sin t, \text{ если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Тогда функция $\varphi_0(t)$ имеет вид

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in [0, 2\pi], \\ e^{1-\cos t}, \text{ если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Функция $\varphi_0(t)$ является рекуррентной, но не является почти-периодической [18]. Предположение 1 выполнено.

**Утверждение 2.** *Пусть* $V = D_1(0)$, $m = 1$, $n \geq k$,

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_i^0, i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

*Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

П р и м е р 3. Пусть система $(1.4)$ имеет вид

$$\ddot{z}_i + \frac{2}{3t}\dot{z}_i + \frac{1}{9t^{2/3}}z_i = u_i - v,$$

причем $t_0 = 8\pi^2$. Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \cos(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}), \ \varphi_1(t, s) = 3s^{2/3}\sin(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}),$$
$$\xi_i(t) = z_i^0\cos(\sqrt[3]{t}) + 12\pi^2 z_i^1 \sin(\sqrt[3]{t}).$$

Рекуррентность функций $\xi_i(t)$ следует из результатов работы [18].

**Утверждение 3.** *Пусть* $V = D_1(0)$, $n \geq m+k-1$ *и выполнены предположения* 3, 4. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* $m$*-кратная поимка.*

Взяв в качестве $\tau_i^0 = t_0 = 8\pi^2$, получаем, что справедливо

**Утверждение 4.** *Пусть* $V = D_1(0)$, $m = 1$, $n \geq k$, *и*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_i^0, i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

*Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М: Наука, 1981. 287 с.
4. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. Думка, 1992. 384 с.
5. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
6. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
7. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. **Банников А.С., Петров Н.Н.** К нестационарной задаче группового преследования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 40–51.
9. **Благодатских А.И.** О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вест. Удмурт. ун-та. 2007. № 1. С. 17–24. (Математика.)
10. **Петров Н.Н.** “Мягкая” поимка в примере Л. С. Понтрягина со многими участниками // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 5. С. 759–770.
11. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
12. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 54–59.
13. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в примере Л.С.Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
14. **Благодатских А.И.** Многократная поимка в примере Понтрягина // Вестн. Удмурт. ун-та. 2009. № 2. С. 3–12. (Математика. Механика. Компьютерные науки).
15. **Соловьева Н.А.** Групповое преследование в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Вест. Удмурт. ун-та. 2014. № 3. С. 83–89. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
16. **Соловьева Н.А.** Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, № 1. С. 81–90.
17. **Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 41–48.
18. **Зубов В.И.** К теории рекуррентных функций // Сиб. мат. журн. 1962. Т. III, № 4. С. 532–560.
19. **Петров Н.Н.** Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.
20. **Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.** Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974. 296 с.
21. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1959. № 2. С. 25–32.

Поступила 10.02.2015

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Удмуртский государственный университет
e-mail: kma3@list.ru

Соловьева Надежда Александровна
аспирантка
Удмуртский государственный университет
e-mail: solov_na@mail.ru