ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

УСПОКОЕНИЕ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОГО СУХОГО ТРЕНИЯ[1]

А. И. Овсеевич, А. К. Федоров

Рассматривается задача успокоения системы линейных осцилляторов. Задача решается с помощью управления, имеющего вид сухого трения. Движение системы под действием данного управления описывается системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Доказана теорема единственности и непрерывности фазового потока этой системы. Тем самым, движение системы осцилляторов под действием управления в виде обобщенного сухого трения определяется однозначно.

Ключевые слова: оптимальное управление, теория ДиПерны — Лионса, сингулярные ОДУ.

A. I. Ovseevich, A. K. Fedorov. Damping of a system of linear oscillators using the generalized dry friction

The problem of damping a system of linear oscillators is considered. The problem is solved by using a control in the form of dry friction. The motion of the system under the control is governed by a system of differential equations with a discontinuous right-hand side. A uniqueness and continuity theorem is proved for the phase flow of this system. Thus, the control in the form of generalized dry friction defines the motion of the system of oscillators uniquely.

Keywords: optimal control, DiPerna–Lions theory, singular ODE.

Введение

Настоящая работа тесно связана с докладом одного из авторов (А. И. Овсеевич) на Международном семинаре “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”, посвященном А. И. Субботину. Предмет данной работы соотносится с одной из центральных тем творчества Андрея Измайловича: как правильно определить решение задачи так, чтобы вся соответствующая теория приняла привлекательную и окончательную форму.

Конечно, Андрей Измайлович и мы занимались существенно различными проблемами. В нашей работе идет речь не о решениях нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, а о решениях обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и связанных с ними линейных уравнений переноса. Тем не менее основная идея работы состоит именно в том, чтобы на основе нетрадиционного понятия решения получить окончательные теоремы существования и единственности движения для некоторой вполне конкретной системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

В рассматриваемом случае эта система возникает при попытке управлять квазиоптимальным образом системой из произвольного числа линейных осцилляторов с помощью управления по обратной связи в виде обобщенного сухого трения [1–3], а используемое нами понятие решения взято из классической работы Р. ДиПерны и П. Лионса [4].

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Как известно, с помощью принципа максимума можно явно построить управление в форме синтеза (по обратной связи) для быстрейшего успокоения одного линейного осциллятора [5].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-08-00606 и 14-01-00476).

Прямым обобщением такой задачи является вопрос об успокоении системы из произвольного числа N линейных осцилляторов с различными собственными частотами ω_i:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^{2N}, \quad u \in \mathbb{U} = \mathbb{R}, \quad |u| \leq 1, \tag{1.1}$$

где матрица A и вектор B имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \operatorname{diag}(A_i), \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \oplus B_i. \tag{1.2}$$

В естественных координатах (x_i, y_i) система записывается в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = y_i, \\ &\dot{y}_i = -\omega_i^2 x_i + u, \quad |u| \leq 1, \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Асимптотические свойства системы (1.1), (1.2) во многом определяются наличием или отсутствием резонансов, т. е. нетривиальных соотношений между частотами вида

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \omega_i = 0, \quad \text{где } 0 \neq m = (m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{Z}^N. \tag{1.3}$$

Критерий управляемости Калмана [6] для системы (1.1), (1.2) состоит в различии частот: $\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$ и, конечно, существенно слабее, чем условие отсутствия резонансов.

Задача быстродействия для системы (1.1), (1.2) может быть сведена к краевой задаче принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{p} = -A^* p, \\ &u = \operatorname{sign}\langle B, p\rangle, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \quad h(x,p) = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

отвечающей гамильтониану $h(x,p) = \langle Ax, p\rangle + |\langle B, p\rangle| - 1 = \max_{|u|\leq 1}\{\langle Ax, p\rangle + \langle Bu, p\rangle - 1\}$, где угловые скобки $\langle .,. \rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2N}$ и $|\cdot|$ — евклидова норма.

Заметим, что система (1.4) — гамильтонова с $2N$ степенями свободы и $N+1$ интегралом движения. Таковыми являются гамильтониан h и энергии

$$I_i = \frac{1}{2}\left(\eta_i^2 + \omega_i^{-2}\xi_i^2\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

нормальных колебаний вектора p, записанного в виде $p_i = (\xi_i, \eta_i)$, где ξ_i — переменная, двойственная к x_i, η_i — переменная, двойственная к y_i. С точки зрения канонической системы принципа максимума (1.4) задача быстрейшего успокоения одного линейного осциллятора является вполне интегрируемой, поскольку именно в этом случае $N = 1$ число $N+1$ интегралов движения совпадает с числом $2N$ степеней свободы. Отметим, что аналогичное тождество лежит в основе теоремы Лиувилля — Арнольда о полной интегрируемости гамильтоновых систем [7]. Напротив, задача (1.1), (1.2), по-видимому, не является вполне интегрируемой и поэтому аналитическое построение оптимального управления методами, основанными на принципе максимума Понтрягина, вряд ли возможно.

Общая задача состоит в построении неоптимального управления по обратной связи, приводящего систему в состояние равновесия. В работах [1; 2] был предложен подход к построению асимптотически оптимального управления системой (1.1), (1.2). При использовании методов [1; 2] отношение времени приведения системы в положение равновесия с помощью предлагаемого управления к минимально возможному близко к единице, если начальная энергия системы достаточно велика [2].

В рамках данной работы мы ограничиваемся кругом вопросов, связанных с построением управления в виде обобщенного сухого трения и изучением движения системы под действием данного управления. Мы описываем подход к построению управления, а также изучаем связанные с движением системы дифференциальные уравнения с разрывной правой частью и показываем, что движение системы можно определить однозначно. В терминах [1; 2] это дает описание динамики системы под действием асимптотически оптимального управления в областях фазового пространства с достаточно большой энергией. В настоящей работы мы приводим доказательства теорем существования и единственности решений возникающих при этом дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Исследование асимптотических свойств и подробное описание управления могут быть найдены в [2; 3].

Следует отметить, что известны и существенно иные методы построения управления в форме синтеза для линейных систем. Таковы, например, методы, основанные на подходе Калмана к программному управлению [8;9]. Работы [8;9] также содержат оценки для времени движения под действием построенного управления. Это время оказывается сравнимым с оптимальным: отношение времени движения под действием данного управления к минимальному ограничено.

2. Управление системой осцилляторов

Хорошо известная геометрическая интерпретация уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана для задачи быстродействия состоит в том, что вектор импульса $\partial T/\partial x$ в точке x представляет собой внутреннюю нормаль к области достижимости $\mathcal{D}(T(x))$, где $T(x)$ — время быстродействия для управляемой системы.

Определение 1. Область достижимости $\mathcal{D}(T)$ — множество концов допустимых траекторий управляемой системы, выходящих из нуля и параметризованных интервалом времени $[0.T]$.

Управление оптимального быстродействия имеет вид

$$u(x) = -\mathrm{sign}\langle B, p(x)\rangle, \quad p = \frac{\partial T}{\partial x}(x), \tag{2.1}$$

где p — внешняя нормаль к области достижимости из нуля $\mathcal{D}(T(x))$, граница которой проходит через x.

Управление в виде обобщенного сухого трения

$$u = -\mathrm{sign}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i, \tag{2.2}$$

где λ_i — некоторые положительные коэффициенты, зависящие от координат и скоростей, возникает при замене точной области достижимости $\mathcal{D}(T(x))$ системы (1.1), (1.2) на ее асимптотическое приближение. Согласно асимптотической теории областей достижимости [10–12] при больших временах $T \to \infty$ хорошим приближением к $\mathcal{D}(T)$ служит множество вида $T\Omega$, где Ω — некоторое фиксированное выпуклое тело. Тело Ω может быть однозначно задано опорной функцией.

Определение 2. Опорная функция $H_M(\xi)$ замкнутого выпуклого множества M имеет вид

$$H_M(\xi) = \sup_{x\in M}\langle \xi, x\rangle \tag{2.3}$$

и определяет множество M однозначно [13].

Если сформулировать более точно, для рассматриваемой системы (1.1), (1.2) имеем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть импульс p записан в виде $p = (p_i)$, где $p_i = (\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \dots, N$, ξ_i — переменная, двойственная к x_i, η_i — переменная, двойственная к y_i, и пусть $z_i = (\eta_i^2 + \omega_i^{-2}\xi_i^2)^{1/2}$.*

В случае отсутствия резонансов, т. е. нетривиальных соотношений между частотами вида (1.3)*, опорная функция* H_T *области достижимости* $\mathcal{D}(T)$ *имеет при* $T\to\infty$ *асимптотику вида*

$$H_T(p) = \frac{T}{(2\pi)^N}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\Big|\sum_{i=1}^N z_i\cos\varphi_i\Big|d\varphi_1\dots d\varphi_N + o(T) = T\mathfrak{H}(z)+o(T), \qquad (2.4)$$

а опорная функция выпуклого компакта Ω *задается главным членом* $\mathfrak{H}(z)$*.*

Доказательство. По определению опорная функция множества $\mathcal{D}(T)$ имеет вид (2.3), где sup берется по возможным траекториями, и $x(T)$ — состояние управляемой системы (1.1), (1.2) в момент T, при этом $x(0)=0$.

Используя формулу Коши, имеем

$$\langle x(T),p\rangle = \int\limits_0^T\langle e^{A(T-t)}Bu(t),p\rangle dt = \int\limits_0^T u(t)B^*e^{A^*(T-t)}pdt.$$

После взятия sup под интегралом и замены переменных $t\mapsto T-t$ получим

$$H_{\mathcal{D}(T)}(p) = \int\limits_0^T\sup_{|u(t)|\le 1}u(t)B^*e^{A^*(T-t)}pdt = \int\limits_0^T|B^*e^{A^*t}p|dt. \qquad (2.5)$$

В двойственных координатах ξ_i,η_i формула (2.5) имеет вид

$$H_{\mathcal{D}(T)}(p) = \int\limits_0^T\Big|\sum_{i=1}^N\eta_i\cos\omega_i t + \omega_i^{-1}\xi_i\sin\omega_i t\Big|dt.$$

Заметим, что последнее выражение — это интеграл функции

$$f(\varphi) = \Big|\sum_{i=1}^N\eta_i\cos\varphi_i + \omega_i^{-1}\xi_i\sin\varphi_i\Big|,$$

взятый по обмотке $\varphi_i(t)=\omega_i t$ тора $\mathcal{T}=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^N$ с угловой координатой φ_i.

Предположим, что в системе нет резонансов, т. е. нетривиальных соотношений между частотами вида (1.3). Тогда среднее по времени совпадает с пространственным средним [7]:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\varphi(t))dt = \int\limits_{\mathcal{T}}f(\varphi)d\varphi.$$

Заметим, что $\eta_i\cos\varphi_i+\omega_i^{-1}\xi_i\sin\varphi_i = z_i\cos(\varphi_i+\alpha_i)$, где $\alpha=(\alpha_i)$ — точка на торе. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{T}}f(\varphi)d\varphi = \int\limits_{\mathcal{T}}f(\varphi-\alpha)d\varphi = \int\limits_{\mathcal{T}}\Big|\sum_{i=1}^N z_i\cos\varphi_i\Big|d\varphi.$$

Тогда из (2.6) получим утверждение теоремы:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}H_{\mathcal{D}(T)}(p) = \int\limits_{\mathcal{T}}\Big|\sum_{i=1}^N z_i\cos\varphi_i\Big|d\varphi. \qquad (2.6)$$

Теорема доказана. □

Отметим, что теорема следует из общей теории асимтотического поведении опорных функций линейных систем, детально разработанной в [11], но приведенное доказательство намного проще, чем общая теория.

Опорная функция $H_\Omega(p)$ выпуклого тела Ω — главный член асимптотики в (2.4):

$$H_\Omega(p) = \mathfrak{H}(z) = \int \left| \sum_{i=1}^{N} z_i \cos\varphi_i \right| d\varphi, \quad \text{где } z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Вектор p является нормалью к границе $\partial\Omega$ в точке $\partial H_\Omega(p)/\partial p$. Поэтому нормаль к приближенной области достижимости $\rho\Omega$, граница которой проходит через x, определяется из уравнения

$$\rho^{-1} x = \frac{\partial H_\Omega(p)}{\partial p} = \frac{\partial \mathfrak{H}(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p}, \tag{2.7}$$

где $p \in \mathbb{R}^{2N}$ и $\rho > 0$ — неизвестные. Функция H_Ω дифференцируема, и уравнение (2.7) имеет ровно одно решение ввиду гладкости границы множества Ω [12]. Стратегия построения управления, продиктованная использованием уравнения (2.7), может быть применена и в резонансном случае, когда асимптотика (2.4) не работает, однако квазиоптимальные свойства управления при этом теряются. Функция $\rho = \rho(x)$ из уравнения (2.7) играет для рассматриваемого управления такую же роль, как время оптимального быстродействия $T(x)$ для оптимального управления (2.1). Импульс p в (2.7) имеет вид $p = \partial\rho/\partial x$. Функция $\rho(x)$ — это норма вектора x в метрике, в которой тело Ω — единичный шар. Функция $\rho(x)$ гладкая вне нуля.

Использование управления в виде сухого трения (2.2), хотя и способствует гашению колебаний, может не приводить к полной остановке системы. Точнее говоря, могут возникать зоны застоя, в которых система не движется вовсе, несмотря на то что положение равновесия еще не достигнуто. Метод, предложенный в [1–3], сочетает в себе несколько стратегий управления, последовательно применяемых при больших, промежуточных и малых значениях энергии. При больших и промежуточных энергиях используется скалярное управление в виде обобщенного сухого трения (2.2). При малых энергиях используется существенно отличный закон управления по обратной связи, который строится с использованием общих функций Ляпунова [1]. В данной работе нас интересует движение системы в областях с большими и промежуточными энергиями.

3. Движение под действием управления

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью естественным образом возникают в теории оптимального управления. Традиционный подход к проблеме существования решений таких уравнений основан на теории Филиппова дифференциальных включений [14]. Однако интуитивная концепция управляемого движения подразумевает не только существование, но и однозначную определенность траекторий системы законом управления. Соответствующий вопрос о единственности решения дифференциального уравнения, как правило, находится за рамками теории Филиппова.

Управление в виде обобщенного сухого трения также приводит к движению системы, которое формально описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью:

$$\dot{x} = Ax - B \operatorname{sign}\left\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x} \right\rangle, \quad u(x) = -\operatorname{sign}\left\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x} \right\rangle. \tag{3.1}$$

Здесь $u(x)$ — многозначная функция, поскольку $\operatorname{sign}(0)$ определен неоднозначно и может принимать любые значения в интервале $[-1, 1]$. Фактически мы имеем дело с дифференциальным включением.

Движение под действием управления в виде обобщенного сухого трения, которое описывается дифференциальным включением (3.1), как оказывается, можно определить однозначно. Для этого можно использовать теорию ДиПерны — Лионса сингулярных ОДУ [4].

3.1. Теория ДиПерны — Лионса

Если $b(x)$ — липшицева функция, то задачи Коши для ОДУ

$$\dot{x} = b(x), \quad x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

и для уравнения в частных производных (уравнения переноса)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad v(x,0) = v_0(x), \tag{3.3}$$

эквивалентны. Метод характеристик говорит, что решение v задачи (3.3) задается формулой

$$v(x,t) = v_0(\phi_t(x)), \tag{3.4}$$

где ϕ_t — фазовый поток для (3.2).

В работе ДиПерны и Лионса [4] существенно ослаблено условие Липшица $\dfrac{\partial b}{\partial x} \in L_\infty$ на правую часть дифференциального уравнения. Вместо него накладывается условие Липшица в интегральном смысле $\dfrac{\partial b}{\partial x} \in L_1$. Показано, что решение задачи (3.3) по-прежнему существует и единственно и задается формулой (3.4), где ϕ_t — измеримый поток. Тем самым в [4] было продемонстрировано, что можно эффективно работать с дифференциальными уравнениями, для правой части которых выполнено условие Липшица в интегральном смысле, а не поточечно.

Теория ДиПерны — Лионса основана на понятии перенормируемого решения.

О п р е д е л е н и е 3. Слабое ограниченное решение задачи v задачи Коши (3.3) называется перенормируемым, если для любой гладкой функции $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция $\beta(v)$ — снова слабое решение.

3.2. Движение под действием обобщенного сухого трения

Общая идея теории ДиПерны — Лионса состоит в том, чтобы вместо решения индивидуальной задачи Коши для каждого начального условия строить глобальный фазовый поток, возможно, не всюду определенный. Наш главный результат утверждает, что в фазовом пространстве системы (3.1) можно определить *полупоток* $\phi_t(x)$, $t \geq 0$, который непрерывен, однозначно определен всюду и задает по формуле (3.4) решение уравнения переноса.

Теорема 2. *Имеется единственный непрерывный полупоток $\phi_t(x)$, $t \geq 0$, такой что $v(x,t) = v(\phi_t(x))$ — единственное перенормируемое решение задачи Коши для уравнения переноса*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Big\langle Ax - B\mathrm{sign}\Big\langle B, \frac{\partial \rho}{\partial x}(x)\Big\rangle, \frac{\partial v}{\partial x}\Big\rangle, \quad v(x,0) = v(x). \tag{3.5}$$

Каждая кривая $x(t) = \phi_t(x)$ абсолютно непрерывна, и выполнено дифференциальное включение (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы ограничиваемся доказательством существования непрерывного ограниченного решения уравнения переноса (3.5), получаемого как предел классических решений сглаженных уравнений. Остальные утверждения могут быть установлены стандартными методами теории ДиПерны — Лионса [4; 15].

Будем использовать двухпараметрическую аппроксимацию задачи. Во-первых, выберем параметр $n \to \infty$ так, что гладкие выпуклые функции $m_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно аппроксимируют функцию $x \mapsto |x|$. Тогда производные $s_n = m_n'$ приближают функцию $\mathrm{sign}(x)$ в L_1. Заметим, что $xs_n(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Во-вторых, выберем другой параметр, обозначаемый через $\delta \downarrow 0$, означающий, что мы останавливаем движение системы (3.1) в δ-окрестности

$U_\delta = \{\rho(x) \le \delta\}$ нуля относительно метрики ρ. Другими словами, мы приближаем ОДУ (3.1) уравнением без особенностей

$$\dot{x} = Ax - Bs_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big) \tag{3.6}$$

в области $V_\delta = \{x \in \mathbb{R}^{2N} \colon \rho(x) \ge \delta\}$. Важно, что все окрестности U_δ инвариантны относительно фазового потока системы (3.6) при положительных временах, поскольку функция ρ не растет вдоль интегральных кривых. В самом деле, выполнено неравенство

$$\dot{\rho} = -s_n\Big(\Big\langle \frac{\partial\rho}{\partial x}, B\Big\rangle\Big)\Big\langle \frac{\partial\rho}{\partial x}, B\Big\rangle \le 0.$$

Между опорной функцией H и функцией ρ существует соотношение двойственности [2; 3]:

$$1 = \rho\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho}{\partial x} \otimes \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{3.7}$$

Используя соотношение (3.7), перепишем второй член в правой части уравнения (3.6) в градиентном виде:

$$Bs_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big) = \rho\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}m_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big) + xs_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big)\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle.$$

Последнее выражение можно трактовать как приближение к

$$B\,\mathrm{sign}\,\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle = \rho\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big|\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big| + x\Big|\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big|, \quad \alpha(x) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}, \quad H = H_\Omega.$$

В частности, ОДУ принимает вид

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x) = f(x) - g(x)\dfrac{\partial}{\partial x}m_n\left(h(x)\right), & \text{если } x \text{ лежит в } V_\delta, \\ 0, & \text{если } x \text{ лежит в } U_\delta. \end{cases} \tag{3.8}$$

Участвующие в этом уравнении функции

$$f(x) = Ax - xs_n\Big(\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big)\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle, \quad g = \rho\alpha, \quad h = \Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle$$

довольно гладкие, а точнее, локально липшицевы вне нуля. Уравнения (3.8) аппроксимируют уравнение (3.1), переписанное в градиентной форме:

$$\dot{x} = F(x) = f(x) - g(x)\frac{\partial}{\partial x}|h(x)|, \quad f(x) = Ax - x\Big|\Big\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big\rangle\Big|.$$

Для нас важно, что матрица $g = \rho\alpha$ симметрическая и неотрицательная. Опуская индекс n, получим, что соответствующее уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f_i v_i - g_{ij}h_j v_i s(h) = F_i v_i,$$

где

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}v, \quad h_i = \frac{\partial}{\partial x_i}h, \quad s(h) = \mathrm{sign}\,h, \quad F_i = f_i - g_{ij}h_j s(h),$$

и использованы обозначения Эйнштейна для суммирования. Дифференцируя, получим следующие уравнения для вектор-функции V с компонентами v_k:

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = F_i v_{k,i} + f_{i,k}v_i - g_{ij,k}h_i v_i s(h) - g_{ij}h_{jk}v_i s(h) - g_{ij}h_j h_k v_i \delta(h), \tag{3.9}$$

где $v_{k,i} = \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}$, $h_{jk} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}$, $g_{ij,k} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$ и $\delta = \delta_n$ обозначает m_n''. Уравнение (3.9) — это снова уравнение переноса с дополнительными членами $f_{i,k}v_i - g_{ij,k}h_i v_i s(h) - g_{ij}h_{ik}v_i s(h) - g_{ij}h_i h_k v_i \delta(h)$ в правой части. К счастью, наиболее "опасный" и сингулярный член $\sigma_k = g_{ij}h_i h_k v_i \delta(h)$ обладает свойством положительности:

$$g_{kl}v_l\sigma_k = g_{kl}h_k v_l g_{ij}h_j v_i \delta(h) = \left(\sum g_{kl}h_k v_l\right)^2 \delta(h) \text{ — положительная мера.}$$

Все прочие члены — линейные функции от V с коэффициентами, ограниченными вне любой окрестности нуля. Отсюда следует, что $w = \langle gV, V\rangle = g_{kl}v_l v_k$ является в некотором смысле квадратичной функцией Ляпунова:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \le F_i w_i + LW, \quad W = |V|^2 = \sum v_k^2. \tag{3.10}$$

Здесь L — равномерно ограниченная функция вне любой окрестности нуля. Поскольку матрица $g = \rho\alpha$ не является строго положительно определенной, W нельзя оценить через w и уравнение (3.10) недостаточно для получения априорной оценки для w, не говоря уже о W. Тем не менее мы можем использовать оценку

$$W = \sum v_k^2 \le C\left(\left(\sum x_k v_k\right)^2 + \langle gV, V\rangle\right), \tag{3.11}$$

в которой C — положительная функция, ограниченная вне любой окрестности нуля. Эта оценка выполнена, поскольку ядро матрицы $g(x)$ — одномерное подпространство, порожденное вектором x. Ввиду неравенства (3.11) нужно найти оценку для $z = \sum x_k v_k = Ev$, где E — оператор Эйлера, $Ev = \sum x_k \dfrac{\partial v}{\partial x_k}$. Применяя оператор Эйлера к уравнению переноса (3.9), получим

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F_i E v_i + (EF_i)v_i = F_i z_i - F_i v_i + (EF_i)v_i. \tag{3.12}$$

Здесь использованы коммутационные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i}E = E\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i},$$

из которых следует, что $Ev_i = z_i - v_i$. Нетрудно вычислить EF_i. Функция

$$F(x) = Ax - Bs\left\langle B, \frac{\partial\rho}{\partial x}\right\rangle$$

очевидно является суммой однородных функций Ax и $-Bs\,\langle B, \partial\rho/\partial x\rangle$ степени 1 и 0. Поэтому EF_i — локально ограниченная функция. Соотношения (3.12) теперь показывают, что

$$\frac{\partial y}{\partial t} \le F_i y_i + C'W, \tag{3.13}$$

где $y = z^2$, а C' — локально ограниченная функция. Неравенство (3.11) говорит о том, что $W \le C\,(y + w)$. Поэтому, складывая неравенства (3.10) и (3.13), получим, что

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \le F_i Y_i + MY, \quad Y = w + y,$$

где функция M локально ограничена вне нуля, причем равномерно по параметру n.

Неравенство (3.10) — это решающая оценка, позволяющая показать, что поток $x \mapsto \Phi_t(x) = \Phi_{n,t}(x)$, отвечающий уравнению (3.2), является локально липшицевым, причем соответствующая константа Липшица не зависит от параметра n. Поэтому, переходя к пределу $n \to \infty$, заключаем, что существует липшицев предел $\phi_t(x)$ потоков $\Phi_{n,t}$. Поскольку параметр δ произволен, то тем самым, в частности, доказано, что отображение $x \mapsto \phi_t(x)$ непрерывно, если $x \neq 0$ и $\phi_t(x) \neq 0$.

На самом деле очевидно, что отображение $x \mapsto \phi_t(x)$ непрерывно в нуле, поскольку поток ϕ отображает любую окрестность нуля U_δ в себя. Остается рассмотреть случай $x \neq 0$, $\phi_t(x) = 0$. Пусть $\tau := \inf\{t > 0\colon \phi_t(x) = 0\}$. Достаточно показать, что точка $\phi_\tau(y)$ близка к $\phi_\tau(x) = 0$, если точка y достаточно близка к x. Нам уже известно, что для любого $\epsilon > 0$ точка $\phi_{\tau-\epsilon}(x)$ непрерывно зависит от x. С другой стороны, очевидно, что отображение $t \mapsto \phi_t(y)$ является равномерно липшицевым для y из некоторой окрестности x. Поэтому

$$|\phi_\tau(y) - \phi_\tau(x)| \leq C|\epsilon| + |\phi_{\tau-\epsilon}(y) - \phi_{\tau-\epsilon}(x)|.$$

Поскольку ϵ произвольно и $|\phi_{\tau-\epsilon}(y) - \phi_{\tau-\epsilon}(x)|$ произвольно мало, если точка y достаточно близка к x, то непрерывность доказана. Теорема доказана. □

Аналогичное явление обнаружено И.А. Богаевским [16] для градиентных дифференциальных уравнений $\dot{x} = -\partial f/\partial x$, где f — негладкая выпуклая функция.

Заключение

В нашей работе исследовано управление, имеющее вид обобщенного сухого трения, для успокоения системы осцилляторов. Как это традиционно происходит в теории оптимального управления, такое управление приводит к дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью. В данной работе показано, что для рассматриваемого случая в рамках теории ДиПерны–Лионса можно разрешить вопрос о существовании и единственности движения под действием управления. Важным представляется изучение аналогичного вопроса для оптимального управления.

Интересное развитие рассматриваемой задачи об успокоении системы осцилляторов дает переход к бесконечномерному случаю. Например, задача успокоения струны с помощью ограниченной нагрузки, приложенной в фиксированной точке, приводит к нетривиальным вопросам, которые родственны рассмотренным выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсеевич А.И., Федоров А.К.** Асимптотическое оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // Докл. акад. наук. 2013. № 3. С. 266–270.
2. **Fedorov A.K., Ovseevich A.I.** Asymptotic control theory for a system of linear oscillators: Preprint arXiv:1308.6090. URL: http://arxiv.org/pdf/1308.6090v2.pdf.
3. **Овсеевич А.И., Федоров А.К.** Движение системы осцилляторов под действием обобщенного сухого трения // Автоматика и телемеханика. 2015. № 5. С. 121–129.
4. **DiPerna R.J., Lions P.L.** Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. Vol. 98, no. 3. P. 511–547.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.]. М.: Наука, 1983. 393 с.
6. **Калман Р.Е.** Об общей теории систем управления // Тр. 1-го Конгресса Междунар. федерации по автоматическому управлению. Москва, 1960. С. 481–492.
7. **Арнольд В.И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
8. **Черноусько Ф.Л.** О построении ограниченного управления в колебательных системах // Прикл. математика и механика. 1988. № 4. С. 549–558.
9. **Овсеевич А.И.** О полной управляемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1989. № 5. С. 845–848.
10. **Ovseevich A.I.** Limit behaviour of attainable and superattainable sets // Proc. Conf. Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty. Hungary, 1990. P. 324–333.
11. **Гончарова Е.В., Овсеевич А.И.** Сравнительный анализ асимптотической динамики множеств достижимости линейных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 4. С. 5–13.

12. **Ovseevich A.I.** Singularities of attainable sets // Russian J. Math. Physics. 1998. Vol. 5, no. 3. P. 389–398.
13. **Schneider R.** Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 490 p.
14. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
15. **Ovseevich A.I.** Irregular dynamic systems according to R.J. DiPerna and P.L. Lions // Funct. Anal. Other Math. 2012. Vol. 4, no. 1. P. 57–70.
16. **Богаевский И.А.** Разрывные градиентные дифференциальные уравнения и траектории в вариационном исчислении // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 12. С. 11–42.

Овсеевич Александр Иосифович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: ovseev@ipmnet.ru

Поступила 20.03.15

Федоров Алексей Константинович
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
студент МГТУ им. Н. Э. Баумана
e-mail: akfedorov@student.bmstu.ru