ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

О ПОЛЕЗНОСТИ КООПЕРАЦИИ В ИГРАХ ТРЕХ ЛИЦ[1]

М. С. Никольский, М. Абубакар

В статье рассматриваются игры трех лиц, в которых каждый игрок максимизирует свою функцию выигрыша. Изучается интересный для кооперативной теории игр вопрос о полезности объединения всех трех игроков в союз. Цель такой кооперации — получить каждому игроку положительную прибавку к его гарантированному выигрышу. В статье получены эффективные достаточные условия, при которых объединение игроков в союз оказывается полезным для каждого игрока. Специально рассматривается линейный случай. Здесь были получены весьма общие результаты в конструктивной форме. Во второй части статьи изучается вопрос о полезности кооперации трех игроков при наличии четвертого игрока — Природы. Поведение Природы считается непредсказуемым. Таким образом, она может навредить и каждому игроку в отдельности, и союзу этих игроков. Отметим, что рассматриваемая во второй части ситуация связана с одним докладом А. В. Кряжимского, состоявшимся летом 2014 г. В статье получены конструктивные условия, при которых объединение игроков в союз выгодно и в этой ситуации.

Ключевые слова: игра трех игроков, кооперация, полезность.

M. S. Nikolskii, M. Aboubacar. On the usefulness of cooperation in three-person games.

Three-person games in which each player maximizes his payoff function are considered. The question on the usefulness of a union of three players, which is interesting for cooperative game theory, is studied. The aim of the cooperation is that each player increases his guaranteed payoff. Effective sufficient conditions are obtained under which the union of the players is useful for each of them. The linear case is considered separately. In this case, rather general results are obtained in a constructive form. In the second part of the paper, the question on the usefulness of cooperation of three players in the presence of the fourth player—Nature—is studied. The behavior of Nature is assumed to be unpredictable; it may harm any individual player or the union of the players. Note that the situation considered in the second part is related to A.V. Kryazhimskii's talk delivered in the summer of 2014. We obtain constructive conditions under which the union of the players is beneficial in this situation as well.

Keywords: three-person game, cooperation, usefulness.

В теории игр (см., например, [1]) большое внимание уделяется кооперативной теории игр N лиц. В работе [2] мы рассматривали игры двух лиц с точки зрения полезности их объединения в союз с целью получения дополнительных дивидендов. В этой статье в первой части мы будем рассматривать игры трех лиц с точки зрения полезности объединения игроков в союз, в котором выбор стратегий производится согласованно с целью максимального увеличения суммы выигрышей трех лиц. Во второй части рассматриваются игры трех игроков при наличии возмущающих факторов, которые можно трактовать как действия непредсказуемой Природы. Здесь изучается вопрос о целесообразности объединения (кооперации) трех игроков в союз с целью противодействия возможным неприятностям от Природы.

1. Пусть в евклидовых арифметических пространствах $\mathbb{R}^{k_1}$ ($k_1 \geqslant 1$), $\mathbb{R}^{k_2}$ ($k_2 \geqslant 1$) и $\mathbb{R}^{k_3}$ ($k_3 \geqslant 1$) (k_1, k_2, k_3 — размерности пространств) фиксированы непустые компакты X, Y, Z соответственно и на $X \times Y \times Z$ определены непрерывные скалярные функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ и $h(x, y, z)$. В рассматриваемой игре первый игрок выбирает вектор $x \in X$ и стремится к максимизации своего выигрыша $f(x, y, z)$, второй игрок выбирает вектор $y \in Y$ и стремится к максимизации своего выигрыша $g(x, y, z)$, а третий игрок выбирает вектор $z \in Z$ и также стремится к максимизации своего выигрыша $h(x, y, z)$. Игроки производят выбор векторов x, y, z независимо друг от друга. Как известно из теории игр (см., например, [1]) первый игрок

[1]Работа написана при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00685, 13-01-12446 офи-м2) и научного проекта № 14-00-90408 Укр_а и НАН Украины № 03-01-14.

может гарантировать выигрыш

$$\gamma_1 = \max_{x\in X} \min_{y\in Y, z\in Z} f(x,y,z), \tag{1}$$

если он выбирает вектор $x_0 \in X$ согласно требованию

$$\gamma_1 = \min_{y\in Y, z\in Z} f(x_0,y,z).$$

Аналогично второй игрок может гарантировать выигрыш

$$\gamma_2 = \max_{y\in Y} \min_{x\in X, z\in Z} g(x,y,z), \tag{2}$$

если он выбирает вектор $y_0 \in Y$ из условия

$$\gamma_2 = \min_{x\in X, z\in Z} g(x,y_0,z).$$

Третий игрок также может гарантировать выигрыш

$$\gamma_3 = \max_{z\in Z} \min_{x\in X, y\in Y} h(x,y,z), \tag{3}$$

если он выбирает вектор $z_0 \in Z$ из условия

$$\gamma_3 = \min_{x\in X, y\in Y} h(x,y,z_0).$$

Хотя, вообще говоря, с физической точки зрения выигрыши $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ могут измеряться в разных физических единицах, будем считать, что выигрыши $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ измеряются в одинаковых единицах (в экономических приложениях, например, выигрыши $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ обычно измеряются в денежных единицах). При таком предположении величина $f(x,y,z)+g(x,y,z)+h(x,y,z)$ тоже имеет физический смысл. Если три игрока объединяются в союз (коалицию), то, действуя согласованно (т. е. совместно выбирая тройку (x,y,z) из $X\times Y\times Z$), они могут использовать величину

$$\gamma_4 = \max_{x\in X, y\in Y, z\in Z} \left(f(x,y,z)+g(x,y,z)+h(x,y,z)\right).$$

Нетрудно обосновать, что (см. (1)–(3)) $\gamma_4 \geqslant \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$. Если

$$\gamma_4 > \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3, \tag{4}$$

то объединение игроков в союз (коалицию) выгодно всем игрокам, так как положительную величину $\Delta = \gamma_4 - (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)$ можно распределить в виде положительных добавок к гарантированным выигрышам γ_1, γ_2, γ_3. Как это распределение разумно делать фактически, обсуждается в теории игр.

Возникает интересный для теорий игр и ее приложений вопрос о нахождении конструктивных условий на элементы рассматриваемой нами игры, при которых выполняется строгое неравенство (4). Рассмотрим два случая, в которых удается указать такие условия.

Случай A. Непрерывные функции f, g, h имеют на $X\times Y\times Z$ разделенный вид:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f_1(x)+f_2(y)+f_3(z),\\ g(x,y,z) &= g_1(x)+g_2(y)+g_3(z),\\ h(x,y,z) &= h_1(x)+h_2(y)+h_3(z), \end{aligned} \tag{5}$$

где функции $f_1(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$ непрерывны на X, функции $f_2(y)$, $g_2(y)$, $h_2(y)$ непрерывны на Y, а функции $f_3(z)$, $g_3(z)$, $h_3(z)$ непрерывны на Z.

Условимся в дальнейшем писать вместо операций $\max\limits_{x\in X}$, $\max\limits_{y\in Y}$ и $\max\limits_{z\in Z}$ операции $\max\limits_{x}$, $\max\limits_{y}$ и $\max\limits_{z}$ соответственно. Аналогично вместо операций $\min\limits_{x\in X}$, $\min\limits_{y\in Y}$ и $\min\limits_{z\in Z}$ будем писать $\min\limits_{x}$, $\min\limits_{y}$ и $\min\limits_{z}$ соответственно. В рассматриваемом случае исследуемое неравенство (4) переписывается в виде

$$\begin{gathered}\max_x [f_1(x)+g_1(x)+h_1(x)] + \max_y [f_2(y)+g_2(y)+h_2(y)] + \max_z [f_3(z)+g_3(z)+h_3(z)] \\ > \max_x f_1(x) + \min_y f_2(y) + \min_z f_3(z) + \max_y g_2(y) + \min_x g_1(x) + \min_z g_3(z) \\ + \max_z h_3(z) + \min_x h_1(x) + \min_y h_2(y). \end{gathered} \tag{6}$$

Отдельно рассмотрим неравенства

$$\max_x (f_1(x)+g_1(x)+h_1(x)) \geqslant \max_x f_1(x) + \min_x g_1(x) + \min_x h_1(x), \tag{7}$$

$$\max_y (g_2(y)+f_2(y)+h_2(y)) \geqslant \max_y g_2(y) + \min_y f_2(y) + \min_y h_2(y), \tag{8}$$

$$\max_z (h_3(z)+f_3(z)+g_3(z)) \geqslant \max_z h_3(z) + \min_z f_3(z) + \min_z g_3(z). \tag{9}$$

Лемма 1. *При сделанных предположениях неравенство* (7) *имеет место.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно $\forall x \in X$

$$f_1(x)+g_1(x)+h_1(x) \geqslant f_1(x) + \min_x g_1(x) + \min_x h_1(x).$$

Применяя к обеим частям этого неравенства операцию $\max\limits_x$, получим неравенство (7).

Аналогичным образом обосновываются следующие две леммы.

Лемма 2. *При сделанных предположениях неравенство* (8) *имеет место.*

Лемма 3. *При сделанных предположениях неравенство* (9) *имеет место.*

Отметим, что в общем случае каждое из неравенств (7)–(9) не обязательно выполняется в строгом смысле. Справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть существует такая точка x_0 из множества $\operatorname{Arg}\max\limits_x f_1(x)$, которая не принадлежит по крайней мере одному из множеств $\operatorname{Arg}\min\limits_x g_1(x)$, $\operatorname{Arg}\min\limits_x h_1(x)$, тогда имеет место неравенство* (ср. с (7))

$$\max_x (f_1(x)+g_1(x)+h_1(x)) > \max_x f_1(x) + \min_x g_1(x) + \min_x h_1(x). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $x_0 \in \operatorname{Arg}\max\limits_x f_1(x)$, и x_0 не принадлежит по крайней мере одному из множеств $\operatorname{Arg}\min\limits_x g_1(x)$, $\operatorname{Arg}\min\limits_x h_1(x)$ и выполняется равенство

$$\max_x (f_1(x)+g_1(x)+h_1(x)) = \max_x f_1(x) + \min_x g_1(x) + \min_x h_1(x).$$

Очевидно, левая часть неравенства (10) больше или равна величине

$$f_1(x_0)+g_1(x_0)+h_1(x_0) = \max_x f_1(x) + g_1(x_0) + h_1(x_0).$$

Из сказанного получаем $\max_x f_1(x) + \min_x g_1(x) + \min_x h_1(x) \geqslant \max_x f_1(x) + g_1(x_0) + h_1(x_0)$, т. е.

$$\min_x g_1(x) + \min_x h_1(x) \geqslant g_1(x_0) + h_1(x_0). \tag{11}$$

Очевидно неравенство

$$\min_x g_1(x) + \min_x h_1(x) \leqslant g_1(x_0) + h_1(x_0). \tag{12}$$

Из (11), (12), получаем $\min_x g_1(x) + \min_x h_1(x) = g_1(x_0) + h_1(x_0)$. Следовательно,

$$g_1(x_0) = \min_x g_1(x) \quad \text{и} \quad h_1(x_0) = \min_x h_1(x),$$

т. е.

$$x_0 \in \operatorname{Arg}\min_x g_1(x) \quad \text{и} \quad x_0 \in \operatorname{Arg}\min_x h_1(x).$$

Мы пришли к противоречию с условиями леммы. Таким образом, в условиях нашей леммы 4 в (7) выполняется строгое неравенство. □

З а м е ч а н и е 1. Символы $\operatorname{Arg}\max_x \omega(x)$, $\operatorname{Arg}\min_x \omega(x)$ означают соответственно множества точек максимума, минимума функции $\omega(x)$ на X.

По аналогии с леммой 4 доказываются следующие две леммы.

Лемма 5. *Пусть существует такая точка* y_0 *из множества* $\operatorname{Arg}\max_y g_2(y)$, *которая не принадлежит по крайней мере одному из множеств* $\operatorname{Arg}\min_y f_2(y)$, $\operatorname{Arg}\min_y h_2(y)$, *тогда имеет место неравенство* (ср. с (8))

$$\max_y (g_2(y) + f_2(y) + h_2(y)) > \max_y g_2(y) + \min_y f_2(y) + \min_y h_2(y). \tag{13}$$

З а м е ч а н и е 2. Символы $\operatorname{Arg}\max_y \omega(y)$, $\operatorname{Arg}\min_y \omega(y)$ означают соответственно множества точек максимума, минимума функции $\omega(y)$ на Y.

Лемма 6. *Пусть существует такая точка* z_0 *из множества* $\operatorname{Arg}\max_z h_3(z)$, *которая не принадлежит по крайней мере одному из множеств* $\operatorname{Arg}\min_z f_3(z)$, $\operatorname{Arg}\min_z g_3(z)$, *тогда имеет место неравенство* (ср. с (9))

$$\max_z (h_3(z) + f_3(z) + g_3(z)) > \max_z h_3(z) + \min_z f_3(z) + \min_z g_3(z). \tag{14}$$

З а м е ч а н и е 3. Символы $\operatorname{Arg}\max_z \omega(z)$, $\operatorname{Arg}\min_z \omega(z)$ означают соответственно множества точек максимума, минимума функции $\omega(z)$ на Z.

Из вышесказанного вытекает

Теорема 1. *Если выполняются условия одной из лемм* 4–6, *то имеет место строгое неравенство* (6) *и, следовательно, строгое неравенство* (4).

Теперь рассмотрим второй случай.

Л и н е й н ы й с л у ч а й B. Множества X, Y и Z — выпуклые компакты, а непрерывные функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ имеют на $X \times Y \times Z$ линейный вид:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \langle a_1, x\rangle + \langle b_1, y\rangle + \langle c_1, z\rangle\,, \\ g(x,y,z) &= \langle a_2, x\rangle + \langle b_2, y\rangle + \langle c_2, z\rangle\,, \\ h(x,y,z) &= \langle a_3, x\rangle + \langle b_3, y\rangle + \langle c_3, z\rangle\,, \end{aligned} \tag{15}$$

где a_i, $i = 1, 2, 3$ — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^{k_1}$; b_i, $i = 1, 2, 3$ — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^{k_2}$; c_i, $i = 1, 2, 3$ — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^{k_3}$; символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены стандартные скалярные произведения в $\mathbb{R}^{k_1}$, $\mathbb{R}^{k_2}$ и $\mathbb{R}^{k_3}$ соответственно. Так как функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ имеют разделенный вид (ср. с (5)), то можно использовать результаты, полученные нами в случае A. В рассматриваемом линейном случае B можно переписать строгое неравенство (10) в виде

$$\max_x \left(\langle a_1 + a_2 + a_3, x\rangle\right) > \max_x \langle a_1, x\rangle + \min_x \langle a_2, x\rangle + \min_x \langle a_3, x\rangle\,, \tag{16}$$

строгое неравенство (13) в виде

$$\max_y \left(\langle b_1 + b_2 + b_3, y\rangle\right) > \max_y \langle b_2, y\rangle + \min_y \langle b_1, y\rangle + \min_y \langle b_3, y\rangle \tag{17}$$

и строгое неравенство (14) в виде

$$\max_z \left(\langle c_1 + c_2 + c_3, z\rangle\right) > \max_z \langle c_3, z\rangle + \min_z \langle c_1, z\rangle + \min_z \langle c_2, z\rangle\,. \tag{18}$$

Нам в дальнейшем понадобятся вспомогательные сведения.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 1$) обозначим $\sigma_m = \{v \in \mathbb{R}^m : |v| = 1\}$, где $|v|$ означает стандартную длину вектора v. Нам будет полезно следующее (см., [2, с. 36]) определение.

О п р е д е л е н и е. Непустой выпуклый компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 2$) с непустой внутренностью называется S-множеством, если:

(1) при любом $\psi \in \sigma_m$ в K существует лишь один вектор $v(\psi)$, максимизирующий по $v \in K$ скалярное произведение $\langle v, \psi\rangle$;

(2) для каждой граничной точки v_0 компакта K существует лишь одна опорная гиперплоскость, проходящая через точку v_0.

З а м е ч а н и е 4. Здесь и далее мы используем некоторые понятия выпуклого анализа (см., например [3; 4]). Отметим, что точка $v(\psi)$ при каждом $\psi \in \sigma_m$ принадлежит границе множества K. Используя терминологию выпуклого анализа, можно сказать, что S-множество является строго выпуклым множеством, а также гладким выпуклым телом.

Лемма 7 [2, лемма 6]. *Пусть множество $K \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 2$) является S-множеством, а векторы p, q — некоторые ненулевые векторы из $\mathbb{R}^m$, причем*

$$\frac{1}{|p|}p \neq \frac{1}{|q|}\,(-q).$$

Тогда выполняется неравенство $\left(\langle v(p), -q\rangle\right) < \left(\langle v(-q), -q\rangle\right)$.

Лемма 8. *Пусть в* (15) *множество* $X \subset \mathbb{R}^{k_1}$ ($k_1 \geqslant 2$) является S-множеством, а векторы a_1, a_2, a_3 являются ненулевыми и вектор $\dfrac{1}{|a_1|}a_1$ не равен по крайней мере одному из векторов $\dfrac{1}{|a_2|}\,(-a_2)$, $\dfrac{1}{|a_3|}\,(-a_3)$, тогда имеет место строгое неравенство (16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При сделанных предположениях однозначно определен вектор $x(a_1)$, максимизирующий функцию $\langle x, a_1\rangle$ по $x \in X$. Таким образом,

$$\operatorname*{Arg\,max}_x \langle x, a_1\rangle = \{x(a_1)\}. \tag{19}$$

Так как вектор $\dfrac{1}{|a_1|}a_1$ не равен по крайней мере одному из векторов $\dfrac{1}{|a_2|}\,(-a_2)$, $\dfrac{1}{|a_3|}\,(-a_3)$, то обозначив $p = a_1$, $q = a_i$, $i = 2, 3$, на основании леммы 7, получим по крайней мере одно из неравенств

$$\left(\langle x(a_1), -a_2\rangle\right) < \left(\langle x(-a_2), -a_2\rangle\right), \quad \left(\langle x(a_1), -a_3\rangle\right) < \left(\langle x(-a_3), -a_3\rangle\right), \tag{20}$$

где $x(-a_2)$ означает максимизатор функции $\langle x, -a_2\rangle$ при $x \in X$, а $x(-a_3)$ максимизатор функции $\langle x, -a_3\rangle$ при $x \in X$. Можно показать, что

$$\min_x \langle x, a_2\rangle = -\langle x(-a_2), -a_2\rangle, \quad \min_x \langle x, a_3\rangle = -\langle x(-a_3), -a_3\rangle. \tag{21}$$

Из соотношений (20), (21) мы получим по крайней мере одно из неравенств

$$(\langle x(a_1), a_2\rangle) > \min_x \langle x, a_2\rangle, \quad (\langle x(a_1), a_3\rangle) > \min_x \langle x, a_3\rangle.$$

Отсюда вытекает, что выполняется по крайней мере одно из соотношений

$$x(a_1) \notin \operatorname*{Arg\,min}_x \langle x, a_2\rangle, \quad x(a_1) \notin \operatorname*{Arg\,min}_x \langle x, a_3\rangle. \tag{22}$$

Из соотношений (19), (20), (22) вытекает, что $x(a_1) \in \operatorname*{Arg\,max}_x f_1(x)$ и $x(a_1)$ не принадлежит по крайней мере одному из множеств $\operatorname*{Arg\,min}_x g_1(x)$, $\operatorname*{Arg\,min}_x h_1(x)$.
Из сказанного и леммы 4 следует, что имеет место строгое неравенство (16).

Лемма 9. *Пусть в* (15) *множество* $Y \subset \mathbb{R}^{k_2}$ ($k_2 \geqslant 2$) является S-множеством, а векторы b_1, b_2, b_3 являются ненулевыми и вектор $\dfrac{1}{|b_2|}b_2$ не равен по крайней мере одному из векторов $\dfrac{1}{|b_1|}(-b_1)$, $\dfrac{1}{|b_3|}(-b_3)$, тогда имеет место строгое неравенство (17).

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 8 с очевидными изменениями.

Лемма 10. *Пусть в* (15) *множество* $Z \subset \mathbb{R}^{k_3}$ ($k_3 \geqslant 2$) является S-множеством, а векторы c_1, c_2, c_3 являются ненулевыми и вектор $\dfrac{1}{|c_3|}c_3$ не равен по крайней мере одному из векторов $\dfrac{1}{|c_1|}(-c_1)$, $\dfrac{1}{|c_2|}(-c_2)$, тогда имеет место строгое неравенство (18).

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 8 с очевидными изменениями.

Теорема 2. *Если выполнены условия одной из лемм* 8–10, *то имеет место искомое неравенство*

$$\max_x (\langle a_1 + a_2 + a_3, x\rangle) + \max_y (\langle b_1 + b_2 + b_3, y\rangle) + \max_z (\langle c_1 + c_2 + c_3, z\rangle) > \max_x \langle a_1, x\rangle$$
$$+ \min_x \langle a_2, x\rangle + \min_x \langle a_3, x\rangle + \max_y \langle b_2, y\rangle + \min_y \langle b_1, y\rangle + \min_y \langle b_3, y\rangle + \max_z \langle c_3, z\rangle$$
$$+ \min_z \langle c_1, z\rangle + \min_z \langle c_2, z\rangle.$$

Заметим, что функции выигрыша, имеющие разделенный вид (см. (5)), нередко рассматриваются в теории игр (см., например, [5]).

2. В этой части мы кратко изучим некоторую более общую игровую модель, нежели в первой части, учитывающую наличие четвертого игрока — Природы. Постановка рассматриваемой здесь задачи возникла под влиянием одного доклада А. В. Кряжимского.

Рассматривается игра трех лиц в почти классической форме.

Функция выигрыша первого игрока — непрерывная функция $f(x, y, z, t)$. Функция выигрыша второго игрока — непрерывная функция $g(x, y, z, t)$. Функция выигрыша третьего игрока —

непрерывная функция $h(x,y,z,t)$. Здесь $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $t \in T$, где X, Y, Z, T — непустые компакты в соответствующих конечномерных евклидовых пространствах. Первый игрок выбирает $x \in X$ с целью максимизации $f(x,y,z,t)$. Второй игрок выбирает $y \in Y$ с целью максимизации $g(x,y,z,t)$. Третий игрок выбирает $z \in Z$ с целью максимизации $h(x,y,z,t)$. Вектор $t \in T$ выбирается Природой, цели которой не ясны игрокам. Поэтому Природа может навредить игрокам, и это надо как-то учесть. Мы хотим показать, что иногда игрокам выгодно объединяться в коалицию и вместе бороться с возможными действиями Природы.

Будем изучать игры, для которых

$$\begin{gathered}\max_{x,y,z}\min_t\left(f(x,y,z,t)+g(x,y,z,t)+h(x,y,z,t)\right) > \max_x\min_{y,z,t} f(x,y,z,t)\\ + \max_y\min_{x,z,t} g(x,y,z,t) + \max_z\min_{x,y,t} h(x,y,z,t).\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь и далее в подобных неравенствах $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $t \in T$.

Отметим, что при выполнении неравенства (23) игрокам выгодно объединиться в коалицию, чтобы после торга получить больший выигрыш, нежели при антагонистическом подходе к игре. В сущности, в неравенстве (23) мы используем идеи понятия характеристической функции из кооперативной теории игр. Наше исследование сильно упрощается, если

$$\begin{gathered} f(x,y,z,t) = f_1(x,y,z) + f_2(t),\\ g(x,y,z,t) = g_1(x,y,z) + g_2(t),\\ h(x,y,z,t) = h_1(x,y,z) + h_2(t),\end{gathered} \tag{24}$$

где функции f_1, g_1, h_1 непрерывны на $X \times Y \times Z$, а функции f_2, g_2, h_2 непрерывны на T. С помощью (24) соотношение (23) тогда переписывается в виде неравенства

$$\begin{gathered}\max_{x,y,z}\left[f_1(x,y,z)+g_1(x,y,z)+h_1(x,y,z)\right] + \min_t\left[f_2(t)+g_2(t)+h_2(t)\right]\\ > \max_x\min_{y,z} f_1(x,y,z) + \max_y\min_{x,z} g_1(x,y,z) + \max_z\min_{x,y} h_1(x,y,z)\\ + \min_t f_2(t) + \min_t g_2(t) + \min_t h_2(t).\end{gathered} \tag{25}$$

Отметим, что справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\max_{x,y,z}\left[f_1(x,y,z)+g_1(x,y,z)+h_1(x,y,z)\right] \geqslant \max_x\min_{y,z} f_1(x,y,z)\\ + \max_y\min_{x,z} g_1(x,y,z) + \max_z\min_{x,y} h_1(x,y,z).\end{gathered} \tag{26}$$

Обоснование неравенства (26): при $x \in X, y \in Y, z \in Z$ имеем

$$f_1(x,y,z)+g_1(x,y,z)+h_1(x,y,z) \geqslant \min_{y,z} f_1(x,y,z) + \min_{x,z} g_1(x,y,z) + \min_{x,y} h_1(x,y,z).$$

Применяем к обеим частям операцию $\max\limits_{x,y,z}$ и получаем искомое.

Из (26) вытекает, что для выполнения неравенства (25) достаточно обеспечить неравенство

$$\min_t\left[f_2(t)+g_2(t)+h_2(t)\right] > \min_t f_2(t) + \min_t g_2(t) + \min_t h_2(t). \tag{27}$$

Отметим, что в общем случае

$$\min_t\left[f_2(t)+g_2(t)+h_2(t)\right] \geqslant \min_t f_2(t) + \min_t g_2(t) + \min_t h_2(t). \tag{28}$$

То есть для реализации неравенства (27) нужно, чтобы неравенство (28) стало строгим.

От противного доказывается, что строгое неравенство (27) выполняется, если

$$\operatorname*{Arg\,min}_{t\in T} f_2(t) \bigcap \operatorname*{Arg\,min}_{t\in T} g_2(t) \bigcap \operatorname*{Arg\,min}_{t\in T} h_2(t) = \varnothing. \tag{29}$$

Отметим, что выполнение условия (29) не зависит от выбора функций $f_1(x,y,z)$, $g_1(x,y,z)$, $h_1(x,y,z)$. Итак, из сказанного вытекает, что для выполнения строгого неравенства (25) достаточно, чтобы было выполнено соотношение (29).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Воробьев Н.Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 272 с.
2. **Никольский М.С., Абубакар М.** О полезности кооперации в играх двух лиц // Математическое образование. 2014. Т. 71, № 3. С. 34–40.
3. **Боннезен Т., Фенхель В.** Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002. 210 с.
4. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
5. **Жуковский В.И.** Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. 2-е изд. М.: URSS, 2010. 336 с.

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт РАН им. В. А. Стеклова
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 10.02.2015

Мусса Абубакар
канд. физ.-мат. наук, Maitre-Assistant
Кафедра математики и информатики
Ниамейский Университет им. Абду Мумуни
Ниамей, Нигер
e-mail: moussa@mail.ru