ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

В. И. Максимов

Рассматривается задача отслеживания решения одного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве второго порядка решением другого уравнения. Предполагается, что первое (эталонное) уравнение подвержено воздействию неизвестного неограниченного по времени управляющего воздействия. В условиях, когда текущие состояния каждого из уравнений наблюдаются с малыми погрешностями, указывается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения задачи. Алгоритм основан на известном в теории гарантированного управления принципе экстремального сдвига Н.Н. Красовского.

Ключевые слова: отслеживание решения, экстремальный сдвиг, уравнение второго порядка.

V. I. Maksimov. On a modification of the extremal shift method for a second-order differential equation in a Hilbert space.

A problem of tracking a solution of a second-order differential equation in a Hilbert space by a solution of another equation is considered. It is assumed that the first (reference) equation is subject to the action of an unknown control, which is unbounded in time. In the case when the current states of both equation are observed with small errors, a solution algorithm stable with respect to informational noises and computational inaccuracies is designed. The algorithm is based on N.N. Krasovskii's extremal shift method known in the theory of guaranteed control.

Keywords: tracking a solution, extremal shift, second-order equation.

Введение

Как известно, в теории позиционного управления, созданной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным, принцип экстремального сдвига играет важнейшую роль. Он позволяет осуществлять движение реальной системы, подверженной влиянию неконтролируемой помехи, вдоль траектории так называемого поводыря, остающегося в течение всего процесса управления внутри стабильного множества. Таким образом, принцип экстремального сдвига позволяет отслеживать траекторию поводыря в условиях меняющейся информации. В настоящей работе рассматривается задача отслеживания решения дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Методы исследования подобного типа задач излагаются, в частности, в рамках теории позиционного управления [1–7]. Обсуждаемая в настоящей работе постановка имеет одну особенность. Предполагается, что текущие состояния заданного уравнения, а также эталонного уравнения (на которое действует неизвестное управление) наблюдаются с малыми погрешностями. Это предположение ведет к невозможности точного решения задачи, в связи с чем мы конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм формирования управления по принципу обратной связи в заданном уравнении, гарантирующий выполнение подходящего свойства слежения. Алгоритм основан на методе экстремального сдвига. Прототипы рассматриваемой нами задачи слежения для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, а также параболическими уравнениями, рассматривались в работах [8–10]. В данной работе, в

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-12446-офи-М2 и 13-01-00110) и программы Президиума УрО РАН “Фундаментальные проблемы математики”.

отличие от указанных выше работ, объектом наших исследований является система с распределенными параметрами второго порядка. При этом рассмотрен случай отсутствия мгновенных ограничений на управления.

1. Постановка задачи

Пусть V и H — действительные гильбертовы пространства. Пространство V вложено в пространство H плотно и непрерывно: $V \subset H = H^* \subset V^*$. Символы $|\cdot|_V$, $|\cdot|_{V^*}$ и $|\cdot|_H$ означают соответственно нормы в V, V^* и H, а символы $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в H и двойственность между V и V^*.

Рассматривается дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad \vartheta < +\infty, \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1.$$

Здесь $A : V \to V^*$ — линейный, непрерывный и симметричный ($A = A^*$) оператор, удовлетворяющий (для некоторого $c > 0$) условию коэрцитивности

$$\langle Ay, y\rangle \geq c|y|_V^2 \quad \forall y \in V,$$

$f(\cdot) \in L_2(T; H)$ — заданная функция, U — гильбертово пространство с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_U$ (пространство управлений), производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений [11], B — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства U в пространство H ($B \in L(U; H)$).

Следуя [12, с. 91], функцию $x(\cdot) \in C(T; V)$ такую, что $\dot{x}(\cdot) \in W(T; V) = \big\{z(\cdot) \in C(T; H) : \dot{z}(\cdot) \in L_2(T; V^*)\big\}$ и выполняется соотношение

$$\langle \ddot{x}(t), v\rangle + \langle Ax(t), v\rangle = (Bu(t) + f(t), v)$$

$$\forall v \in V \quad \text{при п.в.} \quad t \in T,$$

будем называть решением (слабым) уравнения (1.1) и обозначать символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, x_1, u(\cdot))$. В дальнейшем полагаем, что вложение пространства V в пространство H компактно. Кроме того

$$x_0 \in V, \quad x_1 \in H.$$

Тогда (см. [12, с. 93]) при любом $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ уравнение (1.1) имеет единственное решение (слабое).

Рассматриваемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Наряду с уравнением (1.1) имеется еще одно уравнение того же вида

$$\ddot{w}(t) + Aw(t) = Bv(t) + f(t) \tag{1.2}$$

с начальным условием

$$w(t_0) = \tilde{x}_0 \in V, \quad \dot{w}(t_0) = \tilde{x}_1 \in H.$$

Будем считать, что справедливы неравенства

$$|x_0 - \tilde{x}_0|_H \leq h, \quad |x_1 - \tilde{x}_1|_{V^*} \leq h. \tag{1.3}$$

Это уравнение (назовем его в дальнейшем эталонным) подвержено воздействию некоторого эталонного управления $v(\cdot) \in L_2(T; U)$. Эталонное управление, а также отвечающее ему решение $w(\cdot) = w(\cdot; t_0, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, v(\cdot))$ уравнения (1.2) заранее неизвестны. В дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad (\tau_0 = t_0,\ \tau_m = \vartheta,\ \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$$

измеряются производные состояния $\dot{w}(\tau_i) = \dot{w}(\tau_i; t_0, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, v(\cdot))$ уравнения (1.2), а также производные состояния $\dot{x}(\tau_i) = x(\tau_i; t_0, x_0, x_1, u(\cdot))$ уравнения (1.1). Величины $\dot{x}(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — элементы $\xi_i^h \in H$ — удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|\dot{x}(\tau_i) - \xi_i^h|_{V^*} \le h, \quad i \in [1 : m-1]. \tag{1.4}$$

(В силу вложения пространства $W(T;V)$ в пространство $C(T;H)$, неравенства (1.4) имеют смысл.) Здесь величина $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения. Требуется указать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в правой части уравнения (1.1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $x(\cdot)$ уравнения (1.1) решение $w(\cdot)$ уравнения (1.2). Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $\dot{x}(\tau_i)$ и $\dot{w}(\tau_i)$ в "реальном времени" формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u(\cdot)$ в правой части уравнения (1.1) такое, что "отклонение" $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, x_1, u(\cdot))$ от $w(\cdot) = x(\cdot; t_0, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, v(\cdot))$, а именно величина $\max_{t\in T}\{|x(t) - w(t)|_H + |\dot{x}(t) - \dot{w}(t)|_{V^*}\}$, мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Наряду с измерениями производных решения уравнения (1.1) в дискретные моменты времени (см. (1.4)) мы также рассмотрим случай непрерывного измерения, т. е. случай, когда в каждый момент $t \in T$ становится известным приближение $\xi^h(t) \in H$ величины $\dot{x}(t)$. При этом полагается, что функция $\xi^h(\cdot)$ есть элемент пространства $L_\infty(T;H)$ и удовлетворяет неравенству

$$|\xi^h(t) - \dot{x}(t)|_{V^*} \le h, \quad t \in T. \tag{1.5}$$

Такова содержательная постановка рассматриваемой в работе задачи.

В случае, когда и эталонное управление $v(\cdot)$, и управление $u(\cdot)$ в уравнении (1.1) стеснены мгновенными ограничениями ($u(t) \in P$, $v(t) \in P$, где $P \subset U$ — заданное ограниченное и замкнутое множество), сформулированная задача может быть решена с помощью метода экстремального сдвига [1, с. 55–64]. Таким образом, метод экстремального сдвига позволяет решить задачу отслеживания решения эталонного уравнения при наличии мгновенных ограничений на управления ($v, u \in P$). В настоящей работе мы рассмотрим случай, когда подобные ограничения отсутствуют, т. е. допустимым управлением (как эталонным, $v(\cdot)$, так и "истинным", $u(\cdot)$) может быть любая функция из пространства $L_2(T;U)$. Никакой иной информации о функциях $v(\cdot)$, $u(\cdot)$ не требуется. При этом мы укажем соответствующую модификацию принципа экстремального сдвига, воспользовавшись, следуя [3; 8], идеей его локальной регуляризации.

Перейдем к формальным определениям. Пусть для каждого $h \in (0,1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0,1).$$

Всякую функцию $\xi^h(\cdot) \in L_(T;H)$, удовлетворяющую неравенству (1.5), назовем *допустимым h-измерением*. В свою очередь, кусочно-постоянные функции

$$\xi^h(\cdot) : T \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \xi^h(t) = \xi_i^h \qquad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1],$$

удовлетворяющие неравенствам (1.4), назовем *допустимыми измерениями точности* h, функции $u(\cdot) \in L_2(T;U)$ — *допустимыми управлениями*, а функции

$$\mathcal{U}(\cdot,\cdot) : H \times H \mapsto U, \quad \mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot) : T \times H \times H \mapsto U$$

— *допустимыми обратными связями* (для уравнения (1.1)).

Сначала рассмотрим случай непрерывного измерения. Управление $u = u^{\alpha,h}(\cdot)$ (здесь α — некоторый положительный параметр) будем формировать с помощью обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$. В силу этого решение $x = x^{\alpha,h}(\cdot)$ уравнения (1.1) будет изменяться под воздействием управления, порождаемого обратной связью $u^{\alpha,h}(\cdot) = \mathcal{U}(\xi^h(\cdot), \dot{w}(\cdot))$. Решение уравнения (1.1), таким образом, зависит от результатов $\xi^h(\cdot)$ измерения величин $\dot{x}^{\alpha,h}(\cdot)$, т. е. от допустимых h-измерений, и удовлетворяет следующим дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\ddot{x}^{\alpha,h}(t) + Ax^{\alpha,h}(t) = Bu^{\alpha,h}(t) + f(t), \quad t \in T, \tag{1.6}$$

$$x^{\alpha,h}(t_0) = x_0, \quad \dot{x}^{\alpha,h}(t_0) = x_1,$$

где

$$u^{\alpha,h}(t) = \mathcal{U}(\xi^h(t), \dot{w}(t)). \tag{1.7}$$

Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ и любого допустимого h-измерения $\xi^h(\cdot)$ решение $x^{\alpha,h}(\cdot)$ задачи Коши (1.6) будем называть *h-траекторией реальной системы*, порожденной допустимой обратной связью $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ и допустимым h-измерением $\xi^h(\cdot)$.

Управляемым h-процессом, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ и допустимому h-измерению, будем называть всякую четверку $(w(\cdot), x^{\alpha,h}(\cdot), \xi^h(\cdot), u^{\alpha,h}(\cdot))$, где $w(\cdot)$ — решение эталонного уравнения (1.2), $\xi^h(\cdot)$ — допустимое h-измерение, $x^{\alpha,h}(\cdot)$ — решение уравнения (1.1), соответствующее $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ и $\xi^h(\cdot)$, т. е. решение (1.6)) (h-траектория реальной системы), функция $u^{\alpha,h}(\cdot)\colon T \mapsto U$ задается соотношением (1.7). Функцию $u^{\alpha,h}(\cdot)$ будем при этом называть *h-реализацией* допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$, соответствующей допустимому h-измерению. Основным элементом решения обсуждаемой задачи в случае непрерывного измерения является допустимая обратная связь $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$. Будем называть такую обратную связь *отслеживающей*, если найдутся число $h_0 \in (0,1)$ и функция $\gamma_U(\cdot) : (0,1) \mapsto [0,+\infty)$ такие, что $\gamma_U(h) \to 0$ при $h \to 0$ для $\forall h \in (0, h_0)$ и для всякой реализации $u^{\alpha,h}(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ вида (1.7), всякой h-траектории реальной системы (1.1) $x^{\alpha,h}(\cdot)$ (т. е. решения (1.6)), соответствующей управлению $u^{\alpha,h}(\cdot)$ вида (1.7), и всякого допустимого h-измерения $\xi^h(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\max_{t\in T} \left\{|x^{\alpha,h}(t) - w(t)|_H + |\dot{x}^{\alpha,h}(t) - \dot{w}(t)|_{V^*}\right\} \le \gamma_U(h), \tag{1.8}$$

т. е. неравенство (1.8) выполняется для управляемого h-процесса $(w(\cdot), x^{\alpha,h}(\cdot), \xi^h(\cdot), u^{\alpha,h}(\cdot))$. Функцию $\gamma_U(\cdot)$ будем при этом называть *оценкой точности* допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$.

В случае дискретного измерения управление $u = u^h(\cdot)$ будем задавать с помощью обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$. Решение $x = x^h(\cdot)$ уравнения (1.1) в этом случае наблюдается в дискретные моменты $\tau_{h,i}$ с ошибкой и изменяется под воздействием некоторой обратной связи $u^h(\cdot) = \mathcal{V}(\cdot, \xi^h(\cdot), \dot{w}(\cdot))$. Решение уравнения (1.1), таким образом, зависит от результатов $\xi^h(\cdot)$ измерения $\dot{x}^h(\cdot)$ (т. е. допустимых измерений точности h) и удовлетворяет следующим дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\ddot{x}^h(t) + Ax^h(t) = Bu^h(t) + f_1(t), \quad t \in T, \tag{1.9}$$

$$x^h(t_0) = x_0, \quad \dot{x}^h(t_0) = x_1,$$

где

$$u^h(t) = u_i^h = \mathcal{V}(\tau_i, \xi_i^h, \dot{w}(\tau_i)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \quad i \in [0 : m_h - 1]. \tag{1.10}$$

Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и любого допустимого измерения $\xi^h(\cdot)$ точности h решение $x^h(\cdot)$ задачи Коши (1.9) будем называть *траекторией реальной системы*, соответствующей допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и допустимому измерению $\xi^h(\cdot)$.

Управляемым процессом, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и допустимому измерению точности h, будем называть всякую четверку $(w(\cdot), x^h(\cdot), \xi^h(\cdot), u^h(\cdot))$, где $w(\cdot)$ — решение эталонного уравнения (1.2), $\xi^h(\cdot)$ — допустимое измерение точности h, $x^h(\cdot)$ — решение уравнения (1.1), соответствующее $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\xi^h(\cdot)$ (т. е. решение уравнения (1.9)), функция $u^h(\cdot) : T \mapsto U$ задается соотношением (1.10), где $\xi_i^h = \xi^h(\tau_i)$ при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$,

$\tau_i = \tau_{h,i}, i \in [0 : m_h - 1]$. Функцию $u^h(\cdot)$ будем при этом называть *реализацией* допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, соответствующей допустимому измерению точности h.

Инструментом решения рассматриваемой задачи в случае дискретного измерения является допустимая обратная связь $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$. Будем называть такую обратную связь *отслеживающей*, если найдутся число $h_1 \in (0,1)$ и функция $\gamma_V(\cdot)\colon (0,1) \mapsto [0,+\infty)$ такие, что $\gamma_V(h) \to 0$ при $h \to 0$ и для всякого $h \in (0,h_1)$, всякого семейства Δ_h разбиений отрезка T, всяких реализаций $u^h(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ вида (1.10), всякой траектории уравнения (1.1) $x^h(\cdot)$ (т. е. решения уравнения (1.9)), соответствующей управлению $u^h(\cdot)$ вида (1.10) и всякого допустимого измерения $\xi^h(\cdot)$ точности h выполняется неравенство

$$\max_{t\in T}\left\{|x^h(t) - w(t)|_H + |\dot{x}^h(t) - \dot{w}(t)|_{V^*}\right\} \le \gamma_V(h), \tag{1.11}$$

т. е. неравенство (1.11) выполняется для управляемого процесса $(w(\cdot), x^h(\cdot), \xi^h(\cdot), u^h(\cdot))$. Функцию $\gamma_V(\cdot)$ будем при этом называть *оценкой точности* допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Рассматриваемая задача об устойчивом отслеживании решения эталонного уравнения (1.2) решением уравнения (1.1) состоит в построении отслеживающих допустимых обратных связей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

2. Алгоритм решения. Случай непрерывного измерения решений

Обратимся к случаю, когда измерения решений уравнений (1.1), (1.2) происходят непрерывно, т. е. выполняется неравенство (1.5).

Итак, нам необходимо указать отслеживающую обратную связь $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$. Фиксируем функцию

$$\alpha = \alpha(h) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}.$$

Положим

$$\mathcal{U}(\xi^h(t), \dot{w}(t)) = \alpha^{-1} B^* A^{-1}(\dot{w}(t) - \xi^h(t)). \tag{2.1}$$

Здесь символ B^* означает оператор, сопряженный к оператору B. Таким образом, в данном случае мы имеем систему (1.2), (1.6), т. е. пару уравнений

$$\ddot{w}(t) + Aw(t) = Bv(t) + f(t), \quad t \in T,$$

$$\ddot{x}^{\alpha,h}(t) + Ax^{\alpha,h}(t) = -\alpha^{-1} BB^* A^{-1}(\xi^h(t) - \dot{w}(t)) + f(t)$$

с начальными условиями

$$x^{\alpha,h}(t_0) = x_0, \quad w(t_0) = \tilde{x}_0, \quad \dot{x}^{\alpha,h}(t_0) = x_1, \quad \dot{w}(t_0) = \tilde{x}_1.$$

Заметим, что существование и единственность решения второго уравнения указанной выше системы является следствием теоремы 1.2 [11, с. 285].

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $h\alpha^{-2}(h) \le \mathrm{const}$ *при* $h \to 0$. *Пусть также* $t \to Bv(t) \in L_\infty(T; H)$. *Тогда можно указать числа* $h_0 \in (0,1)$ *и* $d_0 > 0$ *такие, что при* $h \in (0, h_0)$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T}\left\{|w(t) - x^{\alpha,h}(t)|_H^2 + |\dot{w}(t) - \dot{x}^{\alpha,h}(t)|_{V^*}^2\right\} \le d_0(\alpha(h) + h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись (1.5) и (2.1), заключаем: справедливо неравенство

$$|u^{\alpha,h}(t)|_U^2 \le 2b^2\alpha^{-2}(h^2 + |\dot{\mu}_{\alpha,h}(t)|_{V^*}^2), \quad t \in T,$$

где $\alpha = \alpha(h)$, $\mu_{\alpha,h}(t) = x^{\alpha,h}(t) - w(t)$, $b = |B^*A^{-1}|_{L(V^*;U)}$ — норма линейного оператора $B^*A^{-1} \in L(V^*;U)$. В таком случае при $t \in T$

$$\int_{t_0}^{t} |u^{\alpha,h}(\tau)|_U^2 d\tau \le 2b^2\alpha^{-2} \int_{t_0}^{t} |\dot\mu_{\alpha,h}(\tau)|_{V^*}^2 d\tau + c_1 h^2 \alpha^{-2}. \tag{2.2}$$

Легко видеть также, что (в силу (1.5)), верно неравенство

$$\begin{aligned} &\big(B(u^{\alpha,h}(t) - v(t)), A^{-1}\dot\mu_{\alpha,h}(t)\big) \\ &\le \big(B(u^{\alpha,h}(t) - v(t)), A^{-1}(\xi^h(t) - \dot w(t))\big) + c_2 h\big\{|v(t)|_U + |u^{\alpha,h}(t)|_U\big\} \quad \text{при п.в. } t \in T. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В свою очередь, из (1.6), (1.2) следует: $\mu_{\alpha,h}(t)$ — решение уравнения

$$\ddot\mu_{\alpha,h}(t) + A\mu_{\alpha,h}(t) = B(u^{\alpha,h}(t) - v(t)), \quad t \in T,$$

с начальным условием

$$\mu_{\alpha,h}(t_0) = x_0 - \tilde x_0, \quad \dot\mu_{\alpha,h}(t_0) = x_1 - \tilde x_1.$$

Введем функцию Ляпунова

$$\varepsilon_h(t) = |\mu_{\alpha,h}(t)|_H^2 + |\dot\mu_{\alpha,h}(t)|_{V^*}^2 + \alpha \int_{t_0}^{t} \big\{|u^{\alpha,h}(\tau)|_U^2 - |v(\tau)|_U^2\big\} d\tau, \quad t \in T.$$

Аналогично [12, с. 103, 104] устанавливаем

$$\dot\varepsilon_h(t) = 2\big\langle A^{-1}\mu_{\alpha,h}(t), B(u^{\alpha,h}(t) - v(t))\big\rangle + \alpha|u^{\alpha,h}(t)|_U^2 - \alpha|v(t)|_U^2 \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

Тогда в силу (2.3) верно неравенство

$$\begin{aligned} \dot\varepsilon_h(t) &= \frac{d|\mu_{\alpha,h}(t)|_H^2}{dt} + \frac{d|\dot\mu_{\alpha,h}(t)|_{V^*}^2}{dt} + \alpha\{|u^{\alpha,h}(t)|_U^2 - |v(t)|_U^2\} \\ &\le 2\big(u^{\alpha,h}(t), B^*A^{-1}(\xi^h(t) - \dot w(t))\big)_U + \alpha|u^{\alpha,h}(t)|_U^2 - 2\big(v(t), B^*A^{-1}(\xi^h(t) - \dot w(t))\big)_U \\ &\quad - \alpha|v(t)|_U^2 + 2c_2 h\big\{|v(t)|_U + |u^{\alpha,h}(t)|_U\big\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Заметим, что управление $u^{\alpha,h}(t)$ вида (2.1) таково:

$$u^{\alpha,h}(t) = \arg\min\big\{\alpha|v|_U^2 + 2\big(B^*A^{-1}(\xi^h(t) - \dot w(t)), v\big)_U : v \in U\big\}. \tag{2.5}$$

Из (2.4), учитывая (2.5), получаем при $t \in T$

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(t_0) + \int_{t_0}^{t} 2c_2 h\{|v(\tau)|_U + |u^{\alpha,h}(\tau)|_U\} d\tau. \tag{2.6}$$

Ввиду включения $v(\cdot) \in L_2(T;U)$ справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{\vartheta} 2c_2 h|v(\tau)|_U \, d\tau \le c_3 h.$$

В таком случае отсюда и из (2.6) получаем при $t \in [t_0, \vartheta]$

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(t_0) + c_4 h\bigg(1 + \int_{t_0}^{t} |u^{\alpha,h}(\tau)|_U^2 \, d\tau\bigg). \tag{2.7}$$

В свою очередь из (2.7) в силу (2.2) выводим, учитывая неравенство $\varepsilon_h(t_0) \le 2h^2$, вытекающее из (1.3),

$$\varepsilon_h(t) \le 2h^2 + c_4 h + c_5 h\alpha^{-2}\biggl(h^2 + \int\limits_{t_0}^{t} |\dot\mu_{\alpha,h}(\tau)|^2_{V^*} d\tau\biggr). \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует оценка

$$|\dot\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{V^*} \le c_7 h + c_6\alpha + c_5 h\alpha^{-2}\biggl(h^2 + \int\limits_{t_0}^{t} |\dot\mu_{\alpha,h}(\tau)|^2_{V^*} d\tau\biggr). \tag{2.9}$$

По лемме Гронуолла [13] из (2.9) получаем при $t \in T$

$$|\dot\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{V^*} \le (c_7 h + c_6\alpha + c_5 h^3\alpha^{-2}) \exp\{c_5(t - t_0)h\alpha^{-2}\}. \tag{2.10}$$

В силу условия леммы существует $h_0 \in (0,1)$ такое, что при всех $h \in (0, h_0)$ имеем $h\alpha^{-2}(h) \le \mathrm{const}$. Тогда, воспользовавшись (2.10), устанавливаем

$$|\dot\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{V^*} \le c_8(h + \alpha(h)), \quad t \in T. \tag{2.11}$$

Из (2.8), учитывая (2.11), выводим

$$|\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{H} + |\dot\mu_{\alpha,h}(t)|^2_{V^*} \le c_9(h + \alpha(h)). \tag{2.12}$$

Справедливость леммы следует из (2.12). Лемма доказана.

Прямым следствием леммы 1 является

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда обратная связь вида* (2.1) *является отслеживающей, причем оценка точности этой обратной связи* $\gamma_U(h) = d_0(\alpha(h) + h)$.

3. Алгоритм решения. Случай дискретного измерения решений

Обратимся к случаю дискретного измерения фазовых состояний. Таким образом, будем предполагать, что результаты измерений состояний $\dot x(\tau_i)$ — величины ξ_i^h — удовлетворяют неравенствам (1.4). Как и выше, фиксируем функцию $\alpha = \alpha(h) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. Наша цель — указать отслеживающую обратную связь $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, а также описать алгоритм решения задачи, т. е. последовательность действий, которые необходимо выполнить для отслеживания решения эталонного уравнения решением уравнения (1.1). Начнем с алгоритма.

До начала работы алгоритма фиксируется величина $h \in (0,1)$, а вместе с ней число $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение Δ_h. Работа алгоритма разбивается на $m-1$ ($m = m_h$) однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала в момент τ_i, вычисляется элемент

$$u_i^h = \mathcal{V}(\tau_i, \xi_i^h, \dot w(\tau_i)) = \alpha^{-1} B^* A^{-1}(\dot w(\tau_i) - \xi_i^h). \tag{3.1}$$

Затем на вход уравнения (1.1) подается управление

$$u^h(t) = u_i^h, \quad t \in \delta_i. \tag{3.2}$$

Под действием этого управления вместо состояния $\{x(\tau_i), \dot x(\tau_i)\}$ реализуется состояние $\{x(\tau_{i+1}), \dot x(\tau_{i+1})\}$, где $x(\tau_{i+1}) = x(\tau_{i+1}; \tau_i, x(\tau_i), \dot x(\tau_i), u_i^h)$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Таким образом, в данном случае мы также имеем пару уравнений (1.2) и (1.9), т. е. уравнения

$$\begin{aligned}&\ddot{w}(t) + Aw(t) = Bv(t) + f(t), \quad t \in T,\\&\ddot{x}^h(t) + Ax^h(t) = -\alpha^{-1}BB^*A^{-1}(\xi_i^h - \dot{w}(\tau_i)) + f(t),\\&t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m-1],\end{aligned} \tag{3.3}$$

с начальными условиями $w(t_0) = \tilde{x}_0$, $x^h(t_0) = x_0$, $\dot{w}(t_0) = \tilde{x}_1$, $\dot{x}^h(t_0) = x_1$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $\alpha(h) \to 0$, $(h + \delta(h))\alpha^{-2}(h) \to 0$ при $h \to 0$. Пусть также $t \to Bv(t) \in L_\infty(T; H)$. Тогда можно указать числа $h_1 \in (0, 1)$ и $d_1 > 0$ такие, что при $h \in (0, h_1)$ справедливо неравенство*

$$\max_{t \in T}\{|\mu^h(t)|_H^2 + |\dot{\mu}^h(t)|_{V^*}^2\} \le \nu(h),$$

где $\mu^h(t) = x^h(t) - w(t)$, $\nu(h) = d_1\{\alpha(h) + (h + \delta(h))\alpha^{-2}(h)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим изменение величины

$$\gamma(\tau_i) = \max_{0 \le j \le i}\{\varepsilon(\tau_j)\}, \quad i \in [0 : m], \quad m = m_h, \tag{3.4}$$

где

$$\varepsilon(t) = |\mu^h(t)|_H^2 + |\dot{\mu}^h(t)|_{V^*}^2 + \alpha \int\limits_{t_0}^{t} |u^h(\tau)|_U^2 \, d\tau.$$

Заметим, что $\gamma(\tau_{i+1}) = \max\{\gamma(\tau_i), \varepsilon(\tau_{i+1})\}$. Кроме того

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) = \varepsilon(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varrho_i(\tau)\, d\tau + \alpha \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_U^2 \, d\tau. \tag{3.5}$$

Здесь $\varrho_i(\tau) = 2(A^{-1}\dot{\mu}^h(\tau), B(u_i^h - v(\tau)))$. Легко видеть, что справедливо равенство

$$\varrho_i(t) = \sum_{j=1}^{3} \varrho_i^{(j)}(t),$$

где

$$\begin{aligned}\varrho_i^{(1)}(t) &= 2\big(A^{-1}(\dot{\mu}^h(t) - \dot{\mu}^h(\tau_i)), B(u_i^h - v(t))\big),\\ \varrho_i^{(2)}(t) &= -2\big(A^{-1}(\dot{w}(\tau_i) - \xi_i^h), B(u_i^h - v(t))\big),\\ \varrho_i^{(3)}(t) &= 2\big(A^{-1}(\dot{x}^h(\tau_i) - \xi_i^h), B(u_i^h - v(t))\big).\end{aligned}$$

Учитывая правило определения величин u_i^h (см. (3.1), (3.2)), имеем при п.в. $t \in \delta_i$

$$\varrho_i^{(2)}(t) + \alpha|u^h(t)|_U^2 \le \alpha|v(t)|_U^2. \tag{3.6}$$

В свою очередь, в силу включения $t \to Bv(t) \in L_\infty(T; H)$ при п.в. $t \in \delta_i$ получаем

$$\varrho_i^{(3)}(t) \le C_1\{|u_i^h|_U + |v(t)|_U^2\}|\dot{x}^h(\tau_i) - \xi_i^h|_{V^*} \le C_2 h\{1 + |u_i^h|_U\}, \tag{3.7}$$

$$\varrho_i^{(1)}(t) \le C_3\{1 + |u_i^h|_U\}\big\{|\dot{x}^h(t) - \dot{x}^h(\tau_i)|_{V^*} + |\dot{w}(t) - \dot{w}(\tau_i)|_{V^*}\big\}. \tag{3.8}$$

При выводе (3.7) мы воспользовались неравенствами (1.4). Заметим, что при $h \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$|u_i^h|_U = \alpha^{-1}|B^*A^{-1}(\xi_i^h - \dot w(\tau_i))|_U \le C_4\alpha^{-1}|\xi_i^h - \dot w(\tau_i)|_{V^*}$$
$$\le C_4\alpha^{-1}\{h + |\dot w(\tau_i) - \dot x^h(\tau_i)|_{V^*}\} \le C_4\alpha^{-1}\{h + \gamma^{1/2}(\tau_i)\}. \tag{3.9}$$

В таком случае, учитывая (3.4), (3.9), устанавливаем

$$|u^h(\cdot)|_{L_\infty([t_0,\tau_{i+1}];U)} \le C_5\alpha^{-1}\{h + \gamma^{1/2}(\tau_i)\}. \tag{3.10}$$

Воспользовавшись включением $t \to Bv(t) \in L_\infty(T;H) \subset L_2(T;H) \cap L_\infty(T;V^*)$, из теоремы 1.2 [12, с. 97] получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $s \in [\tau_i, t]$

$$|\dot w(t) - \dot w(s)|_{V^*} \le 2\big(1 + (\tau_{i+1} - t_0)^{1/2}\big)\big(|\tilde x_0|_V + |\tilde x_1|_H + |Bv(\cdot)|_{L_2([t_0,\tau_{i+1}];H)}$$
$$+ |Bv(\cdot)|_{L_\infty([t_0,\tau_{i+1}];V^*)}\big)(t-s) \le C_6(t-s). \tag{3.11}$$

Для решения $x^h(\cdot)$ уравнения (3.3) в таком случае при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $s \in [\tau_i, t]$ верна оценка

$$|\dot x^h(t) - \dot x^h(s)|_{V^*} \le 2\big(1 + (\tau_{i+1} - t_0)^{1/2}\big)\big(|x_0|_V + |x_1|_H + |Bu^h(\cdot)|_{L_2([t_0,\tau_{i+1}];H)}$$
$$+ |Bu^h(\cdot)|_{L_\infty([t_0,\tau_{i+1}];V^*)}\big)(t-s) \le C_7\big(1 + |u^h(\cdot)|_{L_\infty([t_0,\tau_{i+1}];U)}\big)(t-s).$$

Отсюда и из (3.10) выводим при $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta]$ неравенство

$$|\dot x^h(t) - \dot x^h(\tau_i)|_{V^*} \le C_8\alpha^{-1}\{h + \gamma^{1/2}(\tau_i)\}\delta. \tag{3.12}$$

Из (3.8), (3.9), (3.11), (3.12) получаем при $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta]$

$$\varrho_i^{(1)}(t) \le C_9\alpha^{-1}\{1 + |u_i^h|_U\}\{1 + \gamma^{1/2}(\tau_i)\}\delta \le C_{10}\alpha^{-2}(1 + \gamma(\tau_i))\delta. \tag{3.13}$$

Кроме того, из (3.7), (3.10) следует при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta]$ оценка

$$\varrho_i^{(3)}(t) \le C_{11}h\{1 + \alpha^{-1}(h + \gamma^{1/2}(\tau_i))\}$$
$$= C_{11}h + C_{11}\alpha^{-1}h^2 + C_{11}h\alpha^{-1}\gamma^{1/2}(\tau_i) \le C_{11}h + C_{12}\alpha^{-2}h + h\gamma(\tau_i). \tag{3.14}$$

Объединив (3.6), (3.13), (3.14), будем иметь при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_i + \delta]$

$$\varrho_i(t) + \alpha|u^h(t)|_U^2 \le \alpha|v(t)|_U^2 + C_{13}(\alpha^{-2}\delta + h + \alpha^{-2}h) + C_{14}(h + \alpha^{-2}\delta)\gamma(\tau_i). \tag{3.15}$$

Таким образом, в силу (3.5), (3.15), устанавливаем

$$\gamma(\tau_{i+1}) \le \gamma(\tau_i) + \alpha\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_U^2\,d\tau + C_{13}\delta(\alpha^{-2}\delta + h + \alpha^{-2}h) + C_{14}\delta(h + \delta\alpha^{-2})\gamma(\tau_i).$$

Отсюда стандартным образом (см. [1]) получаем

$$\gamma(\tau_i) \le \left\{\gamma(t_0) + \alpha\int_{t_0}^{\tau_i} |v(\tau)|_U^2\,d\tau + C_{13}(\vartheta - t_0)(\alpha^{-2}\delta + h + \alpha^{-2}h)\right\}\exp\big\{C_{14}(h + \delta\alpha^{-2})(\tau_i - t_0)\big\}. \tag{3.16}$$

В силу (1.3) верно неравенство $\gamma(t_0) \le 2h^2$. Кроме того, по условию леммы $(h + \delta(h))\alpha^{-2}(h) \to 0$ при $h \to 0$. В таком случае существует $h_1 \in (0,1)$ такое, что при $h \in (0, h_1)$ в силу (3.16) следует неравенство

$$\max_{i\in[0:m_h]}\{|\mu^h(\tau_i)|_H^2 + |\dot\mu^h(\tau_i)|_{V^*}^2\} \le C_{15}\big\{\alpha(h) + (h + \delta(h))\alpha^{-2}(h)\big\}. \tag{3.17}$$

Утверждение леммы является следствием неравенств (3.15), (3.17), а также равенства

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} \varrho_i(\tau)\,d\tau + \alpha\int_{\tau_i}^{t} |u^h(\tau)|_U^2\,d\tau, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнено условие леммы* 2. *Тогда обратная связь вида* (3.1) *является отслеживающей, а ее оценка точности* $\gamma_V(h) = d_1\{\alpha(h) + (h + \delta(h))\alpha^{-2}(h)\}$.

З а м е ч а н и е. Мы рассмотрели случай, когда решение эталонного уравнения (уравнения (1.2)) известно точно. Нетрудно видеть, что описанные выше алгоритмы позволяют решать рассмотренные выше задачи слежения и при измерении производных решения эталонного уравнения (1.2) с ошибкой. Именно, если вместо $\dot{w}(t)$ $(\dot{w}(\tau_i))$ измеряются величины $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; H)$ $(\psi^h(\tau_i) \in H)$ такие, что

$$|\psi^h(t) - \dot{w}(t)|_{V^*} \le h, \quad t \in T,$$

в случае непрерывного измерения или

$$|\psi^h(\tau_i) - \dot{w}(\tau_i)|_{V^*} \le h, \quad i \in [0 : m-1],$$

в случае дискретного измерения, то в формулах (2.1) ((3.1)) следует $\dot{w}(t)$ $(\dot{w}(\tau_i))$ заменить на $\psi^h(t)$ $(\psi^h(\tau_i))$ соответственно. При этом леммы 1 и 2, а также теоремы 1 и 2 останутся справедливыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 418 с.
3. **Осипов Ю.С.** Избранные труды. Москва: Изд-во МГУ, 2009. 656 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
6. **Барабанова Н.Н., Субботин А.И.** О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, № 6. С. 385–392.
7. **Пацко В.С.** Поверхности переключения в линейных дифференциальных игра: препринт / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 80 с.
8. **Максимов В.И.** Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 6. С. 951–960.
9. **Максимов В.И.** Об отслеживании решения параболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 1–9.
10. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 993–1002.
11. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
12. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
13. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

Максимов Вячеслав Иванович
Поступила 5.02.2015
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: maksimov@imm.uran.ru